Messung 1.
MESSUNG DER DREHZAHL UND DES TRÄGHEITSMOMENTES

1. Einleitung

Ziel der Messung: Das Trägheitsmoment des Rotors eines Elektromotors und das daraus resultierende – die Motorwelle bremsende – drehzahlabhängige Reibmoment sind zu bestimmen. Die erfolgreiche Durchführung dieser Aufgabe benötigt die Aneignung von Messmethoden einiger Grundgrößen (Drehzahl, Trägheitsmoment, Bewegungsdiagramm).

Die Methode der Messung ist folgendes. Mit dem, im dritten Kapitel beschriebenen Experiment wird das Trägheitsmoment des Rotors bestimmt. Die Messung des Trägheitsmomentes wird auf die Messung der Schwingungszeit eines physikalischen Pendels zurückgeführt. Der Rotor und die daran befestigte Zusatzmasse bilden ein physikalisches Pendel. Das Trägheitsmoment des Rotors läßt sich aus der Schwingungszeit des physikalischen Pendels ausrechnen.
Darauf folgt die Messung der Drehzahl des auslaufenden (durch Lager- und Luftreibung gebremsten) Rotors über der Zeit, woraus die Winkelverzögerung berechnet werden kann. Aus diesen Größen (Trägheitsmoment, Winkelverzögerung) wird durch Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes das gesuchte Bremsmoment bestimmt.

2. Messung der Drehzahl

2.1 Die Drehzahl ist die Anzahl der Umdrehungen einer Welle während der Zeiteinheit. Sie wird am häufigsten mit ***n*** bezeichnet, ihre Meßeinheit ist [1/s] oder [1/min]. Zwischen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und Drehzahl ***n*** gilt die Beziehung

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right].$$

Aus dem Gesichtspunkt des Meßprinzips können die Drehzahlmeßgeräte in zwei Gruppen eingeteilt werden:

- **Drehzahlzähler**: sie messen die Durchschnittsdrehzahl,
- **Tachometer**: sie messen momentane Drehzahl. .

2.2 Drehzahlzähler

a.) Die Messung von geringen (bis zu 120-150 1/min) Drehzahlen kann mit einer **Stoppuhr** und mit dem **Abzählen der Umdrehungen** erfolgen. Je mehr Umdrehungen abgezählt werden, desto genauer ist die Messung, da die relative Ungenauigkeit, was die Reaktionszeit verursacht, kleiner wird.

$$n = \frac{N}{t} \qquad \left[\frac{1}{\text{s}}, \frac{1}{\text{min}} \right],$$

Hier bezeichnet N die Zahl der Umdrehungen, t die Zeit. Wenn die Winkelgeschwindigkeit schwankt, gibt die obige Formel die Durchschnittsdrehzahl an.

b.) Bei größeren Drehzahlen ist ein häufig angewendetes Gerät der **Drehzahlzähler mit Zählerwerk**, bei dem die angezeigte Zahl immer um eins erhöht wird. Solche Geräte sind in die Kilometeruhren von PKW-s, Strommessuhren, usw. Eingebaut. Dieses Zählerwerk besteht aus einer Reihe von Zahnrädern. Die Welle treibt das erste Zahnrad an, wenn es sich einmal völlig umdreht, wird das nächste Zahnrad um ein Zehntel verdreht. Bei dessen voller Umdrehung verdreht sich das dritte Rad um ein Zehntel, usw. Die Anzeige ist die Mantelfläche der Räder mit den Zahlen von 0 bis 9. Man liest die Räder nebeneinander als einen digitalen Zahlenwert ab. Die Zählerwerke können meistens auf den Wert Null gestellt werden. Wenn die Zeit auch, z.B. mit einer Stoppuhr gemessen wurde, kann die Durchschnittsdrehzahl berechnet werden.

c.) **Tachoskop**e bestehen aus einem Zählerwerk und einer Stoppuhr zusammengebaut in ein einziges Gerät (siehe die **Abb. 1 links**). Die Gerätewelle kann mittels eines Gummikegels an die zu messende Maschinenwelle gekoppelt werden, wenn letztere eine konische Bohrung enthält. Beide Anzeigen werden vor der Messung zu Null gesetzt, danach wird das Gerät leicht an die rotierende Maschinenwelle angepreßt und mit dem Drücken an die Starttaste werden beide Werke (Zähler- und Uhrwerk) **gleichzeitig** gestartet. Nach etwa 20-30 Sekunden wird das Gerät mit derselben Taste gestoppt und die Drehzahl wird aus den Werten der Umdrehungen und der Zeit ausgerechnet.

d.) Der **Umdrehungszähler mit Uhrwerk** mißt während einer bestimmten Zeit (z.B. 6 Sekunden) die Anzahl der Umdrehungen. Mit dem Drücken des Knopfes auf dem Gerät wird ein Uhrwerk gestartet, der Zeiger bewegt sich während der 6 Sekunden. Nach Ablauf der Meßzeit hält der Zeiger. Die Durchschnittdrehzahl wird auf der Skale in Umdrehungen pro Minute abgelesen. Eine Ausführung dieses Gerätetyps, der **Jacquet Indikator** ist in **Abb. 1 rechts** zu sehen.

Abb. 1: Tachoskop und Jacquet Indikator

e.) **Der elektronische Umdrehungszähler** besteht aus einem Signalgeber, der während einer Umdrehung einen oder mehrere Spannungsimpulse gibt und einem Impulszähler der unter elektronischem Prinzip arbeitet. Der Signalgeber ist im Allgemeinen eine Photozelle die sich hinter einer Schlitzscheibe befindet, während einer Umdrehung einen oder mehrere Lichtimpulse erhält und dadurch einen Stromkreis schließt (**Abb. 2**).

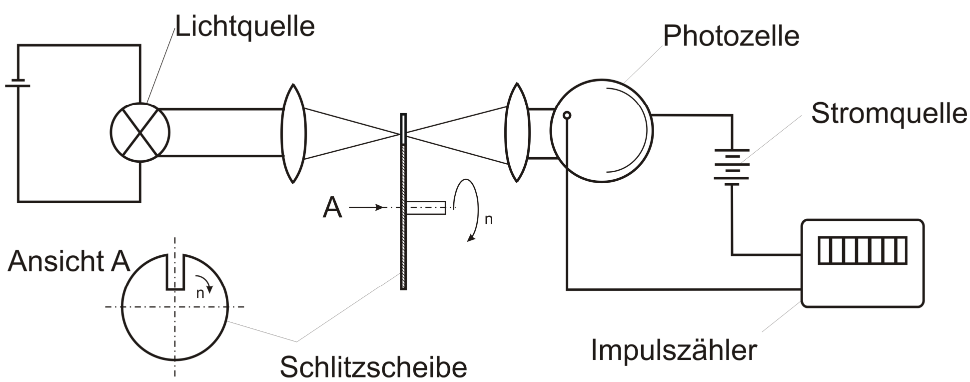

Abb. 2: der elektronische Umdrehungszähler

f.) **Elektronische Stroboskope** beleuchten die rotierenden Teile von Maschinen durch eine mit der Hand einstellbarer frequenzgeregelter Lichtquelle. Wenn die Frequenz des Lichtes mit der Rotationsfrequenz der Maschine übereinstimmt, sieht man keine Rotation, die Maschinen scheinen zu stehen. Die Frequenz der Lichtquelle, d.h. die Drehzahl der Maschine kann an der Digitalanzeige des Stroboskops abgelesen werden. (**Abb. 3**)

Abb. 3: Stroboskop

2.3 Tachometer

Der am häufigsten verwendete Tachometertyp ist das Tachometer Dynamo, ein Generator, der eine mit der Drehzahl proportionale Spannung erzeugt. In Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Spannung und Drehzahl (bestimmt durch Kalibrierung) kann die Drehzahl aus der gemessenen Spannung berechnet werden.

3. Messung des Trägheitsmomentes

3.1 Das Trägheitsmoment

Das zweite Newtonsche Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen Drehmoment M, Winkelbeschleunigung ε und Trägheitsmoment Θ an.

$$M = \Theta \cdot \varepsilon$$

Das Trägheitsmoment von regelmäßigen Körpern kann mit analytischen Formeln berechnet werden. Das Trägheitsmoment des auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegenden Massenpunktes m ist

$$\Theta = m \cdot r^2.$$

Das Trägheitsmoment eines massiven Kreiszylinders, bezogen auf seine Symmetrieachse ist:

$$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2,$$

wobei hier r den halben Durchmesser, m die Masse des Zylinders bezeichnen.

3.2 Bestimmung des Trägheitsmomentes eines beliebigen Körpers

Ein beliebiger, unregelmäßiger Körper soll in Teile mit Massen Δm_i , die sich auf dem Radius r_i liegen, zerlegt werden. Das Trägheitsmoment eines dieser Teile ist

$$\Delta\Theta_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 .$$

Das Trägheitsmoment des gesamten Körpers ist die Summe dieser Glieder

$$\Theta = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 .$$

Wir führen den Begriff der **reduzierten Masse** ein: Das Trägheitsmoment des Körpers wird mit einer, an dem maximalen Radius des Körpers r_m liegenden reduzierten Masse m_r ausgedrückt:

$$\Theta = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = m_r \cdot r_m^2 .$$

Der Zusammenhang zwischen reduzierten und tatsächlichen Masse ist:

$$m_r = \lambda \cdot m.$$

Der Wert des Beiwertes λ hängt von der Form und der Bezugsachse des Körpers ab. Sein Wert für einen massiven Kreiszylinder (Scheibe, Stab), bezogen auf die Symmetrieachse ist $\lambda = ½$, für einen Ring oder einen Zylindermantel ist $\lambda \approx 1$.

3.3 Gesamt-Trägheitsmoment des Rotors des Motors mit befestigter Zusatzmasse

Um unsere Messung auszuwerten benötigen wir das Trägheitsmoment des Körpers, der aus dem Rotor und der daran exzentrisch befestigten Zusatzmasse besteht. (**Abb. 4**) Das Trägheitsmoment der zylindrischen Zusatzmasse m_Z, bezogen auf die eigene Symmetrieachse ist ½ $m_Z \cdot r^2$, bezogen auf eine parallele Achse in einem Abstand e ist es $½ m_Z \cdot r^2 + m_Z \cdot e^2$ (Der Satz von Steiner wird in der Vorlesung Technische Mechanik erläutert.). Das Trägheitsmoment des Rotors des Motors ist Θ, so beträgt das resultierende Trägheitsmoment

$$\Theta_A = \Theta + \frac{1}{2} m_Z \cdot r^2 + m_Z \cdot e^2 .$$

3.4 Schwingungszeit des physikalischen Pendels und die Bestimmung des Trägheitsmomentes mit Schwingungszeitmessung

Ausgehend aus der bekannten Formel der Schwingungszeit des mathematischen Pendels (Meßübung 0) kann die Schwingungszeit des physikalischen Pendels abgeleitet werden. Die Schwingungszeit des mathematischen Pendels (**Abb. 4. links**) mit Länge l^* (und Masse m^*) beträgt

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l^*}{g}} .$$

Man ändere die Länge l^* des mathematischen Pendels solange, bis die Schwingungszeiten des mathematischen und des physikalischen Pendels gleich werden. Die Masse des aus Rotor und Zusatzmasse bestehenden physikalischen Pendels beträgt $m_F + m$, der gemeinsame Schwerpunkt **S** liegt in einem Abstand s von der Drehachse (**Abb. 4 rechts**), das Trägheitsmoment beträgt Θ_A, der Winkelausschlag beträgt φ. Die Winkelbeschleunigung ε_{phys} ist mit Anwendung des Newtonschen Gesetzes

$$\varepsilon_{phys} = -\frac{(m_F + m_Z) \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi}{\Theta_A} .$$

(Das negative Vorzeichen berücksichtigt die Tatsache, daß die Drehrichtung des Drehmomentes dem Ausschlag entgegengesetzt ist.) Die Winkelbeschleunigung ε_{math} des mathematischen Pendels das mit dem physikalischen zusammen schwingt, beträgt

$$\varepsilon_{math} = -\frac{M}{\Theta} = -\frac{m^* g l^* \sin\varphi}{m^* l^{*2}} = -g \frac{\sin\varphi}{l^*} .$$

Durch Gleichsetzen beider Beschleunigungswerte erhält man die **reduzierte Länge** des mathematischen Pendels welches mit dem physikalischen gemeinsam schwingt.

$$\frac{(m_F + m_Z) g \cdot s \cdot \sin\varphi}{\Theta_A} = \frac{g \cdot \sin\varphi}{l^*} .$$

Daraus folgt für die reduzierte Länge

$$l^* = \frac{\Theta_A}{(m_F + m_Z) s} .$$

Die Schwingungszeit des physikalischen Pendels beträgt demzufolge

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l^*}{g}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{\Theta_A}{(m_F + m_Z) g \cdot s}} \, .$$

Der Schwerpunkt S des physikalischen Pendels liegt in einem Abstand s von der Drehachse. Das auf die Achse bezogene Momentengleichgewicht heißt:

$$s \cdot g \cdot (m_F + m_Z) = e \cdot g \cdot m_Z \, ,$$

daraus läßt sich die Beziehung schreiben:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_A}{m_Z \cdot g \cdot e}} \longrightarrow \Theta_A = m_Z \cdot g \cdot e \cdot \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \qquad (1)$$

In der Formel bezeichnet Θ_A das Trägheitsmoment der schwingenden Masse $m_F + m_Z$ bezogen auf die Drehachse A des Rotors. Das setzt sich einerseits aus dem zunächst noch unbekannten Trägheitsmoment Θ des Rotors, andererseits aus dem schon oben angegebenen Trägheitsmoment der Zusatzmasse zusammen:

$$\Theta_A = \Theta + \frac{1}{2} m_Z \cdot r^2 + m_Z \cdot e^2 \longrightarrow \Theta = \Theta_A - \frac{1}{2} m_Z \cdot r^2 - m_Z \cdot e^2 \qquad (2)$$

So kann Θ aus der Schwingungszeit T berechnet werden (Θ_A aus Gl. (1) mit der gemessenen Zeit T , danach aus Gl. (2) auch Θ selbst).

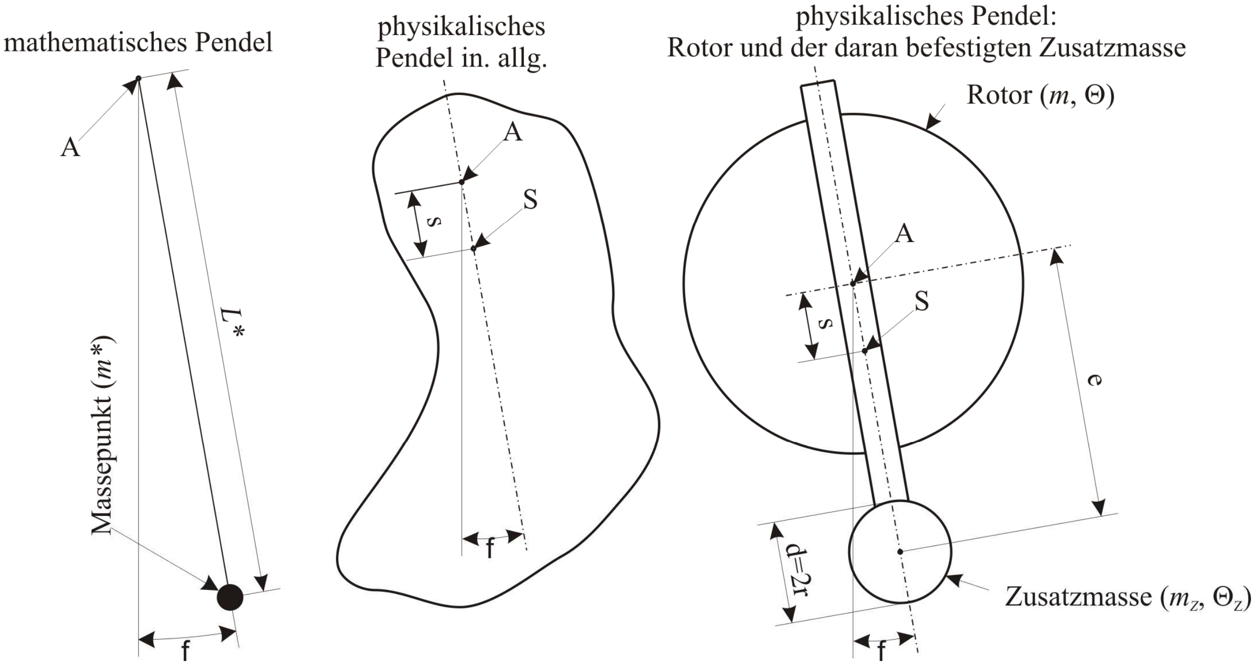

Abb. 4

4. Bewegungsdiagramm

Um ein Maschinenelement auf der Motorwelle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in Rotation zu halten, muß der Antriebsmotor mit allen, auf das rotierende Maschinenelement wirkenden Momenten das Gleichgewicht halten. Diese Momente stammen entweder aus der Belastung, aus der Reibung der Lager, oder aus dem Luftwiderstand an der Oberfläche des Rotors. Es ist für den Ingenieur wichtig, das Bremsmoment, welches zu einer bestimmten Drehzahl gehört, zu kennen.

Wird der Motor abgeschaltet, so wird das untersuchte Maschinenelement als Folge der Last, der Reibung und des Luftwiderstandes abgebremst und schließlich zum Stillstand kommen. Wird der Momentanwert der Drehzahl *n*, die zur Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ proportional ist, während der Verzögerung des Rotors mit einem Meßgerät in Abhängigkeit der Zeit gemessen und in einem Diagramm aufgetragen, erhält man das **Bewegungsdiagramm** $n = n(t)$.
Das Bewegungsdiagramm zeigt also die Drehzahl des Maschinenelements über die Zeit. Ein solches Bewegungsdiagramm wird in **Abb. 5** dargestellt.
Wie aus dem Diagramm zu entnehmen ist, kommt das Maschinenelement zum Zeitpunkt t_0 nach Abschalten des Motors zum Stillstand.

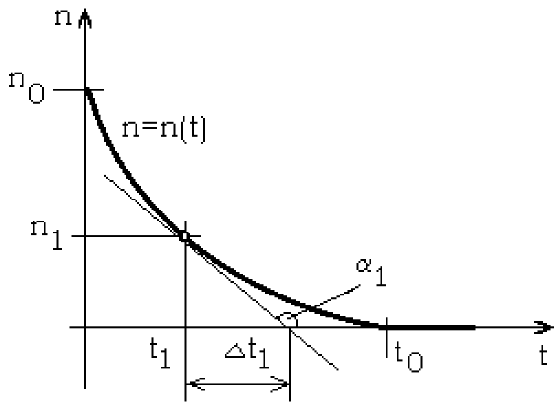

Abb. 5: Bewegungsdiagramm

Wird zu der Kurve $n = n(t)$, z.B. im Zeitpunkt t_1 eine Tangente eingezeichnet, so gibt die Neigung der Tangente in diesem Punkt den Wert der Winkelverzögerung zu der Zeit t_1 an:

$$\tan\alpha_1 = -\frac{n_1}{\Delta t_1} = -\frac{2\cdot\pi\cdot n_1}{2\cdot\pi\cdot\Delta t_1} = -\frac{\omega_1}{2\cdot\pi\cdot\Delta t_1} = -\frac{\varepsilon_1}{2\cdot\pi}. \qquad (3)$$

Das negative Vorzeichen deutet auf die Verzögerung hin. Es ergibt sich:

$$\varepsilon_1 = -2\cdot\pi\cdot\tan\alpha_1 .$$

Wenn man den Wert $\tan\alpha_1$ (der gemäß Gl. (3) zur Winkelverzögerung proportional ist) in einem Punkt des Bewegungsdiagramms kennt, läßt sich das auf das rotierende Maschinenelement wirkende Reibmoment mit dem Newtonschen Gesetz bestimmen:

$$M_{R1} = \Theta\cdot\varepsilon_1 .$$

5. Die Meßübung

Wie es schon in der Einleitung erwähnt wurde, ist das Ziel dieser Messung das Reibmoment, das die Motorwelle bremst in Abhängigkeit der Zeit zu bestimmen.

5.1 Die Messung des Trägheitsmomentes

Im ersten Schritt soll das Trägheitsmoment des Rotors (Θ) bestimmt werden. Bei der Messung des Trägheitsmoments werden wir in dreihaltige Gruppen arbeiten. Die Gruppen müssen die Schwingungszeit messen, und die Masse, Radius und Abstand bestimmen. Jede Gruppen werden das Trägheitsmoment (Θ) berechnen, und wir werden von diesem einen Durchschnitt Theta (Θ_D) gesellschaftlich zahlen.
Die Meßanlage ist in **Abb. 6** dargestellt.

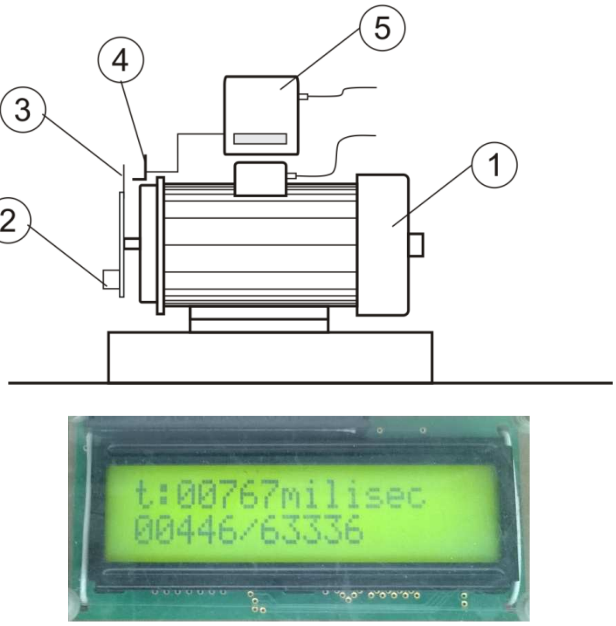

Abb. 6: Messung des Trägheitsmomentes
(Oben: die Teilen:1: Elektromotor; 2: Zusatzmasse; 3: Platte; 4: magnetischer Signalgeber; 5: Schwingungszeit-Messer Unten: Anzeiger von Schwingungszeit-Messer)

Man sieht die auf der Motorwelle befestigte Zusatzmasse m_Z (in der Abbildung mit (2) bezeichnet, vgl. auch Abb. 4). Das so aufgebaute physikalische Pendel wird bis zur Markierung (5° Auswanderung) auf der Platte (3) ausgeschlagen. Der Magnet fahrt dem magnetischen Signalgeber vorbei, der gibt einen Signal (einmal in jeder Schwingung) beobachten die Richtung den Vorbeifahrten auch. Die Schwingungszeit des Pendels kann direkt gemessen, und die Periodenzeit kann man von den Anzeiger ablesen. Aus der Schwingungszeit T berechnet sich das Trägheitsmoment.

5.2 Messungen im Bewegungsdiagramm

Das Verzögerungsgraphikon eines anderen Motors (vom selben Typ und Ausführung) wird mittels eines Rechners aufgetragen (vgl. Kapitel 4). Dieses Diagramm gibt die Drehzahl in Abhängigkeit der Zeit an (der Auslauf dauert etwa 35 Sekunden lang).
Die sich ändernde Neigung der Kurve gibt die Winkelverzögerung ε an. Aus dem vorher berechneten Trägheitsmoment Θ läßt sich das Bremsmoment berechnen. Die verschiedenen Momentwerte, die zu verschiedenen momentanen Drehzahlen gehören, werden in einem gemeinsamen Diagramm aufgetragen.

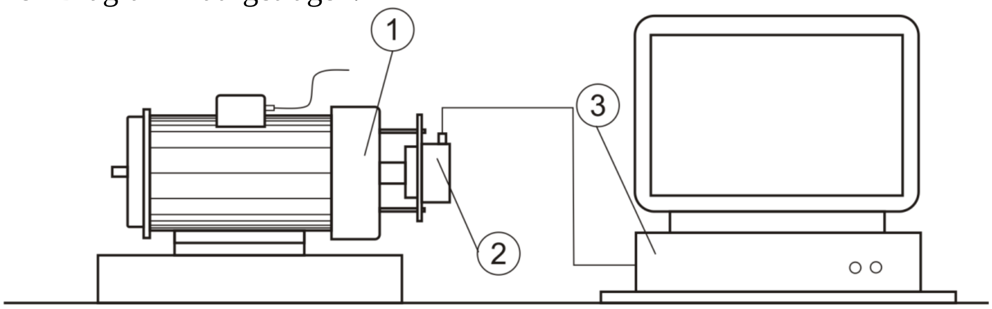

Abb. 7: Messeinrichtung für Bewegungsdiagram
(Die Teilen: 1: Elektromotor, 2: Signalgeber, gibt eine mit der Drehzahl proportionale Spannung, 3: Rechner)

Die Meßeinrichtung ist in **Abb. 7** dargestellt. An der Welle des Elektromotors ① ist das Tachometerdynamo ② montiert, dessen Signal mit dem Rechner ③ bearbeitet wird. Die wesentlichen Schritte der Bearbeitung sind: Digitalisierung des Analogsignals, Filterung und Auftragung auf dem Bildschirm (über der Zeit).
Der mit konstanter Drehzahl laufende Motor wird abgeschaltet. Man wartet bis zum Stillstand der Welle. Danach erscheint auf dem Bildschirm das Bewegungsdiagramm $n = n(t)$. Aus der Tabelle neben dem Bewegungsdiagramm werden die Daten einiger charakteristischen Punkte des Diagramms notiert.

5.3 Berechnungen

Jeder Student bekommt einen Satz von zusammengehörenden Parameter (t, ε und ω) für Punkte des Bewegungsdiagramms bei verschiedenen ω Werten. Aus diesen Daten kann das Bremsmoment bei der gegebenen Drehzahl berechnet werden.
Nach Abschluß der Berechnungen werden die zusammengehörenden n und M_R Zahlenpaare einander diktiert und jeder Student trägt das Graphikon der Funktion $M_R(n)$ in einem Diagramm auf.

Nr.	t [s]	n [1/Min]	ε [1/s^2]	M_R [Nm]
1.				
2.				
…				

VORBEREITUNG AUF DER MESSUNG

- Bitte mitnehmen 1 Stück Millimeterpapier, Bleistift, Lineal, und Rechenmaschine auf der Messung!
- Füllen Sie das Bianco-Protokoll bis dem 4. Punkt aus! (Die weiteren Punkte werden wir in der Messung ausfüllen.)
- Die Studenten schreiben eine kurze (5-10 Minuten lange) Klausurarbeit vor der Messung. Die Probeaufgaben und die theoretische Fragen sind im Internet (www.hds.bme.hu).

Das Bemerken warten wir auf der folgenden Adresse: csizmadia@hds.bme.hu