Budapest University of Technology and Economics
Department of Hydrodynamic Systems

Sorozatban gyártott termékek minőségellenőrzése

BME-HDS

Minőségellenőrzés a cári Oroszországban

Cári ukáz I. (Nagy) Péter cár korából:

"Megparancsolom, hogy Kornil Beloglasow-ot, a Tulai Fegyvergyár tulajdonosát korbácsolják meg és kolostorba küldjék dolgozni, mivel Ő, a gazember megengedte magának, hogy az Uralkodó csapatainak használhatatlan puskákat és fegyvereket adjon el.

Frol Fuks főellenőrt szintén meg kell korbácsolni és elődje után száműzni, mivel Ő az alkalmatlan fegyvereket vizsgálati jellel látta el.

A Fegyverhivatalnak megparancsolom, hogy Pétervárról Tulába költözzön át, és éjjel-nappal felügyelje a fegyvergyártást.

A fegyvermester és segédei figyeljenek oda, amikor az ellenőrök a vizsgálati jeleket bepecsételik.

Minőségellenőrzés a cári Oroszországban

Cári ukáz I. (Nagy) Péter cár korából:

Ha kétség merülne fel, a fegyvert át kell nézni és lövések által vizsgálni kell.

Minden hónapban legalább két fegyverrel addig kell lőni, míg azok használhatatlanná nem válnak.

Ha a csapatoknál az ütközetek során a fegyvermester és segédeinek figyelmetlensége miatt meghibásodás következne be, akkor őket kímélet nélkül, meztelen hátsóval kell megkorbácsolni.

A tulajdonos minden alkalmatlan fegyver után 25 korbácsütést kap és pénzbüntetést fizet. A főellenőrt az eszméletlenségig kell verni. A fő fegyvermestert altisztté kell lefokozni.

Minőségellenőrzés a cári Oroszországban

Cári ukáz I. (Nagy) Péter cár korából:

A fegyvermestert írnokként kell alkalmazni. A segédektől a vasárnapi vodka adagot egy évre meg kell vonni.

A Fegyvergyár új tulajdonosának, Demidownak megparancsolom, építtessen a fegyvermestereknek és segédeiknek házakat, nem rosszabbat mint a tulajdonosé.

Ha a házak ennél rosszabbak lennének - Demidow ne legyen megsértődve - megparancsolom, hogy Őt kivégezzék.

1723. január 11.-én
I. (Nagy) Péter
minden oroszok cárja

Bevezetés

Miről lesz szó?

Egylépcsős minőségellenőrzési eljárás

Tétel (N egység)
Valós hibaszázalék: p

Minta (n egység)
Hibás darabok
a mintában: S

$S \leq Ac$ (Accepted)

A tétel a
követelményeknek megfelel

A tételt elfogadjuk

$S \geq Re$ (Refused)

A tétel a követelményeknek
nem felel meg

A tételt visszautasítjuk

Gyártási tétel és minta

Tétel

Egy gyártmánysorozat elemei akkor kezelhetők statisztikailag azonos módon, ha a termékek:

- azonos műszakban készültek
- azonos gépbeállítással készültek
- azonos nyersanyag szállítmányból készültek

Az N tételszám tehát akkora, amekkora a fenti feltételeknek eleget tevő sorozat darabszáma.

Minta

Az N elemű tételből véletlenszerűen kiválasztott n gyártmány amin a minőségellenőrzést végezzük.

Tétel - minta kapcsolat

Legyen az N darabból álló tételben a selejtes termékek valószínűsége p és a véletlenszerűen kiválasztott n elemű minta selejtszáma S.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában

- pontosan k selejtes terméket találunk? $P(S = k) =?$
- legfeljebb k selejtes terméket találunk? $P(S \leq k) =?$
- legalább k selejtes terméket találunk? $P(S \geq k) =?$

Vissza adja-e a minta selejtaránya $\left(\frac{S}{n}\right)$ a teljes tétel selejtszázalékát (p)?
Mekkora szórással teszi ezt?

Tétel - minta kapcsolat

A gyártó és az átvevő megegyezik egy AQL (accepted quality level) selejtszázalékban – átvételi hibaszintben.

- Hogyan kell az n mintaelem számot meghatározni?
- Milyen Ac (Accepted) selejtszám esetén lehet még átvenni, illetve milyen Re (Refused) selejtszám esetén kell visszautasítani az N darabos tételt?
- Adott n, Ac és Re esetén mekkora a két fél kockázata?

Mekkora a két fél kockázata?

- A gyártó kockázata: a teljes tétel a megbeszélt p selejtszázaléknál kisebb arányban tartalmaz selejtet mégis a véletlenszerűen kiválasztott minta selejtszáma eléri a Re-t ezért visszautasítják a tételt
- Az átvevő kockázata: a teljes tétel a megbeszélt p selejtszázaléknál nagyobb arányban tartalmaz selejtet, mégis a véletlenszerűen kiválasztott minta selejtszáma nem haladja meg az Ac-t ezért elfogadják a tételt.

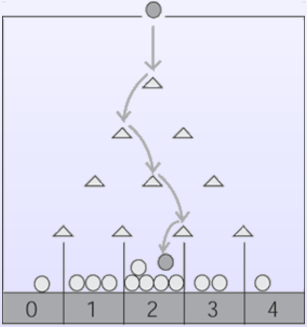
Binomiális eloszlás

Wikipedia: "A binomiális eloszlású valószínűségi változóval a visszatevéses mintavétel ragadható meg, vagyis olyan helyzeteket lehet vele modellezni, ahol egy véletlen kísérletet tetszőlegesen sokszor lehet megismételni ugyanolyan körülmények között, miközben azt figyeljük meg, hogy az n ismétlés során hányszor következett be egy adott esemény."

Jelen esetben

- véletlen kísérlet: N elemű tételből kiválasztunk egy mintaelemet és megvizsgáljuk, hogy selejtes-e
- ugyanolyan körülmények: minden kiválasztott mintaelem p valószínűséggel selejtes
- ezt elvégezzük n-szer
- végül az esemény (a mintaelem selejtes) S-szer következett be

Kitekintés - Galton tábla

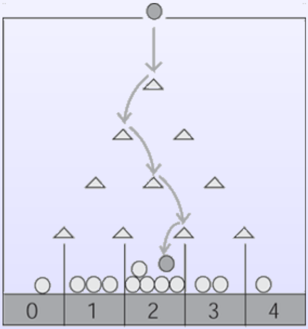


- n szintű Galton táblán elengedünk egy golyót
- minden szinten a golyó vagy balra vagy jobbra esik 50%-50%-os valószínűséggel (1 kísérlet)
- n szint - n kísérlet
- Melyik rekeszbe esik a golyó?
  Hányszor esik jobbra a golyó?

Kitekintés - Galton tábla

- Minden szinten döntés: jobbra vagy balra esik a golyó?
- Most a szimmetrikus tábla (50% - 50%) helyett nézzük általánosan
- Az i-edik szint döntése legyen x_i
  - $x_i = 1$ ha jobbra esik, p valószínűséggel
  - $x_i = 0$ ha balra esik, $1 - p$ valószínűséggel
- $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ a jobbra esések száma, azaz a golyó az S számú rekeszbe esik

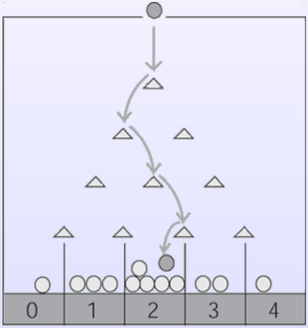
Kitekintés - Galton tábla



Mennyi a 0-ás (bal szélső) rekszbe esés valószínűsége?

- Első szinten balra lépünk: $(1-p)$
- Második szinten is balra lépünk: $(1-p)\cdot(1-p) = (1-p)^2$
- ...
- A 0-ás rekeszbe esés valószínűsége, azaz hogy, minden szinten balra lépünk: $(1-p)^n$

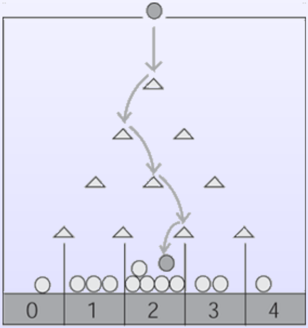
Kitekintés - Galton tábla



Mennyi az 1-es (balról a második) rekeszbe esés valószínűsége?

- Egy útvonal valószínűsége: egyszer jobbra lépünk és $(n-1)$-szer balra: $p \cdot (1-p)^{n-1}$
- Hány ilyen útvonal van? A jobbra lépés lehet az 1., a 2. … az n-edik lépésnél, azaz n féle útvonal van, mindegyik külön-külön realizáció
- Tehát az 1-es rekeszbe esés valószínűsége: $n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$

Kitekintés - Galton tábla



Mennyi a 2-es rekeszbe esés valószínűsége?

- Egy útvonalon kétszer jobbra és $(n-2)$-ször balra lépünk: $p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$
- Hány ilyen útvonal van?
  - Az egyik jobbra lépés lehet az n helyen, a másik a maradék $n-1$ helyen.
  - De így kétszer számolunk minden kombinációt: pl 1. és 3. szinten jobbra lépés és az 3. és 1. szinten jobbra lépés ugyanaz az út, de kétszer számoltuk...

  A lehetséges útvonalak száma: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$
- És így a 2-es rekeszbe esés valószínűsége: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$

Kombinatorikai kitekintés

Hány féle képpen lehet egy n elemű halmazból k elemű részhalmazt kiválasztani? (Az n szintből kiválasztani k-t ahol jobbra lépünk)

- Az első elem lehet n féle
- A második $n-1$
- $\ldots$
- A k-adik elem $n-(k-1)$ féle
- Így $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ féle képpen választhatjuk ki sorban az elemeket
- DE: a kiválasztás sorrendje nem érdekes
- A lehetőségek száma tehát: $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

Kombinatorikai kitekintés

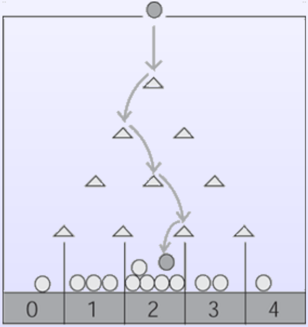
Van hétfő-kedd-…-vasárnap feliratos polónk ($n = 7$). Ebből egy hétvégi túrára ki akarunk venni 3-at ($k = 3$). Hányféle kombinációban pakolhatunk polót a táskánkba?

- Elsőre 7 közül, másodjára 6 közül majd harmadjára már csak 5 közül választhatunk. Ez $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ lehetőség $(n \cdot (n-1) \cdot (n-2))$.
- Amennyiben arra lennénk kíváncsiak, hogy a hét polóból hányféle módon (variációban) öltözködhetünk a hétvégén (tehát poló viselés sorrendje számít) úgy a válasz tehát 210 lenne.

Kombinatorikai kitekintés

- Ám a táskába pakolás sorrendje nem érdekes számunkra. Pl.: a hétfő-kedd-péntek és a kedd-péntek-hétfő választásokat külön számoltuk, mégis összességében ugyanaz a három poló került a táskába.
- Ezt a három kiválasztott polót pedig $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féle sorrendben $(k!)$ tehettük a táskába,
- azaz hétvégére $\frac{210}{6} = 35$ féle poló-kombinációt pakolhatunk.

Kitekintés - Galton tábla



Általánosan: Mennyi a k jelű rekeszbe esés valószínűsége?

- Egy útvonal valószínűsége: k-szor jobbra és $(n-k)$-szor balra lépünk: $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- Útvonalak száma: $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$
- A k jelű rekeszbe esés valószínűsége: $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Binomiális eloszlás

Binomiális eloszlás

$$P\left(S=k\right)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

$$P\left(S\leq k\right)=\sum_{i=0}^{k}P\left(S=i\right)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot\left(1-p\right)^{n-i}$$

Binomiális eloszlás a minőségellenőrzésben

Kapcsolat a Galton táblával

- Legyen A_i az i-edik darab indikátora (az i-edik szint döntése: jobbra vagy balra lépünk)
  - $A_i = 1$ ha az i-edik darab selejtes (az i-edik szinten jobbra lépünk); ez az esemény p valószínűséggel következik be
  - $A_i = 0$ ha az i-edik darab hibátlan (az i-edik szinten balra lépünk); ez az esemény $(1-p)$ valószínűséggel következik be
  - Más lehetőség nincs. Egy darab vagy selejtes vagy hibátlan. (Minden szinten vagy jobbra vagy balra lépünk.)
- $S = \sum_{i=1}^{n} A_i$ a selejtek száma. (A jobbra lépések száma.)

Binomiális eloszlás a minőségellenőrzésben

Válasz az első kérdéscsokorra

- A minta pontosan k selejtet tartalmaz:

$$P(S=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

- A minta legfeljebb k selejtet tartalmaz:

$$P(S\leq k)=\sum_{i=0}^{k}P(S=i)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

- A minta legalább k selejtet tartalmaz:

$$P(S\geq k)=\sum_{i=k}^{n}P(S=i)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

Selejtes darabok számának várható értéke és szórása

Hány selejtes darab várható n elemű mintából p valós selejtszázalék mellett?

- $S = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, ahol $A_i = \begin{cases} 1, & p \text{ valószínűséggel} \\ 0, & (1-p) \text{ valószínűséggel} \end{cases}$
- $M(A_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
- $M(S) = \sum\limits_{i=1}^{n} M(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p = n \cdot p$
- Tehát a minta a selejtarányának várható értéke:

  $M\left(\frac{S}{n}\right) = p$

Selejtes darabok számának várható értéke és szórása

Mekkora a selejtes darabok számának szórása?

- $S = \sum_{i=1}^{n} A_i$, ahol $A_i = \begin{cases} 1, & p \text{ valószínűséggel} \\ 0, & (1-p) \text{ valószínűséggel} \end{cases}$
- $D^2(A_i) = M\left((A_i - M(A_i))^2\right)$
- $A_i - M(A_i) = \begin{cases} 1-p, & p \text{ valószínűséggel} \\ 0-p, & (1-p) \text{ valószínűséggel} \end{cases}$
- $D^2(A_i) = (1-p)^2 \cdot p + p^2 \cdot (1-p) = p \cdot (1-p)$
- $D^2(S) = \sum_{i=1}^{n} D^2(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot (1-p)$
- Tehát a minta a selejtarányának szórásnégyzete:

  $D^2\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{p \cdot (1-p)}{n}$

Binomiális eloszlás - Számolás

- Legyen $p = 2\%, n = 20, k = 3$
- $P(S = 3) = \binom{20}{3} \cdot 0,02^3 \cdot 0,98^{17}$
  $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{?}{6 \cdot ?} = \dots$

Binomiális eloszlás - Számolás

- Legyen $p = 2\%, n = 20, k = 3$
- $P(S = 3) = \binom{20}{3} \cdot 0,02^3 \cdot 0,98^{17}$
  $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{?}{6 \cdot ?} = \ldots$
- Már nem túl nagy n-re is n! elszáll ($20! \approx 2,4 \cdot 10^{18}$).
- Persze "okosan" számolva még megoldható:
  $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
- de ez sem optimális pl. már $n = 60, k = 9$-re is:
  $60!/(60-9)! = 60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 52 \approx 5,4 \cdot 10^{15}$

Nagy n és kis p értékekre – midőn $n \cdot p = \lambda$ – a binomiális eloszláson alapuló képlet átalakítható:

$$P\left(S=k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-\lambda}\right)^{k} =$$

Nagy n és kis p, $n \cdot p = \lambda$ mellett

$$
\begin{aligned}
P(S=k) &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n-\lambda}\right)^k = \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n-\lambda} \cdot \frac{n-1}{n-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-\lambda} \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx \\
&\approx \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}
\end{aligned}
$$

Ez az ú.n. Poisson eloszlás.

Közelítés Poisson eloszlással

A Poisson eloszlás k nem nagy értékei esetén könnyen számítható, míg a binomiális nagy n érték esetén kis k-ra is nehezen számolható.

Példa:

Legyen $n = 100, p = 0,02, k = 5$ (tehát n "nagy", p "kicsi", k pedig "nem nagy"). Ekkor:

- $P(S = 5) = 0,03535$ – a binomiális eloszlás alapján számítva $\left(\binom{100}{5} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx \frac{9 \cdot 10^9}{120} \approx 7,5 \cdot 10^7\right)$
- $P(S = 5) = 0,03609$ – a Poisson eloszlás alapján számítva
- Az eltérés $0,00074$, ami két százalékos relatív hiba.

Köszönöm a figyelmet!

Egylépcsős minőségellenőrzési eljárás

Tétel (N egység)
Valós hibaszázalék: p

Minta (n egység)
Hibás darabok
a mintában: S

$S \leq Ac$ (Accepted)

A tétel a
követelményeknek megfelel

A tételt elfogadjuk

$S \geq Re$ (Refused)

A tétel a követelményeknek
nem felel meg

A tételt visszautasítjuk

Binomiális eloszlás

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában:

- pontosan k selejtes terméket találunk? $P(S = k) =?$

  $$P\left(S = k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

- legfeljebb Ac selejtes terméket találunk (és elfogadjuk a tételt)? $P(S \leq Ac) =?$

  $$P\left(S \leq Ac\right) = \sum_{k=0}^{Ac} P\left(S = k\right) = \sum_{k=0}^{Ac} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

- legalább Re selejtes terméket találunk (és elutasítjuk a tételt)? $P(S \geq Re) =?$

  $$P\left(S \geq Re\right) = \sum_{k=Re}^{n} P\left(S = k\right) = \sum_{k=Re}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Közelítés Poisson eloszlással

- Nagy n-re $\binom{n}{k}$ nehezen számolható
- Láttuk, hogy, ha p kicsi, n nagy $(n \cdot p = \lambda)$:
  $P\left(S = k\right) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$
  ami kis k-ra könnyen számolható
- de még mindig nehézkes $P(S \leq Ac)$ illetve $P(S \geq Re)$ kiszámítása; pl.:
  $$P\left(S \leq Ac\right) = \sum_{k=0}^{Ac} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \sum_{k=0}^{Ac} \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$$

- Legyen A_i az i-edik mintaelem indikátora, azaz:

$$A_i = \begin{cases} 1, & \text{ha selejtes, } p \text{ valószínűséggel} \\ 0, & \text{ha hibátlan, } (1-p) \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

- Ekkor a selejtek száma: $S = \sum_{i=1}^{n} A_i$
- A_i-k azonos eloszlású valószínűségi változók
- S nem más, mint "sok" azonos eloszlású valószínűségi változó összege
- Alkalmazható a Centrális Határeloszlás Tétel

Centrális Határeloszlás Tétel

- Sok (n), azonos eloszlású, független valószínűségi változók (x_i, $M(x_i) = m$, $D(x_i) = \sigma$) összege határértékben ($n \to \infty$) normális eloszlást követ.
- Az összeg várható értéke: $n \cdot m$
- Az összeg szórásnégyzete: $n \cdot \sigma^2$
- Tehát az összeg határ-eloszlása: $N(n \cdot m; n \cdot \sigma^2)$

- A_i független, azonos eloszlásúak
- Láttuk, hogy $M(A_i) = p$ és $D^2(A_i) = p \cdot (1-p)$
- Tehát $S = \sum_{i=1}^{n} A_i$ határ-eloszlása (azaz ha n nagy, akkor jó közelítéssel): $N(n \cdot p; n \cdot p \cdot (1-p))$
- Azaz $\frac{S-n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ jó közelítéssel $N(0;1)$ (standard normális) eloszlású.
- Tehát:
  $P(S < k) = P\left(\frac{S-n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < \frac{k-n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \approx \phi\left(\frac{k-n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$
- "Folytonossági korrekció" (Continuity correction): $P(S \leq k) = P(S < k+1)$ normális eloszlással való közelítésekor $k+1$ helyett használjunk $k+0.5$-t, azaz:
  $P(S \leq k) \approx \phi\left(\frac{k+0.5-n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$

Pontos - Binomiális

$$P\left(S \leq Ac\right) = \sum_{k=0}^{Ac} P\left(S = k\right) = \sum_{k=0}^{Ac} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

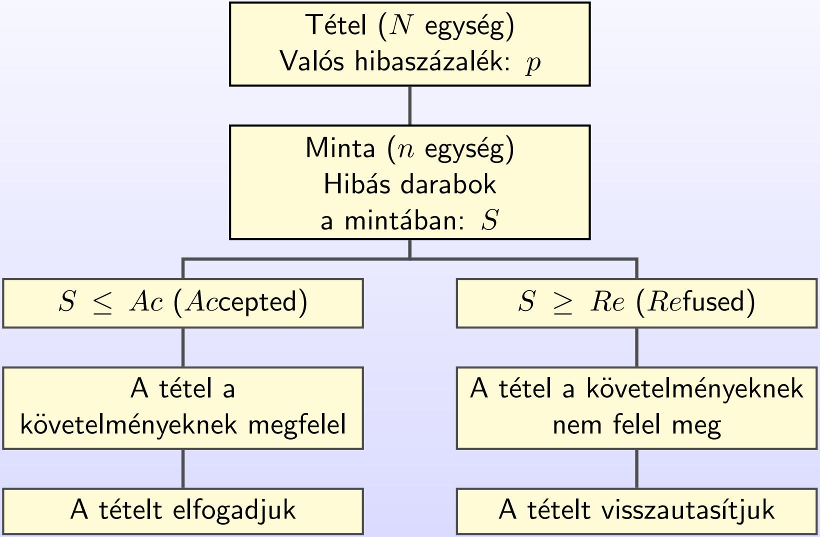
Közelítés - Poisson eloszlással

$$P\left(S \leq Ac\right) = \sum_{k=0}^{Ac} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \sum_{k=0}^{Ac} \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$$

Közelítés - Normális eloszlással

$$P(S \leq Ac) \approx \phi\left(\frac{Ac+0.5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$$

Egylépcsős minőségellenőrzési eljárás



Kulcsjel táblázat

Kulcsjeltáblázat

Tétel nagyság: N	különleges				általános		
	fokozat *kulcsjele*						
	S-1	S-2	S-3	S-4	I	II	III
...							
51- 90	B	B	C	C	C	E	F
91- 150	B	B	C	D	D	F	G
151- 280	B	C	D	E	E	G	H
281- 500	B	C	D	E	F	H	J
501- 1200	C	C	E	F	G	J	K
1201- 3200	C	D	E	G	H	K	L
3201- 10000	C	D	F	G	J	L	M
...							

Kulcsjel táblázat - Egylépcsős minőségellenőrzési eljáráshoz

Egyszeres tervtípus normális vizsgálatra

Kulcs Jel	Minta nagyság: n	Átvételi hibaszint AQL								
		...	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	...
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
...	...	...								...
E	13		⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	
F	20		0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	
G	32		⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	
H	50		⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	
J	80		1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	
...	...	...								...

Példa

Egy műszakban azonos alapanyagból 3500 kerékpárláncot gyártanak. A lánc vizsgálata – szakító próba – a lánc tönkremenetelével jár, ezért I. fokozatú általános vizsgálatban állapodik meg a gyártó és a kereskedő. Mivel a hibás lánc átvételi kockázata nem nagy, így 4 %-os AQL szintet engednek meg. Átveszi-e a tételt a kereskedő, ha a helyesen meg- és kiválasztott mintában 5, illetve egy másik műszak termékeiben 9 selejtet találnak?

- Kulcsjeltáblázat: J kulcs
- Egylépcsős eljárás: $n = 80$ elemű minta, $Ac = 7$, $Re = 8$. Tehát legfeljebb 7 selejtes mintaelem esetén veszik át a teljes tételt; 8, vagy annál több selejt esetén elutasítják.
- Tehát az első műszak tétele megfelel a minőségellenőrzésen, a második műszakét viszont visszadobják.

Milyen valószínűséggel veszik át a tételt, ha a teljes tétel tényleges selejtszázaléka $p = 4\%$?

$n = 80, Ac = 7, p = 0.04$

$$P(S \leq Ac) \approx \phi\left(\frac{Ac+0.5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) = \phi\left(\frac{7.5-80\cdot 0.04}{\sqrt{80\cdot 0.04\cdot 0.96}}\right) = \phi\,(2.453)$$

$P(S \leq Ac) \approx 99.3\%$,
(A pontos érték a binomiális eloszlásból: $P(S \leq Ac) = 98.5\%$)

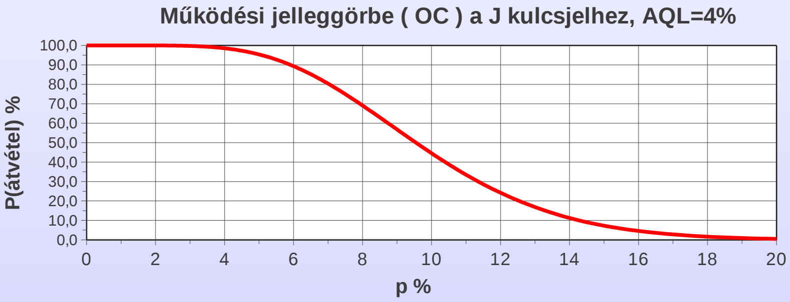
Tehát a gyártónak gyakorlatilag nincs kockázata, ha a gyártott tétel valós selejtszázaléka 4%, akkor is csak 1% annak a valószínűsége, hogy a minőségellenőrzésen elbukik a minta.

Milyen valószínűséggel veszik át a tételt, ha a teljes tétel tényleges selejtszázaléka $p = 8\%$?

$n = 80, Ac = 7, p = 0.08$

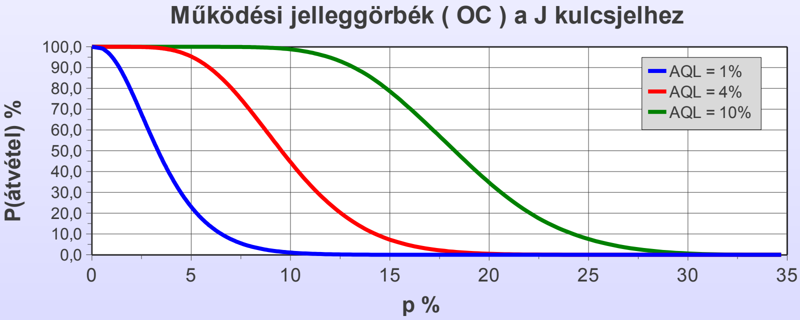
$$P(S \leq Ac) \approx \phi\left(\frac{Ac+0.5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) = \phi\left(\frac{7.5-80\cdot 0.08}{\sqrt{80\cdot 0.08\cdot 0.92}}\right) = \phi(0.4533) \quad = 67.5\%,$$

Tehát az átvevő 67.5%-os kockázatot vállal, ha a tétel a megbeszélt 4%-os AQL helyett 8%-os selejtarányú.



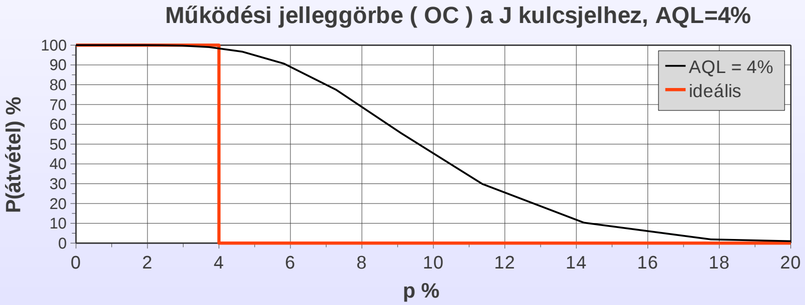
Működési jelleggörbe - Operating Characteristics

- az OC görbe azt mutatja, hogy egy adott minőségellenőrzési protokol mellett egy tételt ami p valószínűséggel tartalmaz selejtet milyen valószínűséggel megy át a minőségellenőrzésen: P(a minta alapján a tételt elfogadom) $-\ p$ valós selejtszázalék

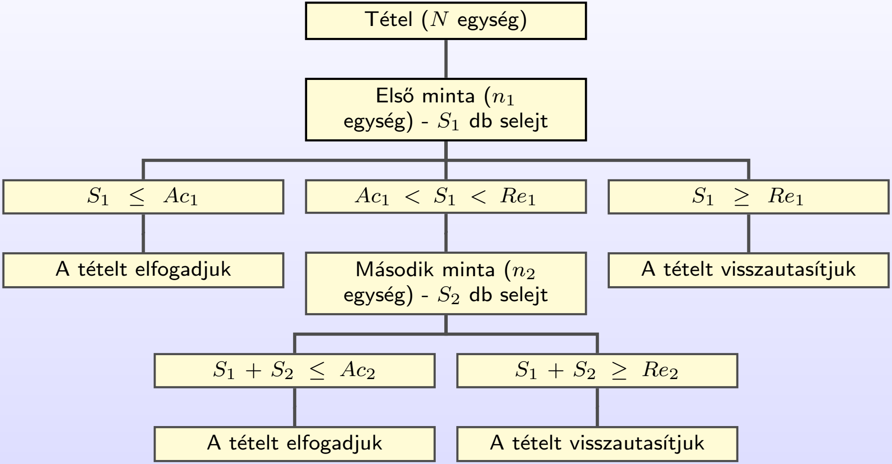


Milyen az ideális minőségellenőrzés működési jelleggörbéje?

- ha a tétel valós p selejtszázaléka nem nagyobb mint a megbeszélt AQL, akkor a minta alapján a tételt biztosan (1 valószínűséggel) átveszik
  $P(\text{minta alapján a tételt átveszik}) = 1$
  $P(\text{minta alapján a tételt elutasítják}) = 0$
- ha a tétel valós p selejtszázaléka nagyobb mint a megbeszélt AQL, akkor a minta alapján a tételt biztosan (1 valószínűséggel) elutasítják
  $P(\text{minta alapján a tételt átveszik}) = 0$
  $P(\text{minta alapján a tételt elutasítják}) = 1$


Működési jelleggörbe (OC) a J kulcsjelhez, AQL=4%
P(átvétel) %
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
p %
AQL = 4%
ideális

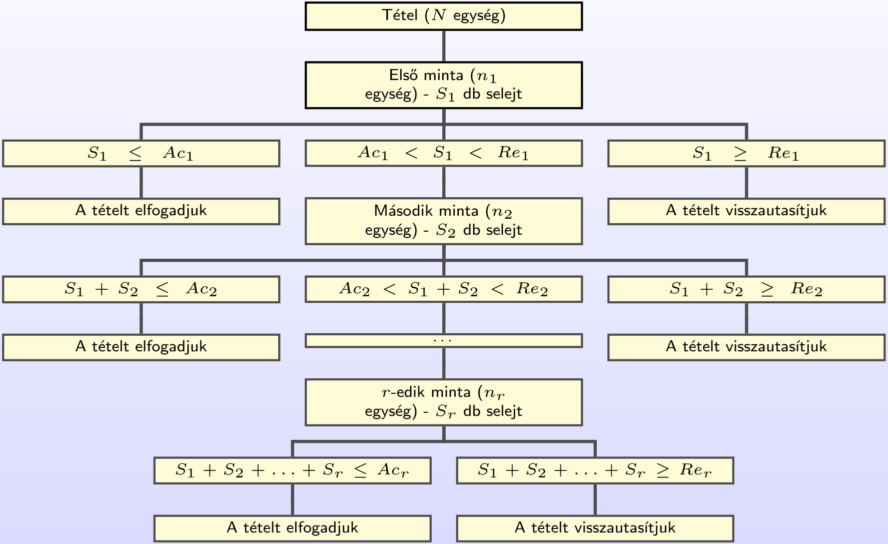
Kétlépcsős minőségellenőrzés



Kétszeres tervtípus normális vizsgálatra

Kulcsjel	Mintanagyság: kiveendő (db)	Mintanagyság: együttesen (db)	Átvételi hibaszint (AQL): 0,010	0,015	0,025	0,040	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	15	25
			Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A																↓	*		↓	*
B	2	2													↓	*	↑	↓	0 2	0 3
	2	4																	1 2	3 4
C	3	3												↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4
	3	6																1 2	3 4	4 5
D	5	5											↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5
	5	10															1 2	3 4	4 5	6 7
E	8	8										↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7
	8	16														1 2	3 4	4 5	6 7	8 9
F	13	13									↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9
	13	26													1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13
G	20	20								↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11
	20	40												1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19
H	32	32							↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16
	32	64											1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27
J	50	50						↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑
	50	100										1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27	
K	80	80					↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	
	80	160									1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27		
L	125	125				↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑		
	125	250								1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27			
M	200	200			↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑			

Többlépcsős minőségellenőrzés



Többszörös tervtípus normális vizsgálatra

Kulcsjel	Mintanagyság: kiveendő	Mintanagyság: együttesen	Átvételi hibaszint (AQL): 0,010	0,015	0,025	0,040	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	15	25	40
	db		m n	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac
A B C															*	*	*	+ +	+ + + +	* + + + +	* + +
D	2	2												*			# 2	# 2	# 3	# 4	0
	2	4															# 2	0 3	0 3	1 5	1
	2	6															0 2	0 3	1 4	2 6	3
	2	8															0 3	1 4	2 5	3 7	5 1
	2	10															1 3	2 4	3 6	5 8	7 1
	2	12															1 3	3 5	4 6	7 9	10 1
	2	14															2 3	4 5	6 7	9 10	13 1
E	3	3											*			# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0
	3	6														# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3
	3	9														0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 1
	3	12														0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 1
	3	15														1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 1
	3	18														1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 1
	3	21														2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 1
F	5	5										*			# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1
	5	10													# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 1
	5	15													0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 1
	5	20													0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 1
	5	25													1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 2
	5	30													1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 2
	5	35													2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 2
G	8	8									*			# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2
	8	16												# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 1
	8	24												0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 1
	8	32																			

Hallgatók felkészültségének minőségellenőrzése - ZH feladat összeállítása

Az Statisztika módszerek tárgyban hetente 5, így a félév során összesen 70, egyenként azonos 1-1 pont értékű ismeretet – tudásterméket – ad át az előadó a hallgatóknak. A vizsga zárthelyi költsége nem nagy, a tudatlan hallgatók átvétele (átengedése a vizsgán) viszont a társadalom számára nagy kockázatot jelent. Ezért III. általános ellenőrzési fokozatot választunk.

Kérdések:

- Milyen kulcsjelű ellenőrzési fokozatot válasszon a Tanszék?
- Hány tudásegységet (zh összpontszám) kell számon kérni a vizsgán?
- Milyen hibaszintet jelent, ha 50%-tól elégséges a zárthelyi, azaz 51% tudatlanság esetén még visszautasítjuk a hallgatót?
- A mellékelt működési jelleggörbe alapján mekkora annak valószínűsége, hogy egy 60%-ban tudatlan hallgató átmegy, illetve egy csak 40%-ban tudatlan hallgató megbukik a vizsgán?
- A minőség ellenőrzés melyik alapelve nem teljesül ebben a feladatban?

Megoldás:

- Egy tudáselem egy termék. A termékek száma összesen, azaz a tételnagyság $N = 70$.

Kulcsjel táblázat - Egylépcsős minőségellenőrzési eljáráshoz

K u l c s j e l t á b l á z a t

Tétel nagyság: N	különleges				általános		
	fokozat *kulcsjele*						
	S-1	S-2	S-3	S-4	I	II	III
...							
51- 90	B	B	C	C	C	E	F
91- 150	B	B	C	D	D	F	G
151- 280	B	C	D	E	E	G	H
281- 500	B	C	D	E	F	H	J
501- 1200	C	C	E	F	G	J	K
1201- 3200	C	D	E	G	H	K	L
3201- 10000	C	D	F	G	J	L	M
...							

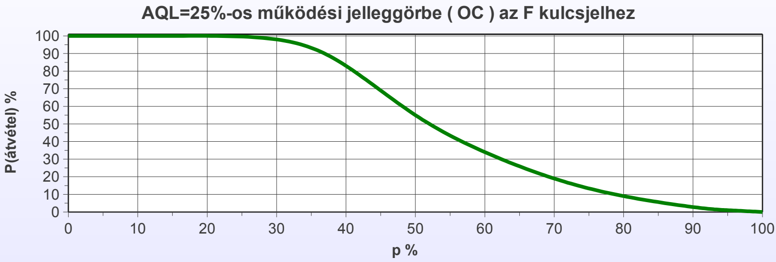
Kulcsjel táblázat - Egylépcsős minőségellenőrzési eljáráshoz

Egyszeres tervtípus normális vizsgálatra

Kulcs Jel	Minta nagyság: n	Átvételi hibaszint AQL								
		…	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	…
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
…	…	…								…
E	13		⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	
F	20		0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	
G	32		⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	
H	50		⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	
J	80		1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	
…	…	…								…

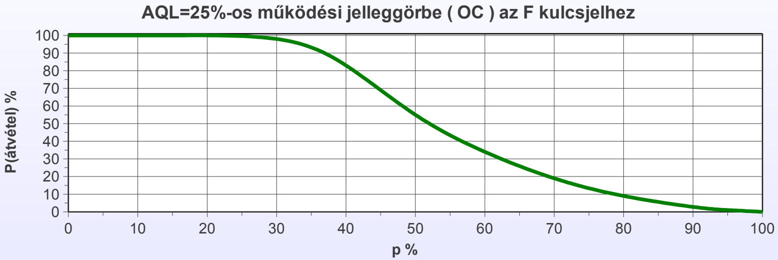
Megoldás:

- Egy tudáselem egy termék. A termékek száma összesen, azaz a tételnagyság $N = 70$.
- A kulcsjel táblázatban $N = 70$ az $51 - 90$ sorba esik, a III. oszlopban F kulcsjel található.
- Az egy feladatsorból álló zárthelyi egyszeres tervtípusnak felel meg. Az F kulcsjel sorában a minta mennyisége $n = 20$, tehát összesen 20 pontértékű zárthelyi (pl. 4 db 5 pontos vagy 5 db 4 pontos) feladatot kell adni a tananyagból véletlenszerűen kiválasztott tudáselemek számonkérésére.
- 20 pont 51 %-a 11 pont hiánya, ezt el kell utasítani. 10 pont hiánya még elfogadható, így $Ac = 10$, $Re = 11$
- Az F kulcsjel sorában ez a szám-pár az $AQL = 25$ % hibaszinthez tartozik.



A működési jelleggörbe alapján

- $p = 40\%$ bemenő hibaszint (60% tudásszint) esetén $P = 83\%$ a minőségellenőrzésen való megfelelés valószínűsége, így az elégséges felkészültségű hallgató megbuktatásának valószínűsége tehát $100 - 83 = 17\%$.
  Ez a hallgató kockázata, azaz ilyen - csekély - valószínűséggel bukik meg.



A működési jelleggörbe alapján

- $p = 60\%$ bemenő hibaszint $(40\%$ tudásszint$)$ esetén $P = 34\%$ a minőségellenőrzésen való megfelelés valószínűsége, azaz a nem felkészült hallgató átengedésének valószínűsége.
  Ez a tanár kockázata, ilyen - ugyancsak csekély - valószínűséggel kap érdemtelenül jegyet a diák.

Miért rossz a feladat?

A feladat azért rossz, mert a hallgató tudáselemei nem azonos körülmények között létrejött termékek, van amit fáradtan este, mást pihenten reggel tanul, van amit érteni kell, van amit memorizálni, stb.

Köszönöm a figyelmet!