Messung 0.

DER INGENIEUR FÜHRT MESSUNGEN DURCH

1. Einführung

Eine traditionelle Methode um neue Kenntnisse zu erwerben ist die Durchführung von Messungen und die Bearbeitung der Meßergebnisse (das ungarische Wort „mérnök" kommt aus dem Verb „mér"). Das Ziel der ersten Meßübung ist diese grundlegende Methode denjenigen Studenten zu zeigen, die ihr Studium an der Fakultät für Maschinenbau gerade anfangen.
Dieser Erkennungsprozeß wird Ihnen am Beispiel einer einfachen physikalischen Erscheinung, der Schwingung eines mathematischen Pendels gezeigt.
Viele unter Ihnen werden wahrscheinlich zum ersten Mal irgendeine charakteristische Größe eines physikalischen Prozesses messen. Die Messung wird ausgewertet und aus den Meßergebnissen werden Aussagen formuliert. Deswegen werden wir zusammen mit Ihnen folgendes durchführen:

- einzelne Schritte des Meßprozesses
- numerische und graphische Schritte der Auswertung
- Analyse der Meßergebnisse und die daraus resultierenden Folgerungen
- Dokumentation (sehr wichtig) der Messungen, Anfertigung eines Meßprotokolls.

Wir machen Sie darauf aufmerksam, daß diese Meßbeschreibung – abweichend von den weiteren –für die Interessenten auch zusätzliche Informationen enthält. Diese Informationen sind – *in ungarischer Sprache*, mit kleineren Buchstaben gedruckt und eingerahmt – an den entsprechenden Stellen zu finden.
Wir wünschen Ihnen viel Spaß und Erfolg für die erste Meßübung.

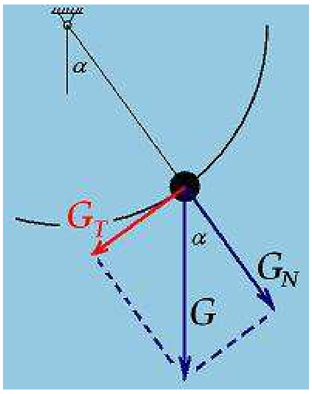
2. Ziel der Messung

Die Formel, der Schwingungszeit eines mathematischen Pendels wird anhand von Messungen aufgestellt.

Ein mathematisches Pendel besteht aus einer punktförmigen Masse $\boldsymbol{m}$, die am Ende eines Fadens der Länge $\boldsymbol{L}$ hängt. In der Praxis wird unter der **Länge** $\boldsymbol{L}$ der Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Masse und dem Befestigungspunkt des Fadens verstanden. Im Labor finden sie zylindrische Gewichte deren Schwerpunkt mit guter Annäherung auf der Achse in der Mitte der Zylinderlänge liegt. Diese Stelle haben wir mit einer ringförmigen Rille markiert.
Die Periodenzeit der Schwingung des Pendels ist das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen. Da die Geschwindigkeit des Massenpunktes im Augenblick des weitesten Ausschlages Null ist, kann es sehr genau erfaßt werden.

3. Vorbereitung zur Messung

Messungen brauchen viel Zeit und kosten viel Geld sowohl im Laboratorium, als auch in der Industriepraxis. Ein Prüfstand muß im Laboratorium aufgebaut werden (Zeit und Geld), die erforderlichen Meßgeräte müssen besorgt werden (Geld), die Messung muß durchgeführt werden (Zeit) und die Ergebnisse müssen ausgewertet werden (Zeit). Es ist also wichtig, daß die Messung im Voraus geplant wird, die wesentlichen und weniger wichtigen Meßgrößen von einander unterscheidet werden, weil dadurch viel Energie erspart werden kann. Bevor wir also zu messen anfangen, sollen wir unsere Kenntnisse erfrischen.



Die Schwingung des Pendels wird durch die Newtonschen Axiomen beschrieben. Betrachten wir die Bezeichnungen der Abbildung! Die den Körper beschleunigende Tangentialkraft G_T kann aus dem Gewicht der schwingenden Masse, als $G_T = G \cdot \sin(\alpha)$ berechnet werden, wobei $G = m \cdot g$. Das zweite Axiom von Newton behauptet, daß die Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, $m \cdot a_T = G_T$, d.h.

$$m \cdot a_T = m \cdot g \cdot \sin(\alpha).$$

Da mit der Masse gekürzt werden kann, folgt, daß **die Schwingungszeit durch die Masse nicht beeinflußt wird**. Das ist für unsere Messung eine grundlegende Behauptung, da es so genügt, die Messung nur mit einer Masse durchzuführen. Wenn wir trotzdem die Messung, um uns zu kontrollieren, mit verschiedenen Massen durchführen, wissen wir von vornherein, was zu erwarten ist.

Es ist eindrucksvoll durchzudenken, wieviel Zeit wir bräuchten, dieses Ergebnis aus Meßserien abzuleiten.

Aus den früheren Studien ist bekannt, daß in der Formel (1) der Periodenzeit $\boldsymbol{T_o}$ des mathematischen Pendels, die Erdbeschleunigung $\boldsymbol{g}$, die Zahl $\boldsymbol{\pi}$ und die Länge $\boldsymbol{L}$ des Pendels auftritt:

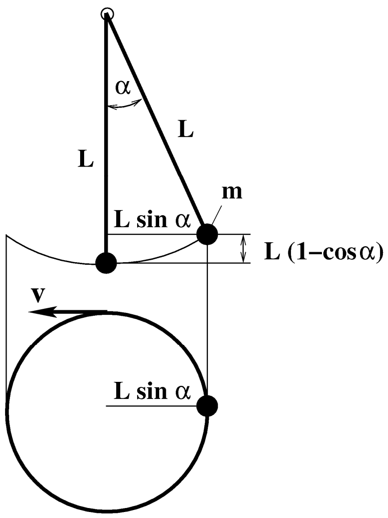
$$T_o = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}\,. \qquad (1)$$

Die entsprechenden Meßeinheiten sind T_o [s], L [m], g [m/s^2]. Eine unserer Aufgaben während der Messung ist das Aufstellen dieser Formel anhand von Messungen.

Die Formel (1) zeigt für den Zusammenhang zwischen T_o und L eine Potentialfunktion, da es folgenderweise umgeschrieben werden kann:

$$T_o = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{L} = A \cdot L^b\,. \qquad (2)$$

$\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ sind dimensionsbehaftete Größen. Unsere Aufgabe ist nun die Werte und die Meßeinheiten von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ zu bestimmen. Vorher muß aber die Messung durchgeführt werden.



A ***matematikai inga*** *egy* súlytalan és nyúlhatatlan, ***L*** hosszúságú fonálon lengő ***m*** tömegű tömegpont. A légellenállást és a felfüggesztésnél ébredő súrlódást elhanyagoljuk. A kitérés szöge „kicsi” (lásd később).

Az alábbiakban a matematikai inga lengésidejének egy lehetséges levezetését ismertetjük. Az ***energia-megmaradás törvénye*** értelmében az inga helyzeti és mozgási energiájának összege (veszteségmentes esetben) állandó.
Teljesen kitérített helyzetben csak $E_h = mgL(1-\cos\alpha)$ helyzeti energiája, legalsó helyzetében pedig csak $E_m = mv^2/2$ mozgási energiája van. A kettő megegyezik, melyből a tömeggel való egyszerűsítés és átrendezés után adódik:

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}\ .$$

Tapasztalati tény, hogy az inga árnyéka együtt mozog egy $L\sin\alpha$ sugarú, függőleges körpályán állandó v sebességgel mozgó pont árnyékával (ld. ábra). A forgómozgás szögsebessége tehát

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}{\sqrt{L^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}\frac{g}{L}}\ .$$

A teljes kör körbefutásának periódusideje és a fentiek értelmében az inga lengésideje:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}}\ .$$

Az $\alpha = 2\beta$ helyettesítést bevezetve és az $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ és $\cos\alpha = \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ***trigonometriai azonosságok***at egymásból kivonva kapjuk, hogy $1-\cos\alpha = 2\sin^2\beta$, mellyel $\underline{2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\beta}$.

Szintén ismert azonosság, hogy $\sin\alpha = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, amiből kapjuk, hogy $\underline{\sin^2\alpha = 4\sin^2\beta\cos^2\beta}$.

Mindezeket beírva a lengésidő képletébe, adódik, hogy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{4\sin^2\beta\cos^2\beta}{4\sin^2\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\cos^2\beta} \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

A közelítés abban az esetben jó, ha $\cos\beta \approx 1$, azaz β és ebből következően α ***kicsi***. ($\alpha = 10^\circ$ -nál kisebb szögek esetén a hiba 1,5 % -nál kisebb.)

A ***fizikai ingá***ról kiterjedéssel bíró, merev test egy adott, nem a test súlypontján átmenő forgástengely körüli lengésekor beszélhetünk. A szögkitérés itt is kicsi és a veszteségeket itt is elhanyagoljuk. Fizikai inga pl. egy motor forgórészéből és hozzákapcsolt póttömegből álló rendszer, vagy „krumpli kötőtűvel átszúrva”.

4. Die durchzuführenden Meßtätigkeiten

4.a Messung der Periodenzeiten der Schwingungen von Pendeln mit gleicher Masse, aber unterschiedlichen Schnurlängen.
4.b Messung der Periodenzeiten der Schwingungen von Pendeln mit unterschiedlichen Massen, aber gleicher Schnurlänge.

Der Laborübungleiter zeigt das Pendelgestell, worauf die Fäden mit unterschiedlichen Längen angebunden werden. An den beiden Enden des Fadens befinden sich kleine Haken und Zapfen, die freie Verdrehung ermöglichen, womit die Fäden zum Gestell und zu den Massen befestigt werden können. Der Faden ist geflochtene Angelschnur, wodurch sie sich nur ganz gering ausdehnt, dabei ist sie sehr dünn und sehr leicht. Nachdem die Schnur zum Gestell und die Masse zur Schnur gebunden ist, kann die Messung gestartet werden. Die Studenten Messen die **Gesamtzeit von mindestens 20 vollen Schwingungen** mit einer Stoppuhr, der Faden darf um höchstens 5° von der vertikalen Lage ausgeschwungen werden. Das Zusammenzählen der Schwingungen fängt mit 0 an, wenn die Masse losgelassen wird. Als die Masse wieder ganz ausschlägt, wird die Zahl 1 usw. gezählt – immer um 1 mehr (etwa so: Null, Eins, Zwo, Drei, Vier, Fünf,...,n). Es ist wichtig, daß die Stoppuhr synchronisiert zum Zählen gestartet und gestoppt wird. Das erklärt, daß die selbe Person die (insgesamt n) Schwingungen zusammenzählen und die Gesamtzeit ($n \cdot T_0$) messen soll. Wenn ein Paar mißt, sollen sie zwei Messungen durchführen, einmal der erste, dann der zweite, jedoch mit einer anderen Zahl der Schwingungen (z.B. n = 25 anstatt von n = 20).
Die Meßdaten (L, m, n, $n \cdot T_0$) werden in die folgende Tabelle eingetragen:

	Gemessene Daten				Berechnete Daten		
Nummer	L	m	n	$n \cdot T_0$	T_0	$\log L$	$\log T_0$
[-]	[m]	[g]	[-]	[s]	[s]	[-]	[-]
1							
2							

Die letzten vier Spalten der Tabelle werden gemeinsam mit Hilfe des Übungleiters während der Meßübung ausgefüllt. Die gemessenen Daten sollen laut diktiert werden, damit der Laborübungleiter erkennt, ob eventuell Daten fehlen.

5. Die Auswertung der Meßergebnisse

5.a) Bestimmung der Zahlenwerte der gesuchten Konstanten

Wie in der Einführung gezeigt wurde, ist der gesuchte Zusammenhang eine Potentialfunktion, deren zwei Konstante (A und b) bestimmt werden müssen. Dazu stehen an fünf Pendeln durchgeführte 10 Messungen zur Verfügung. Nach Anwendung der Logarithmusfunktion an der Formel (2) erhält man die Gleichung einer Gerade:

$$\log T_o = \log A + b \cdot \log L \,. \qquad (3a)$$

Man erkennt, daß sich die Gleichung (3a) nach Einführung der neuen Veränderlichen $x = \log L$, $y = \log T_o$ sowie der Bezeichnung $a = \log A$ in folgende Form umgeschrieben werden kann:

$$y = a + b \cdot x \tag{3b}$$

Das ist die Gleichung einer Gerade im Koordinatensystem $x - y$. Die fehlenden Koeffizienten (Schnittpunkt der Ordinate, a und Neigung der Gerade, b) können nach Darstellung der Gerade graphisch leicht bestimmt werden. Da ein linearer Zusammenhang nur zwischen den Logarithmusgrößen ($x = \log L$, $y = \log T_o$) existiert, müssen diese Werte in den letzten Spalten der Tabelle berechnet und in einem für die Ganze Meßgruppe gemeinsamen Diagramm dargestellt werden.

A gyakorlatok során a diagramokat **A4-es méretű mm-papírra** kérjük elkészíteni **ceruzával**, esetlegesen **színeket alkalmazva** a különböző mennyiségek megkülönböztetéséhez.

A diagram legfontosabb részei a **tengelyek, megfelelő skálaosztással** és a skálaértékek növekedését jelölő **nyíl**lal, a **skálafeliratok**, a tengelyen szereplő **mennyiségek jelölése**, a tengelyen szereplő mennyiségek **mértékegységének jelölése**.

A diagramok skálaosztása akkor megfelelő, ha a tengelyen egy pont koordinátái könnyen leolvashatóak. Ezért az 1 egységet nem célszerű (sőt, tilos) három, hat, hét vagy kilenc részre osztani. Kerülendő az 1 egység négy, vagy nyolc részre osztása. **Gyakorlatban használható A4-esgrafikonon 1 egység csak 1, vagy 2, vagy 5 cm lehet**.
A diagramon szereplő adatpontokat célszerűen két egyenes metszéspontjaként kell kijelölni (+ jellel). Nem megfelelő jelölő az, amelynek nincs egyértelműen azonosítható jellegzetes pontja (pl.: O jelnek nincs kitüntetett pontja). Gondoljuk meg, hogy a pont koordináták a tengelyektől vett távolságot jelentik. Egy egyenestől (tengelytől) adott távolságra egy vele párhuzamos egyenes helyezkedik el. Egy pontot a diagramban két ilyen egyenes metszéspontja egyértelműen jelöl.

Im Diagramm läßt sich erkennen, wie die transformierten Meßpunkte liegen. Wenn die Messung sorgfältig durchgeführt wurde, liegen die Punkte nahe zu einer Gerade. Mit Hilfe eines Lineals kann eine Gerade an die Punkte derart gelegt werden, daß etwa die gleiche Anzahl von Punkten auf beiden Seiten der Gerade liegen und der Abstand zwischen dem Punkt und der Gerade weder zu klein, noch zu groß wird (die Gerade soll zwischen den Punkten laufen). Der Ordinatenschnitt a der Gerade läßt sich gleich ablesen. Zur Bestimmung der Neigung b müssen jedoch zwei möglichst weit von einander liegende Punkte ausgesucht werden. B kann daraus berechnet werden:

$$B = b \cong \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Der Wert von a wurde abgelesen, somit kann A durch die Logarithmus Umkehrfunktion berechnet werden

$$A = 10^a.$$

Természetesen a fenti grafikus illesztési módszer mellett többféle eljárással is illeszthetjük a mért pontokra az egyenesünket. Egyik, gyakran elterjedt módszer az ún. „**legkisebb négyzetek módszere**”. A módszer lényege, hogy a mért pontoknak az illesztendő egyenestől vett „y” irányú távolságait négyzetre emeljük, a kapott értékeket összeadjuk és az összeg minimalizálásával határozzuk meg az egyenes együtthatóit.

Hasonlóan alkalmazható módszer az ún. **Wald-módszer**, amely a mért adatpontokból képzett ponthalmazok súlypontjait használja fel az illesztendő egyenes együtthatóinak meghatározására.

A fenti hatványfüggvényen kívül megfelelő koordináta-transzformációval sok függvény **linearizálható**. Például a fenti módszer alkalmazásával egyenesre rendezhetőek az exponenciális függvény ($y=A\cdot e^{Bx}$), vagy a logaritmikus függvény ($y=A+B\cdot\log(x)$) pontjai.

5.b) Meßeinheit der Koeffizienten und der physikalischen Parametern

Man nehme an, daß die Messung genau ist und für *b* den Wert ***b* = ½** ergab. Die Meßeinheit von *b* muß 1 sein, *b* ist also dimensionslos. Wie ist es mit ***A***? Welche Größen sind im *A* enthalten? Unsere Gleichung war $T_o = A \cdot \sqrt{L}$, daraus kann *A* ausgedrückt werden und die linke und rechte Seite muß die gleiche Dimension haben:

$$[A] = \frac{[T_o]}{[\sqrt{L}]} = \frac{s}{\sqrt{m}} .$$

Es ist nicht schwer zu erkennen, daß zwischen *A* und $\sqrt{g}$ folgende Proportionalität existiert:

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{g}} .$$

Der bekannte Propotionalitätfaktor ist 2π, die Definition von A ist die folgende:

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Benutzen wir diesen *A* Faktor, schätzen wir die Erdbeschleunigung *g*, und vergleichen wir mit dem bekannten Wert von *g*:

$$g = \left(\frac{2\pi}{A}\right)^2$$

(Natürlich ist der berechnete Wert von *g* nur ungefähr *g*=9,81 m/s^2 wegen der Unrichtigkeit der Messung und dem Fehler vom graphischen Verband.)

Sok esetben segít a fenti módszeren alapuló, ún. „**dimenzióanalízis**” egy-egy jelenség vizsgálatában, ha tudjuk, milyen jellemzők fogják befolyásolni a vizsgált folyamatunkat. A módszernek fontos szerepe van akkor, ha a jelenséget leíró összefüggést mérési adatokból kívánjuk meghatározni, vagy éppen a jelenséget vizsgáló kísérletet tervezünk. A fent leírt eljárás elnagyoltan tartalmazza a módszer lényegét, későbbi tanulmányaik során minden bizonnyal találkozni fognak a használat feltételeivel és magával a pontos módszer leírásával is.

Ajánlott irodalom:
Szűcs Ervin: A hasonlóságelmélet alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967.
Szűcs Ervin: Hasonlóság és modell, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 19??.

6. Bewertung der Ergebnisse

6.1 Anhand der Daten in der Tabelle kann festgestellt werden, daß bei gleicher Fadenlänge aber bei unterschiedlichen Massen die Schwingungszeit etwa gleich groß ist, die Abweichungen sind nur Folgen von Meßfehlern.
6.2 In der Formel (1) für die Schwingungszeit $\boldsymbol{T_o}$ treten die Erdbeschleunigung ***g***, die Konstante ***π*** und die Fadenlänge ***L*** auf.

$$T_o = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} ,$$

wie wir es in der Mittelschule gelernt haben. Die Meßeinheiten sind T_o[s], *L*[m] und *g*[m/s^2].
6.3 Wir haben eine ingenieurtechnische Methode kennengelernt, was auch in anderen Fällen bei anderen physikalischen Prozessen angewendet werden kann.