Hidrodinamikai
Rendszerek
Tanszék

# Statisztikai hipotézisek vizsgálata

Tipikus kérdések:

- Sorozatgyártású alkatrész átmérője $\xi$. Kérdés, hogy a gyártott darabok átmérője a megkívánt $\boldsymbol{a_0}$ érték körül ingadozik-e?
- Valamely mérés vagy megfigyelés-sorozat eredménye normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető-e vagy sem?
- Valamely mérés eredményének ingadozása (szórása) állandó-e a megfigyelés során?

# Válasz az 1. kérdésre (U-próba)

1.kérdés: a megfigyelések az adott $\boldsymbol{a_0}$ körül ingadoznak-e?

Ismert a $\xi_1$, $\xi_2$,…, $\xi_n$ megfigyelés-sorozat (megmértünk n db. átmérőt).

Legyen adott a σ szórás és tudjuk, hogy $\xi$ normális eloszlású.

Számítsuk ki

az U statisztikát: $$U = U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

# U-próba

Ha $M(\xi)=a_0$ ($H_0$ nullhipotézis), akkor $U \in N(0,1)$

Ezt már korábban láttuk:

U normális eloszlású , $M(U)=0$ és $D^2(U)=1$

Választunk $p<1$ értéket

(egyhez közel, pl. $p=0.95$)

Kiszámítható $[-U_\varepsilon, U_\varepsilon]$ intervallum, ahova U a választott p valószínűséggel bele esik.

# U-próba

Az adott megfigyelések alapján kiszámítom U aktuális értékét ($U_{akt}$).

Ha $-U_{\varepsilon} \leq U_{akt} \leq U_{\varepsilon}$ akkor a $H_0$ nullhipotézist elfogadom

# U-próba

Példa:

Átmérő mérünk, n=16 alkalommal, a sorozat átlaga:

$$\bar{\xi} = 16.84 \text{ mm}$$

Tudjuk, hogy $\sigma$=0.12 mm.

Kérdés, hogy az értékek az $a_0$=16.8 mm körül ingadoznak-e (várható érték)?

# U-próba

Kiszámítom az $U_{akt}$ értékét:

$$U_{akt} = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{16.84 - 16.8}{\frac{0.12}{\sqrt{16}}} = 1.33$$

A standard normális eloszlásfüggvényének táblázatából tudjuk, hogy $U\varepsilon=1.96$

# U-próba

Ezek szerint

$$-1.96 \leq 1.33 \leq 1.96$$

$$-U_{\varepsilon} \leq U_{akt} \leq U_{\varepsilon}$$

Vagyis:

Az aktuális érték az elfogadási tartományba esik, tehát a nullhipotézist elfogadjuk.

(A statisztika értéke nem mond ellent a nullhipotézisnek)

A fentiek alapján megfogalmazzuk a statisztikai próbák konstrukcióját:

# Statisztikai próbák szerkezete

Adott $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ megfigyelés-sorozat,

- $H_0$ nullhipotézist teszünk, $p<1$ választunk,
- $T=T(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ statisztikát választunk,
- Meghatározzuk T eloszlását $H_0$ fennállása esetén,

# Statisztikai próbák szerkezete

Meghatározzuk a $(T_1,T_2)$ intervallumot, amelyre $P(T_1<T<T_2 \mid H_0 \text{ igaz})=p$,

- A megfigyelésekből kiszámítjuk a $T_{akt}$ érték,

- Ha $T_1<T_{akt}<T_2$ akkor p szinten elfogadjuk a nullhipotézist. Ellenkező esetben elvetjük.

# Elnevezések

- **statisztikai próba**: Az az eljárás, amelynek alapján egy statisztikai hipotézisről döntünk,
- **paraméteres próba**: ha a kérdés az eloszlás valamely paraméterére vonatkozik,
- **Nem-paraméteres próba**: eloszlás típusára, függetlenségre, stb. (vagyis nem egyetlen paraméter értékére vonatkozik a hipotézis)

# Elnevezések

- $H_0$ **nullhipotézis**: Az eldöntendő kérdésre adott egyik válasz
- $p<1$ **szignifikancia szint**
- **Elfogadási tartomány**: $[T_1,T_2]$

$$P(T_1<T<T_2 \mid H_0 \text{ igaz})=p$$

- **Kritikus tartomány**:

$[T_1,T_2]$ komplementer tartománya

# A lehetséges döntések:

| | A $H_0$ hipotézist | |
|---|---|---|
| | elfogadjuk | elutasítjuk |
| $H_0$ fenn áll | **helyes döntés** | **elsőfajú hiba** |
| $H_0$ nem áll fenn | **másodfajú hiba** | **helyes döntés** |

# HIBÁK

Elsőfajú hiba: $H_0$ igaz, de elvetjük

$$P\left(-U_\varepsilon \leq U \leq U_\varepsilon \mid H_0 \ \text{igaz}\right) = 1 - \varepsilon = p$$

Az elsőfajú hiba valószínűsége:

$$1 - p = \varepsilon$$

# Hibák: másodfajú hiba

Másodfajú hiba: $H_0$ nem igaz, de elfogadjuk

$$H_1 : M(\xi) = a_1 \neq a_0$$

Másodfajú hiba valószínűsége:

$$P_2 = P\left(-U_\varepsilon \leq U \leq U_\varepsilon \,\middle|\, H_1 \text{ igaz}\right) =$$

Itt:

$$U = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} =$$

# Hibák: másodfajú hiba

Ha $H_1$ igaz, nem $H_0$, akkor nem U

$$U = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

eloszlása $N(0,1)$, hanem $U_1$ eloszlása $N(0,1)$

$$U_1 = \frac{\bar{\xi} - a_1}{\sigma}\sqrt{n}$$

Alakítsuk át U összefüggését:

# Hibák: másodfajú hiba

Szerepeljen $a_0$ helyett $a_1$:

$$U = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\bar{\xi} - a_0 + a_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} =$$

$$U = \frac{\bar{\xi} - a_1}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$\Delta$$

$$U = \frac{\bar{\xi} - a_1}{\sigma}\sqrt{n} + \Delta$$

# Hibák: másodfajú hiba

Folytatva:

$$= P\left( -U_{\varepsilon} \leq \frac{\bar{\xi} - a_1}{\sigma} \cdot \sqrt{n} + \Delta \leq U_{\varepsilon} \middle| H_1 \right) =$$

Levonom $\Delta$ -t mindhárom oldalból:

$$= P( -U_{\varepsilon} - \Delta \leq \frac{\bar{\xi} - a_1}{\sigma} \sqrt{n} \leq U_{\varepsilon} - \Delta | H_1 ) =$$

$N(0,1)$

# Hibák: másodfajú hiba

Folytatva:

$$= P\left(-U_\varepsilon - \Delta \le \frac{\bar{\xi} - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \le U_\varepsilon - \Delta \,\middle|\, H_1\right) =$$

$H_1$ fennállása esetén a középső változó $N(0,1)$ eloszlású.

Ezzel:

$$P(\Delta) = \phi(U_\varepsilon - \Delta) - \phi(-U_\varepsilon - \Delta)$$

# Alkalmazás

Egy nagyáruházban szombaton délelőtt a vásárlások átlaga (korábbi adatok alapján)

$$a_0 = 10000 \text{ Ft}$$

$$\sigma = 2000 \text{ Ft}$$

Ismét felmérést végeztek, 25 vevő számláját átlagolták:

$$\hat{\xi} = 10600 \text{ Ft}$$

$$n = 25$$

## Alkalmazás

Kérdés: tekinthető-e változatlannak a korábbi átlag? (U próba)

$$U_{akt} = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{10600 - 10000}{\frac{2000}{\sqrt{25}}} = 1.5$$

# Alkalmazás

Tudjuk, hogy p=95%-hoz $U_\varepsilon$=1.96, tehát

$$-U_\varepsilon \le U_{akt} \le U_\varepsilon$$

Az újabb átlag nem mond ellent a nullhipotézisnek.

# Alkalmazás: a másodfajú hiba

Mekkora a másodfajú hiba valószínűsége?

Pl. mekkora annak a valószínűsége, hogy $a_0$ helyett az átlag $a_1$-re változott?

$$a_1 = 10600 \text{ Ft}$$

$$P(\Delta) = \phi(U_\varepsilon - \Delta) - \phi(-U_\varepsilon - \Delta)$$

$$\Delta = \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{10600 - 10000}{2000}\sqrt{25} = 1.5$$

# Alkalmazás: a másodfajú hiba

$$P(\varDelta) = \varPhi\left(U_\varepsilon - \varDelta\right) - \varPhi\left(-U_\varepsilon - \varDelta\right)$$

$$P(\varDelta) = \varPhi\left(1.96 - 1.5\right) - \varPhi\left(-1.96 - 1.5\right)$$

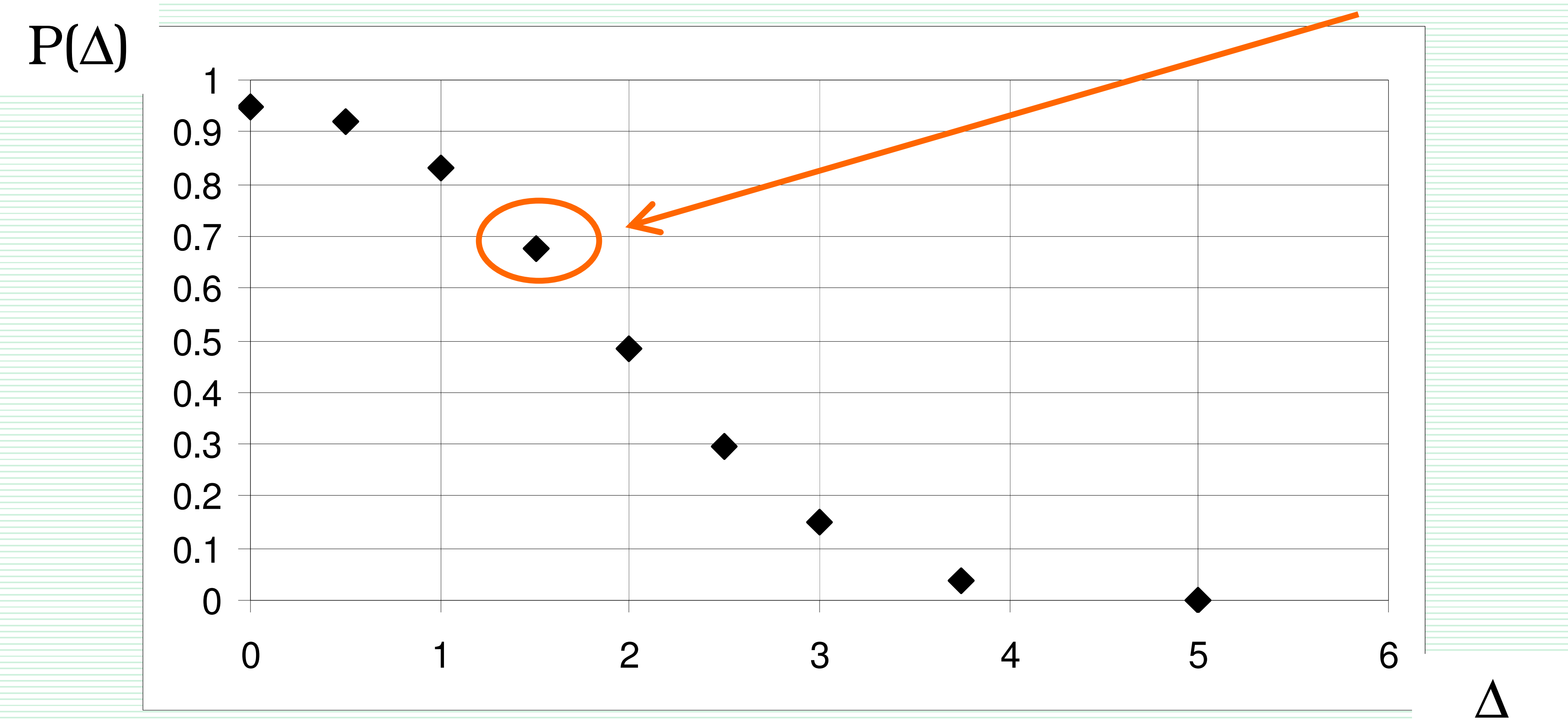
$$P(\varDelta) = \varPhi\left(0.46\right) - \varPhi\left(-3.46\right) = 0.677$$

Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

Ábrázoljuk:

$$a_0, \quad a_1 \Rightarrow \Delta \Rightarrow P(\Delta)$$

$$10000,\ 10600 \Rightarrow 1.5 \Rightarrow 0.677$$



# Egymintás U-próba (összefoglalás)

Normális eloszlású val. változó várható értékét vizsgálja

Megfigyelések: $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

Legyen $\xi$ normális eloszlású , $\sigma$ ismert

$H_0$ nullhipotézis: $M(\xi)=a_0$

Szignifikancia szintet választok (p), ehhez

$$[-U_\varepsilon, U_\varepsilon]$$

# Egymintás U-próba (összefoglalás)

Ha $H_0$ igaz, akkor

$[-U_\varepsilon, U_\varepsilon]$ az adott p valószínűséggel tartalmazza U aktuális értékét.

A számítás végrehajtása:

kiszámítom

$$U_{akt} = \frac{\bar{\xi} - a_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

Ha $U_{akt} \in [-U_\varepsilon ; U_\varepsilon] \rightarrow$

p szinten elfogadom a nullhipotézist.

A további paraméteres statisztikai próbák szerkezete ugyan ilyen. Kevésbé fogjuk részletezni.

# Kétmintás U-próba

Két normális eloszlású változó várható értékének egyezését vizsgálja.

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_1,\ldots\ldots\xi_{n1} & \text{és} & \sigma_1 \ \textit{ismert} \\ \eta_1,\ldots\ldots\eta_{n2} & \text{és} & \sigma_2 \ \textit{ismert} \end{array}\right\} \quad \textit{Normális eloszlású változók}$$

Nullhipotézis: $H_0 : M(\xi) = M(\eta)$

Statisztika:

$$U = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

# Kétmintás U-próba

Ha $H_0$ igaz, akkor

$$U \in N(0;1) \big| H_0$$

Ekkor $U_\varepsilon$ az $N(0,1)$ eloszlásból kapható.

Ha $U_{akt}$ az elfogadási tartományba esik:

$$U_{akt} \in \left[ -U_\varepsilon ; U_\varepsilon \right] \rightarrow$$

Akkor a $H_0$ nullhipotézist elfogadjuk

# Alkalmazás:

Adott A tömegre vonatkozó 9 mérés és B tömegre vonatkozó 16 mérés.

Kérdés, hogy tekinthető-e azonos várható értékű eloszlásból származónak a két tömeg? (Elfogadhatjuk-e azonosnak a két értéket?)

N=16 mérés átlaga: $\bar{\xi} = 167{,}2g$

N=9 mérés átlaga: $\bar{\eta} = 168{,}3g$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\xi} = 167{,}2g \\ \bar{\eta} = 168{,}3g \end{array}\right\} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1{,}2g$$

# Alkalmazás:

A statisztika aktuális értéke:

$$U_{akt} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{167,2 - 168,3}{1,2 \cdot \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}} = -2,2$$

95%-os szinten $U_{\varepsilon} = 1{,}96$

Az $U_{akt}$=-2.2 értéke a [-1.96, 1.96] intervallumon kívül van, tehát $H_0$ hipotézist elutasítjuk

# Student féle t-próba

Normális eloszlású valószínűségi változó várható értékének vizsgálatára szolgál, ha a szórás nem ismert.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n$ megfigyelésekből átlagot és korrigált tapasztalati szórást számolok:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \bar{\xi}\right)^2$$

# Student féle t-próba

$$H_0 : M(\xi) = a_0$$

$$t_{akt} = \frac{\bar{\xi} - a_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}$$

**t** Student eloszlású változó, (n-1) szabadságfokú

p=1-ε szignifikancia szinthez a Student eloszlás táblázatából a $\mathbf{t}_\varepsilon$ határérték kivehető: t(p,n-1).

Ha

$$-t_\varepsilon < t_{akt} < t_\varepsilon$$

$H_0$-t p szinten elfogadjuk.

# Student féle t-próba

## Alkalmazás

100 db alkatrészt 2 különböző műszerrel megmérünk.

Kérdés: van e rendszeres eltérés a két eszköz között?
(Megegyezik-e a két várható érték?)

$$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{100}$$

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{100}$$

$$H_0 : \quad M(\xi) = M(\eta)$$

A megfigyelések nem függetlenek, mert ugyan azt a 100 alkatrészt mértük a két műszerrel.

# Student féle t-próba

$$\delta = \xi - \eta$$ változót vizsgáljuk

A minta: $\delta_i = \xi_i - \eta_i$

A nullhipotézis: $M(\delta) = 0$

Kiszámítjuk: $\bar{\delta} = 0{,}328\mu$ *és* $s^* = 2{,}47\mu$

A statisztika aktuális értéke:

$$t_{akt} = \frac{\bar{\delta} - 0}{s^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{0{,}328}{2.47} \cdot \sqrt{100} = 2{,}09$$

# Student féle t-próba

A student táblázatból:

$$1-\varepsilon = 95\%$$

$$t_{krit} = (\,95\%,\ 100-1\,) = 1{,}98$$

mivel $$2{,}09 \notin \left[-1{,}98; 1{,}98\right]$$

Vagyis a statisztika aktuális értéke nem esik az elfogadási tartományba, ezért

$H_0$ hipotézist elutasítjuk

# Student féle t-próba (kétmintás)

Két normális eloszlású valószínűségi változó várható értékének összehasonlítása a feladat, ha a szórásokat nem ismerjük.

Lásd:

Lukács:  Mat.stat. p. 208-209.

Vincze: Mat.stat. ipari alkalmazásokkal p.131-132

# F-próba (Fisher próba)

Két normális eloszlású valószínűségi változó szórása megegyezik-e?

$$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$$

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m$$

$$H_0: \quad D(\xi) = D(\eta)$$

# F-próba (Fisher próba)

A tapasztalati szórásnégyzetek:

$$s_{\xi}^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{\xi} - \xi_i)^2 \qquad s_{\eta}^{*2} = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\bar{\eta} - \eta_j)^2$$

A statisztika a korrigált tapasztalati szórásnégyzetek hányadosa:

$$F_{akt} = max\left(\frac{s_{\xi}^{*2}}{s_{\eta}^{*2}}, \frac{s_{\eta}^{*2}}{s_{\xi}^{*2}}\right) \rangle\ 1$$

# F-próba (Fisher próba)

Magyarázat:

A hányadost úgy kell számolni, hogy nagyobb legyen mint 1!

Legyen $f_1$= a számláló elemszáma -1

Legyen $f_2$= a nevező elemszáma -1

Táblázatban adott az

$$F_{krit}=F_{krit}(p,f1,f2)$$

**Próba: ha $F_{akt}<F_{krit} \Rightarrow H_0$-t elfogadjuk**

# F-próba (Fisher próba)

Az F kritikus értékeinek táblázata: p=95%-hoz

$f_1$ (számláló)

$f_2$ (nevező)

| | 1 | 2 | ... | 100 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **161** | | | | |
| 2 | | | | **19.49** | |
| ⋮ | | | | | |
| 100 | | | | **1.39** | |
| ∞ | | | | | **1** |

# F-próba (Fisher próba)

Alkalmazás:

Két 100-100 elemű mintát hasonlítunk össze, kiszámítottuk a tapasztalati szórásokat:

$s_1^{*2} = 1,61\ \text{mm}^2$ $\qquad$ $s_2^{*2} = 1,93\ \text{mm}^2$

$$F_{akt} = \frac{1,93}{1,61} = 1,20$$

$f_1 = f_2 = 99$ $\qquad$ A táblázatból: $\qquad$ $F_p = 1,39$

$F_{akt} = 1,20 < F_p = 1,39 \quad \Rightarrow$ $\qquad$ elfogadjuk

# Grubbs-próba (1950)

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mérési sorozat és $\xi \in N(a,\sigma)$

Kérdés, hogy a sorozat legnagyobb (vagy a legkisebb) eleme hozzá tartozik-e sorozathoz, vagy valami megzavarta a megfigyelést?

Legyen:

$$\xi_{max} = max\{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$$

Számoljunk:

$$\bar{\xi}, \quad s^*$$

# Grubbs-próba

Statisztika: $$v_{akt} = \frac{\xi_{max} - \bar{\xi}}{s^*}$$

Nullhipotézis: $$H_o : \xi_{max} \in N(a, \sigma)$$

(a legnagyobb elem is hozzá tartozik az eloszláshoz)

A $\boldsymbol{v_{krit}}$ értékek táblázatban megtalálhatók. Ha

$$v_{akt} < v_{krit} \quad \rightarrow \quad H_0\text{-}t \ elfogadom$$

# Grubbs-próba

A legkisebb (az esetleg lefelé „kilógó") elem vizsgálata hasonló:

$$\xi_{min} = min\{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$$

$$v_{\text{akt}} = \frac{\bar{\xi} - \xi_{min}}{s^*}$$

$$v_{\text{akt}} < v_{\text{krit}} \quad \rightarrow \quad H_0\text{-}t \text{ elfogadom}$$

# Grubbs-próba

## Alkalmazás:

Legyen egy normális eloszlásból származó 20 elemű minta

elemei: 3,68 4,15 2,95 … ***6,35*** … 4,84

Átlagot és korrigált tapasztalati szórást számolunk:

$$\bar{\xi} = 3{,}94 \qquad \textit{és} \qquad s^* = 0.943$$

A maximális elem: $\xi_{\max} = 6{,}35$

# Grubbs-próba

A statisztika aktuális értéke:

$$v_{\text{akt}} = \frac{6,35 - 3,94}{0,94} = 2,55$$

Táblázatból a kritikus érték:

$$v_{\text{krit}}(95\%;20) = 2,62$$

Mivel: $v_{\text{akt}} < v_{\text{krit}}$ elfogadom $H_0$-t.

# Abbe-próba

A próba célja, hogy megvizsgálja, hogy a mérés (megfigyelés) sorozat alatt megváltozott-e a várható érték? „Megzavarták- e” a megfigyelést?

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ a mérési sorozat

$H_0$: $M(\xi_i)=a \quad i=1,2,\ldots,n$

# Abbe-próba

kiszámítok két mennyiséget:

$$s^{*2} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2 \qquad q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_{i+1} - \xi_i)^2$$

Vegyük a kettő hányadosát:

$$r = \frac{q^2}{s^{*2}}$$

# Abbe-próba

$$s^{*2} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2$$

$$q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_{i+1} - \xi_i)^2$$

Magyarázat:

Ha nem történt semmi beavatkozás a mérés alatt, akkor:

$$\mathbf{s^{*2} \approx q^2}$$

Ha a várható érték közben megváltozott, akkor

$$\mathbf{s^{*2} \geq q^2}$$

# Abbe-próba

Bizonyították, hogy:

$$M(r) = 1 \quad \textit{és} \quad D^2(r) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)$$

és ha **n>20**, akkor **r** közelítőleg normális eloszlású.

Különböző **n** és **p**-hez tabellálták $\mathbf{r_{krit}(n,p)}$ értékeket

# Abbe-próba

A próba végrehajtása:

Kiszámítjuk

$$s^{*2}\ ,\quad q^2 \quad \textit{és} \ \ r_{akt} = \frac{q^2}{s^{*2}}$$

Táblázatból: $\mathbf{r_{krit}(n,p)}$

Ha $\mathbf{r_{akt} > r_{krit}}$ elfogadjuk $H_0$-t

Ha $\mathbf{r_{akt} \leq r_{krit}}$ elutasítjuk $H_0$-t

# Paraméteres próbák

**U** próba (egy és kétmintás) **(várható érték, ha a szórás ismert)**

**t** próba (egy és kétmintás) **(várható érték, ha a szórás nemismert)**

**F** próba **(két szórás egyezése)**

**Grubbs** próba **(sorozatból „kilógó" értékek)**

**Abbe** próba **(várható érték „állandósága")**

**Következik**: nemparaméteres próbák