

Halász Gábor - Huba Antal

# MŰSZAKI

# MÉRÉSEK



Műegyetemi Kiadó

*Szerzők:*

**Dr. Halász Gábor**  
egyetemi tanár  
(1., 3., 4., 5. (Huba Antallal közösen), 6. fejezetek)

**Dr. Huba Antal**  
egyetemi docens  
2., 5. (Halász Gáborral közösen), 7. fejezetek

*Bírák:*

**Dr. Kaposvári Zoltán**  
műszaki tudomány kandidátusa,

**Dr. Lipovszki György**  
PhD, egyetemi docens

*A borítót tervezte:*

**Ficzek Mária**

© Dr. Halász Gábor, Dr. Huba Antal

A tankönyv az Oktatási Minisztérium támogatásával,  
a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított  
felsőoktatási tankönyvtámogatási program  
keretében jelent meg



Oktatási  
Minisztérium

Azonosító: 45067

ISBN 963 420 744 8

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

**Gépészmérnöki Karának**

megrendelése alapján kiadja a

**Műegyetemi Kiadó**

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 8,19 (A/5) iv

Nyomdai munkák

**Műegyetemi Nyomda**

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 009 /03

# Tartalomjegyzék

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. BEVEZETÉS</b>  | <b>5</b>  |
| <b>2. A MÉRÉS</b>  | <b>8</b>  |
| 2.1 A mérés mint folyamat, fogalmak  | 8         |
| 2.2 Fontosabb mérés- és műszertechnikai fogalmak                               | 14        |
| 2.3 Mérési hibák   | 28        |
| 2.3.1 Mérési hibák csoportosítása eredetük szerint                             | 28        |
| 2.3.2 A hibák megjelenítési formái   | 29        |
| 2.3.3 A hibák csoportosítása jellegük szerint                                  | 33        |
| 2.4 A mérőeszközök statikus és dinamikus tulajdosságai                         | 38        |
| 2.4.1 A statikus és a dinamikus kalibrálás célja                               | 38        |
| 2.4.2 Statikus kalibrálás, a jelleggörbe felvétele                             | 40        |
| 2.4.3 Dinamikus és tranziens jelenségek  | 44        |
| 2.4.4 Érzékenység és kapcsolódó fogalmak                                       | 47        |
| A 2. fejezet irodalma  | 49        |
| <b>3. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK</b>                                      | <b>51</b> |
| 3.1 Alapfogalmak   | 51        |
| 3.2 Nevezetes eloszlások   | 57        |
| 3.3 A nagy számok törvénye   | 60        |
| 3.4 A központi határeloszlás-tételek   | 61        |
| 3.5 Mérési hibák megfogalmazása valószínűségi számítási eszközökkel            | 62        |
| A 3. fejezet irodalma  | 63        |
| <b>4. ÁLLANDÓ MENNYISÉG KÖZVETLEN MÉRÉSE</b>                                   | <b>65</b> |
| 4.1 A mérési sorozat átlaga  | 65        |
| 4.2 A mérési sorozat jellemzése a tapasztalati sűrűségfüggvényekkel            | 67        |
| 4.3 Alkalmazás: sorozatgyártású tégely átmérőjének jellemzése                  | 68        |
| 4.4 Konfidencia intervallum becslése, ha a szórás ismert.                      | 70        |
| 4.5 Konfidencia intervallum becslése, ha a szórás nem ismert                   | 73        |
| 4.6 Alkalmazás: csavarszivattyú elméleti folyadékcsatlakozásának meghatározása | 75        |
| 4.7 Adott pontossághoz tartozó mérésszám becslése                              | 76        |
| 4.8 Alkalmazás: adott pontossághoz tartozó mérésszám becslése                  | 78        |
| A 4. fejezet irodalma  | 79        |
| <b>5. KÖZVETETT MÉRÉSEK, HIBATERJEDÉS</b>                                      | <b>80</b> |
| 5.1 Rendszeres mérési hiba terjedése   | 81        |
| 5.2 Alkalmazás: a szinusz-emelő rendszeres hibája                              | 84        |
| 5.3 A véletlen hibák terjedése közvetett mérésnél                              | 89        |
| 5.4 A mérési eredmény megadása   | 91        |
| 5.5 Alkalmazás: átmérő mérés optiméterrel                                      | 95        |
| Az 5. fejezet irodalma   | 101       |

|  |            |
|--|------------|
| <b>6. A VÁLTOZÓK KÖZÖTTI KAPCSOLAT VIZSGÁLATA</b>                        | <b>102</b> |
| 6.1 Korrelációs együttható   | 103        |
| 6.2 Alkalmazás: A korrelációs együttható használata                      | 108        |
| 6.3 A legkisebb négyzetek módszere                                       | 109        |
| 6.4 Korrelációs index  | 117        |
| 6.5 Alkalmazás: polinomiális közelítés a legkisebb négyzetek módszerével | 118        |
| 6.6 Abraham Wald módszere  | 120        |
| 6.7 Alkalmazás: egyenes együtthatóinak becslése Wald módszerével         | 122        |
| 6.8 Konfidencia sávval jellemzett simító spline                          | 124        |
| 6.9 Alkalmazás: kiegyenlítő spline és konfidencia sáv meghatározása      | 130        |
| A 6. fejezet irodalma  | 133        |
| <b>7. A DIGITÁLIS MÉRÉSTECHNIKA ALAPJAI</b>                              | <b>134</b> |
| 7.1 Meghatározások   | 134        |
| 7.2 Az egyenletes kvantálás szabályai                                    | 137        |
| 7.3 A kódolás és a kvantálási hiba viszonya                              | 138        |
| 7.4 A közvetlen és a közvetett A/D átalakítás néhány megvalósítási módja | 139        |
| 7.5 Jellegzetes gépipari digitális működésű eszközök                     | 145        |
| 7.6 A mintavételezés modellje, a tartótag szerepe                        | 146        |
| 7.7 Mintavételezés nulladrendű tartótaggal                               | 148        |
| 7.8 A mintavételezés feltételei  | 150        |
| A 7. fejezet irodalma  | 155        |

## 1. BEVEZETÉS

A legegyszerűbb értelmezés szerint a **mérés** egy fizikai (kémiai, biológiai, stb.) mennyiség nagyságának (számértékének) meghatározása, adott mértékegység rendszer mellett, kísérleti úton. Nyilvánvaló, hogy ez a megfogalmazás csak az egyszerű mérési folyamatokra bizonyul igaznak, mégis a gépészmérnöki tanulmányok elején ezt a megfogalmazást tekintjük kiinduló pontnak.

A mérés története az emberi kultúra bölcsőjéig nyúlik vissza: Simonyi Károly könyvéből (A fizika kultúrtörténete Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.) tudjuk, hogy az egyiptomiak már rendelkeztek a három alapvető mennyiség: a hossz, a tömeg és az idő mérésére szolgáló eszközökkel. Már i.e. 1500-ban volt mérőpálcájuk (kb. 52 cm hosszúságú). A XXI. dinasztia idejéből maradt fenn sziklarajz egy kétkarú mérlegről, és a hozzá tartozó tömeg-etalonokról. Az idő mérésére vízórát (klepszidra) használtak: kúpos, alul lyukas edény, a belső falra felvitt jelzések mutatták azt az időt, amely adott víztérfogat kifolyásához szükséges. Ezek az eszközök ma a Louvre egyiptomi anyagában láthatók.

A mérés a mérnöki-gépészmérnöki tevékenység alapvető momentum, ez kifejeződik abban is, hogy a “mérnök” szó ezzel a szótaggal kezdődik. A mérés fenti egyszerű értelmezésből kiolvasható, hogy a mérés végrehajtásához megfelelő módszereknek és technikai eszközöknek kell a rendelkezésünkre állni: e módszerek és eszközök a **méréstechnika** tárgykörét részét képezik. A mérés technika szorosan kapcsolódik ahhoz a szakterülethez, amelynek jellemzőit kívánjuk megmérni. A mérés technika egyszerű fogalmait tárgyaljuk a “Mérési módszerek” c. fejezetünkben.

A mérés fenti meghatározása azt is tartalmazza, hogy a mérés része a “számérték meghatározása”. Ehhez egységek szükségesek. Az alapvető fizikai mennyiségek egységei ismertek a középiskolából: 1 m, 1 s és 1 kg. Említést érdemel, hogy napjainkban a méter pontos meghatározást a kripton 86 izotóp sugárzásához kötötték, magyar fizikus Bay Zoltán javaslatára (1965).

A mérés a technikai lebonyolításon túl egy számítási (**jelfeldolgozási**) folyamatot is tartalmaz. E folyamat jórészt független az adott speciális szakterülettől, és

közös, általános módszereket, szabályokat alkalmaz. Tárgykörünk éppen e közös módszerek közül a legegyszerűbbek bemutatása.

E módszerek nagy része valószínűségelméleti ismeretekre támaszkodik. Ezért csatoltunk a jegyzethez egy rövid összefoglalást a felhasznált valószínűségszámítási fogalmakról és eljárásokról. Tudatosan foglaltuk össze a valószínűségelmélet alapjait mérnöki szempontból, és mellőztük a szigorú tárgyalás pontosságát. Tettük ezt annak reményében, hogy ez elegendő ahhoz, hogy a hallgató lássa e módszerek mérnöki alkalmazását. Abban bízunk, hogy a gépészmérnök hallgató az alkalmazásokat látva eredményesebb foglalkozhat a Valószínűségelmélet anyagával a Matematika tárgykörében.

A jegyzet végén rövid bepillantást nyújtunk a **digitális jelfeldolgozás** kérdéskörébe. A jelenleg tanulmányait végző mérnökgeneráció főként ilyen típusú mérésekkel fog találkozni pályája során, ezért az alapok megismerése után – még esetleg a teljes matematikai apparátus ismerete nélkül is – az érdeklődő hallgatók képet alkothatnak a tárgykőről.

A könyv szerzői a BME Gépészmérnöki Kar Hidrodinamikai Rendszerek tanszékén és a Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika tanszékén dolgoznak. A könyv megírását mindkét tanszék munkatársai önzetlenül segítették, a példa-anyag összeállításával és hasznos kritikai megjegyzésekkel. Támogatásukat köszönik a szerzők.

2013. szeptember.

A szerzők

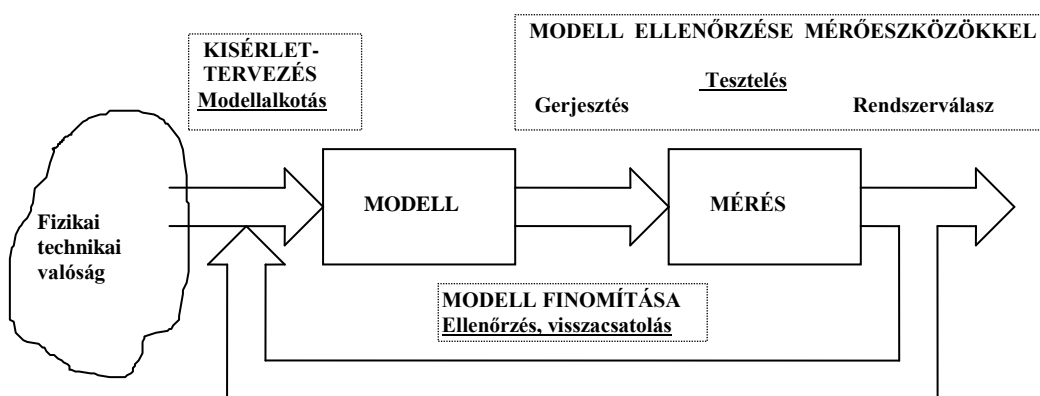
## 2. A MÉRÉS

### 2.1 A mérés, mint folyamat, fogalmak

A mérési folyamatok és a valós fizikai-technikai világ között modellalkotási, leképzési kapcsolat áll fenn [2.1].

E leképzés fő mozzanatai:

- mérési stratégia kidolgozása
- megfigyelés és a modelljellemzők előzetes meghatározása
- a modell **méréssel történő ellenőrzése**
- kiértékelés és finomítás, az első két mozzanatra visszacsatolva



2.1. ábra. A mérés, mint munkafolyamat

A **mérési munkafolyamat** kezdetén, bemenetén, a vizsgált jelenséggel kapcsolatosan rendszerint már a priori (előzetes) ismeretekkel rendelkezünk, és már megalkottunk egy előzetes modellt is.

Szemléltetésképpen e fejezetben többször hivatkozunk majd egy hengeres test térfogatának mérésére. E feladat segítségével az előző megállapítások értelmezhetőek: A priori tudjuk, hogy geometriai, ezen belül hosszúság mérési feladattal állunk

szemben. A feladat matematikai modellje ismert,  $V = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot h$ , ahol  $d$  a henger átmérője

és  $h$  a magassága. A konkrét mérés mindig egy modellezési folyamatba van beágyazva.

Ha a megadott előzetes modellel a megkívánt (modellezési) pontosság nem érhető el, akkor egy iterációs folyamatban a valóság leképezését finomítani kell.

Belátható, hogy a mérési folyamat eredményének, a leképezés végleges modelljének (az előzőekben már említett henger esetében legyen például  $V = 3,435 \pm 0,004 \cdot \text{mm}^3$ ) helyességét a **modellezési és a mérési hiba** befolyásolja.

A két hiba ok között alapvető különbség van. A **modellezési hiba** a helytelen levezetés, vagy a hibás előzetes ismeretek miatt van, hiszen a modell mindig a valóság leegyszerűsítésén, a lényeg kiemelésén alapszik, a jelenséget csak véges pontossággal képes leírni. A mérendő henger palástjának alkotója például nem párhuzamos a tengellyel és nem egyenes, hanem görbe vonal, és az alakzat valójában enyhén "hordós", tehát a matematikai modell hibás, ill. korlátozott pontosságú. Ha tehát már a feltételezett kiindulási (matematikai) modell hibás, akkor a még oly pontosan kivitelezett mérési eljárás sem adhat kielégítő eredményt a fizikai-technikai valóság megközelítésében.

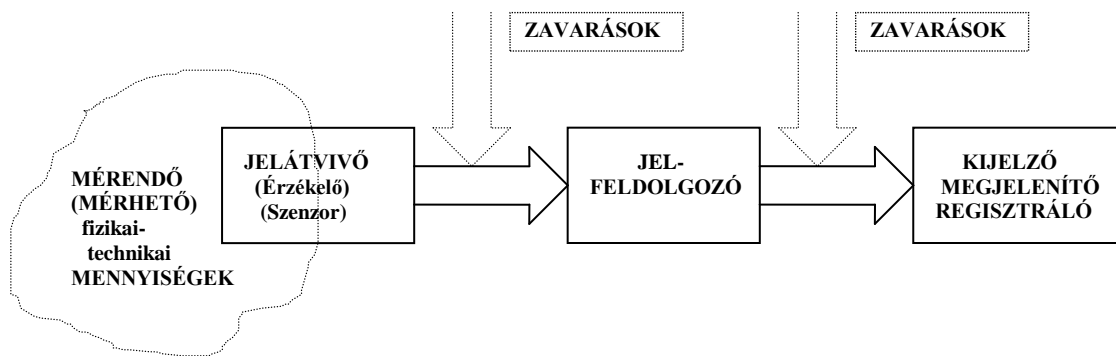
A **mérési hibák** a mérés lebonyolításakor és kiértékelésekor, valamint a mérőeszközök működése közben keletkeznek. A hibákkal később külön foglalkozunk.

A mérés és a modellezés összefüggésének egyenes következménye, hogy a modellalkotás hibája az az ésszerű korlát, amelyet a mérés pontossági követelményeinek megállapításakor gazdaságossági és ésszerűségi okokból szem előtt kell tartani. **Teljesen irracionális dolog lenne egy durva modell paramétereit nagy pontossággal és ennek folytán nagy költséggel meghatározni!**

Fontos tudni, hogy van a mérési folyamatnak egy **metrológiai aspektusa** is. Ez egyszerűen fogalmazva "skálák, mércék, etalonok és a mértékegységek, kérdéskörével" foglalkozik.

A **mérőlánc** felépítése alapján az előbb ismertetett mérési munkafolyamatot tükrözi, annak mintegy "**hardveres**" műszaki eszközökkel való **megvalósítása**.





2.2. ábra. A mérés jelfolyama az általános mérőlánc átviteli tagjain

A mérőláncban szereplő kifejezések magyarázatát a részben a szövegben, részben a fogalmak felsorolásánál lehet megtalálni.

A mérőlánc állhat több eszközből (átviteli tagból), ezek kapcsolása lehet soros, párhuzamos és visszacsatolt. Ez utóbbi a fogalmakkal kapcsolatosan megjegyezzük, hogy a mérés-és műszertechnika tudományának eszköztárához tartozik a rendszer-technika is, amelynek segítségével a fizikai-technikai folyamatok vizsgálata idő-és operátor tartományban egyaránt lehetővé válik.

A mérőlánc fent bemutatott struktúrája azonban egyetlen eszközön belül is megjelenhet. A műszertechnikában szokás például, hogy egyetlen összetettebb mérő-eszközt is "mérőláncként" fogjunk fel. Gondoljunk egy ismert gépészeti mérőeszközre, a mérőóraára. A mérőóra tapintója a *jelátvivő*, amely a bemeneti elmozdulást a *jelfeldolgozóként* funkcionáló fogasléc-fogaskerék áttételen keresztül a skála előtti mutatóhoz, azaz a *kijelzőhöz* közvetíti.

A szenzor fogalom a jelátvivőnek azt a részét jelöli, amelyik a mérendő (mérhető) mennyiséggel közvetlen kapcsolatba kerül. A jelátvivő tag bizonyos esetekben lehet maga a szenzor is, de gyakoribb eset az, hogy a szenzor egy alkotórésze, a "lelke" a jelátvivőnek. A gépészeti mérés technikában a mérőlánc bemutatására alkalmas egy olyan gyorsulásmérő rendszer, amelyben a jelátvivő szenzora egy nyúlásmérő bélyeges áramkör. A mérőlánc jelátvivője egy a jelátvivő házába befogott tartóra szerelt szeizmikus tömeget tartalmaz. A nyúlásmérő bélyegeket, mint szenzorokat a tartóra ra-

gasztják fel, u.n. Wheatston –hídba kapcsolva. A jelátvivő házára ható gyorsulás a tartón keresztül a tömegre hat, és a tömeg deformálja a tartót. A deformációs erő arányos a gyorsulással, és a nyúlásmérő bélyegekből álló mérőhíd kimenetén (két ága között) a gyorsulással arányos villamos feszültség mérhető (a gyorsulás-jellel modulált vivőfrekvenciás híd-tápfeszültség). A szenzor passzív, tehát segédenergiát igényel. A lánc második tagja, a jelfeldolgozó egység táplálja a stabil szinuszos feszültséggel (vivőfrekvencia) a hidat, majd demodulálja és szűri a híd kimenő jelét. A lánc harmadik tagja a kijelző, amely lehet digitális, vagy analóg.

A **műszerek működési módja** alapvetően kétféle lehet: **statikus és dinamikus**.

A statikus működés ismérve, hogy mind a bemeneti, mind a kimeneti jel időben állandó értékű. Előfordulhat még az u.n. kvázi statikus működés is, amelyre a bemeneti és kimeneti jelek igen lassú változása jellemző. Ezen esetekben a **statikus érzékenység** a jelek változásának szakaszában is változatlan marad.

A **dinamikus szakaszban**, tehát a jelek változása közben az érzékenység fogalmát nem lehet alkalmazni, mert a két jel aránya a változás gyorsaságától erősen függ. Ezt a jelenséget más néven frekvencia-függésnek is nevezzük, és oka, hogy a mérőlánc minden tagja energiatárolókat is tartalmaz. Az időben változó mennyiségek mérése például jellegzetesen dinamikus mérés. Az ilyen mérési feladatok felvetnek néhány olyan problémát, amelyek a statikus mérések során nem jelentkeznek. A mérőlánc egyes átviteli tagjai dinamikus viselkedésének, valamint a mérendő jel (bemenő jel) spektrumának ismeretében meghatározhatóak a mért mennyiség (kimenő jel) tulajdonságai, és a mérési eljárás minőségi jellemzői. A bemenő és kimenő jel frekvencia-függésének szemléletes ábrázolása az u.n. Bode-diagramon történik. Ezt más néven amplitúdó-fázis frekvenciamenetnek nevezzük. A frekvenciamenet számítással és méréssel egyaránt meghatározható, alapja az átviteli függvény, amely a mérőeszköz, vagy mérőlánc matematikai modelljéből, a differenciálegyenletből is származtatható.

A hosszúság és az elmozdulás mérése, és néhány ezekhez kapcsolódó mérőeszköz, valamint mérendő fizikai mennyiség segítségével az alábbiakban bemutatjuk a mérési módok közötti különbséget.

Van olyan hosszmérő eszköz, amely kizárólag statikus mérésre alkalmas (pl.: mérőhasáb). Ha a mérendő folyamat időben igen csak lassan változik, akkor erre a

kvázi statikus mérésre alkalmas lehet egy mérőóra is, hiszen nem csupán egyetlen méretet testesít meg, mint a mérőhasáb, hanem analóg skálával rendelkezik. A szemlélet bővítése érdekében megjegyezzük, hogy természetesen más fizikai mennyiség is visszavezethető elmozdulás mérésére, gondoljunk például a rugós, vagy kengyeles erőmérőkre. Ez utóbbi eszközbe például gyakran mérőórát építenek be “jelfeldolgozó” és “kijelző” tagként.

Vannak azután olyan mérőeszközök, amelyek egyaránt alkalmasak időben állandó és változó jelek mérésére is, ez utóbbi esetben természetesen csak a felső határfrekvenciáig terjedő frekvencia tartományban. Ilyen eszközök például az induktív útagok. Ezek már az önálló tagokra bontható, klasszikus mérőlánc részei. A korábbiakban a mérőláncot a nyúlásmérő bélyeges gyorsulásérzékelő és a hozzá csatlakozó kiszolgáló egységek segítségével mutattuk be. Az útagot, mint jeltovábbítót - hasonlóan a nyúlásmérő bélyeges rendszerhez - a mérőhíd (ebben egybeépítve egy jelfeldolgozó és kijelző tag található) látja el a működéshez szükséges vivőfrekvenciás “tápfeszültséggel”, ez és dolgozza fel az útag kimenetén megjelenő modulált jelet is. Érdekességként megjegyezzük, hogy az előzőekhez hasonlóan, több fizikai mennyiség dinamikus mérésére szolgáló jeltovábbító “lelkét” induktív útag, vagy nyúlásmérő bélyeges híd képezi. Például induktív elmozdulás érzékelő, vagy nyúlásmérő bélyeges híd van bizonyos típusú nyomásérzékelőkben, erőérzékelőkben, de a már említett nyúlásmérő bélyeges mellett van induktív útagot tartalmazó szeizmikus gyorsulásérzékelő is.

A dinamikus mérésre alkalmas eszközök között van olyan is, amelyik viszont kizárólag dinamikus mérésre alkalmas, és statikusan egyáltalán nem, vagy csak hibásan működik. Kizárólag dinamikusan működnek azok az (elektrodinamikus) mérőeszközök, amelyek az indukciós törvényen alapulnak. Ezen eszközök tartalmaznak egy légréssel rendelkező mágneses kört, amelybe egy rugalmasan felfüggesztett és egyenesbe vezetett tekercs merül bele. A tekercs és a mágneses mező közötti sebességkülönbség hatására a tekercsben a sebesség-különbséggel arányos villamos feszültség indukálódik. Ilyen elven működik a dinamikus mikrofon, amelynek a membránjára van a tekercs felszerelve, és jellemzően extrém kis dinamikus nyomások mérésére alkalmas, valamint a szeizmikus sebességmérő, amelyben a tekercs egy speciálisan felfüggesztett tömegre van erősítve.

Kvázi statikus üzemmódban csak nagy hibával, statikusan pedig egyáltalán nem lehet mérni a piezoelektromos gyorsulásérzékelőkkel, és minden olyan érzékelővel, amelyben a szenzor piezoelektromos kristály, vagy kerámia. A piezoelektromos érzékelők ugyanis a rájuk megfelelő irányban gyakorolt erő hatására a villamos töltések szétválasztásával, tehát villamos feszültséggel “válaszolnak”. Ezek a töltések azonban az idő multával “rekombinálódnak”, azaz visszaáll az eredeti polarizációs állapot.

## **2.2 Fontosabb mérés-és műszertechnikai fogalmak**

A metrológiai fogalmak tételes felsorolása és magyarázata mellett, az összefüggések és az esetleges hierarchiák tisztázása érdekében, konkrét gépészeti mérési feladatok segítségével mutatjuk be a szabványos fogalmak jelentését és kapcsolódásait. A fogalmak bemutatásánál a [2.9] előírásait alapul véve, igyekeztünk közérthetően fogalmazni. A szabványos definíciók a fenti irodalomban megtalálhatóak. Az itt közölt fogalmak sorrendjében az átfogó jellegű, magasabb szintű fogalmaktól indulva haladtunk a speciálisabb kifejezések felé.

### ***Metrológia***

A mérés tudománya, a mérésekkel kapcsolatos ismeretek teljes köre. Magában foglalja a méréseknek mind az elméleti, mind a gyakorlati szempontjait, függetlenül a pontossági szinttől és a tudományban, vagy a műszaki életben való alkalmazás területétől [2.2].

### ***Mérési folyamat***

Négy fő mozzanatot tartalmazó, visszacsatolt tevékenység (ld.: 2.1. ábra). A mérési stratégia kidolgozása, a megfigyelés és a modelljellemezők előzetes meghatározása, a modell méréssel történő ellenőrzése, végül a kiértékelés és finomítás, az első két mozzanatra visszacsatolva.

## **Modellezés**

A "fizikai" valóság összetett, a keresett mennyiség meghatározása csak meghatározott szempontok szerinti, egyszerűsített feltételek mellett lehetséges. A modellalkotás tehát mindig lényeg-kiemelés, a struktúra és a struktúrán belüli összefüggések meghatározása. A modellezési folyamat végén méréssel ellenőrizzük a megalkotott modellt, és szükség esetén módosítunk.

## **Mérőlánc**

A mérési folyamaton belül a konkrét mérési feladat megvalósításának technikai eszközei képezik a mérőláncot. Három lényeges átviteli tagot lehet megkülönböztetni a mérőláncon belül. Ezek sorrendben a jelátvivő (nevezik érzékelőnek is), a jelfeldolgozó, és a kijelző (ezt helyettesítheti a megjelenítő, vagy a regisztráló).

## **Műszerek működési módja**

Alapvetően kétféle lehet: *statikus* és *dinamikus*. A statikus működés ismérve, hogy mind a bemeneti, mind a kimeneti jel időben állandó értékű, de legalább a mérés időtartama alatt állandónak tekinthető. Előfordulhat még az u.n. kvázi statikus működés is, amelyre a bemeneti és kimeneti jelek igen lassú változása jellemző. A dinamikus működés esetében a bemenő és a kimenő jelek időben változnak. A dinamikus mérés célja egy fizikai mennyiség pillanatnyi értékének, vagy időbeli lefolyásának meghatározása.

## **Statikus érzékenység**

Állandó arányérték, amely a statikus méréshez alkalmazott műszert jellemzi. Az érzékenység a kimenő és a bemenő jel közötti hányados testesíti meg.

## **Mérés**

Tervszerű, a metrológia előírásai alapján végrehajtott összehasonlító tevékenység, amelynek célja egy ismeretlen mennyiség értékének meghatározása gyakorlati módszerrel. A mérés magában foglalja a szükséges számítási műveleteket is. Látni fogjuk, hogy a keresett ismeretlen mennyiség meghatározásának elvi korlátjai vannak,

ezért meg kell elégednünk az ismeretlen mennyiség becslésével. Eredményül egy, a választott mértékegységben kifejezett számértéket kapunk.

### ***Statikus mérés***

A statikus mennyiségek értéke (bizonyos műszaki szakterületeken a stacionárius) a mérés időtartama alatt állandónak tekinthető. A statikus jelző nem a mérési módszerre, hanem a mérendő mennyiségre vonatkozik.

### ***Dinamikus mérés***

Egy mennyiség pillanatnyi értékének, vagy időbeli lefolyásának meghatározása.

### ***Valódi érték***

A modellezés során definiált érték. Pontos meghatározása nem lehetséges, mert a mérés gyakorlati tevékenység, amelyet mindig hiba terhel [2.4]. E jegyzetben, a könnyebb érthetőség érdekében, a **hiba** meghatározása során a valódi érték kifejezést használjuk, bár a legújabb “Metrológiai Értelmező Szótár” [2.9] a gyakorlati alkalmazásokhoz a valódi érték helyett a **helyes érték** kifejezést ajánlja.

### ***Konvencionális valódi érték (helyes érték)***

Valamely konkrét mennyiségnek tulajdonított, gyakran megegyezés alapján elfogadott olyan érték, amely az adott alkalmazás szempontjából megfelelően kis bizonytalanságú. Példaként megemlítjük, hogy egy referencia etalon által megvalósított mennyiségnek tulajdonított érték az adott helyen a mennyiség helyes értékének tekinthető (hiszen tökéletesen biztosak nem lehetünk az etalon valódi értéke felől, mert nincs akivel, ahol és amivel ezt hibátlanul meg lehetne mérni). A helyes érték fogalmának megértését segítheti, hogy régebben ezt **tulajdonított értéknek, legjobb becslésnek** nevezték. Előfordulhat, hogy a helyes érték megállapításához több mérés szükséges.

### ***Mérendő és mérhető mennyiség***

Általában a mérőlánc bemenő jele (mennyisége) a mérendő mennyiség, de van sok olyan mérési feladat, amely esetében a mérendő mennyiség **“nem elérhető”**, helyette csak a **mérhető mennyiség** megállapítását tűzhetjük ki célul. E fejezetben, a közvetett mérés kapcsán egy ilyen feladatot mutatunk be. A mérendő (mérhető) mennyiség előírt hibahatárokra belüli meghatározása a mérési folyamat tulajdonképpeni célja.

### ***Mérőszám***

Hivatalosan: Egy mennyiség értékének és az érték kifejezésében használt egységnek a hányadosa. Egyszerűbben: A mért mennyiség számszerű értékét meghatározott hibával képezi le (tükrözi), és általában a mérőlánc kimenő jele (mennyisége).

### ***Mértékegység (egység)***

Valamely fizikai mennyiség szabványokban rögzített értéke, amelyet lehetőség szerint valamilyen természeti állandóhoz kötnek. Több fontos mértékegység esetében ez a "kötődés keresés" utólagosan történt meg, és többször változott az idők folyamán (pl.: méter).

### ***Mért mennyiség értéke***

Adott mennyiség nagyságának kifejezése a mérőszám és egy mértékegység szorzataként.

### ***Mérési eredmény***

A mérendő mennyiségnek tulajdonított, méréssel kapott érték.

A meghatározandó mennyiség mérőszáma (esetleg több mérőszámból kiszámított érték) a mértékegység, a hibák, és a bizonytalanságok megadásával egészül ki. A mérési munka [2.7] szerint csak akkor tekinthető befejezettnek, ha az elvégzett munka statisztikai kiértékelése is megtörtént.

### ***Mérési hiba***

A mért mennyiség és a mennyiség valódi értéke közötti különbség. A mérés során nyert eredmények mindegyike bizonytalanságokkal terhelt. E bizonytalanságok forrásai lehetnek a modell, a mérőeszközök, a mérési eljárás pontatlanságai, a mérést végző személy pontatlansága és a környezet által okozott zavarok.

### ***Mérőeszköz hibája***

A mérőeszköz jelzésének és a bemenő mennyiség valódi értékének különbsége.

### ***Hibakorlátok (mérőeszközé)***

Határértékek, amelyeket egy adott műszer adatlapján, vagy szabályzatban rögzítenek.

### ***Ismétlőképesség***

A mérési eredmény ismétlőképessége a mérendő (mérhető) mennyiségek értékére kapott ismételt mérések egyezésének mértékét jelenti, ha az egyes méréseket ugyanazon személy, ugyanazon módszerrel, eszközökkel, és körülmények mellett végezte, és a mérések között rövid idő telt el.

### ***Reprodukálhatóság***

Egy mérendő mennyiségre kapott értékek egyezésének mértéke jelenti a reprodukálhatóság mértékét akkor, ha az egyes méréseket különböző személyek különböző módszerekkel és eszközökkel, eltérő körülmények között és más-más helyen és időben végezték.

### ***Korrekción***

Olyan érték, amelyet a korrigálatlan eredményhez előjelesen hozzáadva, kompenzálja annak ***becsült rendszeres hibáját***. A korrekción tehát a rendszeres hibával megegyező értékű, de ellentétes előjelű, és saját maga is tartalmaz bizonytalanságot. A ***korrekciós tényező*** a korrigálatlan eredmény beszorzásával szünteti meg annak becsült rendszeres hibáját.



### ***Etalon, vagy összehasonlító mennyiség***

Egy mennyiség egységét, vagy egy, vagy több ismert értékét vonatkoztatás céljából meghatározó, megvalósító, fenntartó, reprodukáló, vagy mérő érték, mérőeszköz, anyagminta, vagy mérőrendszer. Gyakori formája például egy mérték: Mérőhasáb, mérlegsúly, normálem, stb. Az etalonok több szintjét definiálták (nemzetközi, nemzeti, stb.)

### ***Segédmennyiség***

Ez a fizikai mennyiség nem a mérendő mennyiségből nyerhető, de a mérés elvégzéséhez, a mérőrendszer működtetéséhez elengedhetetlenül fontos (pl.: villamos tápfeszültség, pneumatikus tápnyomás).

### ***Köztes mennyiség***

A közvetett mérésben, a jelfeldolgozás során gyakran szükség van arra, hogy az eredeti mérendő mennyiséget egy, vagy több vele analóg (köztes) mennyiséggé alakítsanak át a további feldolgozás érdekében (pl.: induktív gyorsulásmérő). Ugyancsak a közvetett mérésben lehet szükség egy, vagy több olyan (köztes) mennyiség mérésére, amelyek a matematikai modell szerinti végeredmény számításához szükségesek (pl.: csapágygörgő térfogata).

### ***Befolyásoló mennyiség***

Ez a mennyiség nem tárgya a mérésnek, befolyásolja a mérési eredményt, de közben tartható, tehát hatása figyelembe vehető. Ilyen lehet például a kengyeles mikromérő hőmérséklete hosszmérés közben.

### ***Zavarás***

Olyan mennyiség, amely nehezen, vagy nem közben tartható módon befolyásolja a mérési folyamatot.

### ***Mérési elv***

A mérés tudományos alapja, a mérési feladat megoldása során alkalmazott **fizikai törvényszerűséget**, elveket jelenti.

### ***Mérési eljárás***

A mérési folyamat részét képezi, és a mérési elv és a mérési módszer együttes, célszerű alkalmazását jelenti abból a célból, hogy mérőeszközökkel a mérőszámokat meghatározzuk. Megjegyezzük, hogy **[2.4]** a mérést végző személyt is a mérési eljáráshoz tartozónak tekinti. A mérési eljárást általában írásban is rögzítik.

### ***Mérés kivitelezése***

A mérőeszköz működési módját (érintéses, vagy érintésmentes) és a mérés gyakorlati kivitelezését (konkrét mérőeszközök) értjük a mérés kivitelezése alatt.

### ***Mérőrendszer***

A mérés elvégzéséhez szükséges **mérőeszközök és segédeszközök** összessége. A mérőrendszer több mérőláncot is tartalmazhat.

### ***Mérési módszer***

A mérési módszer a szabályok rendszere, a műveletek logikai sorrendje, amely alapján a mérést végzik. Az egyes mérési módszerekhez meghatározott fizikai elven működő mérőrendszerek kapcsolódhatnak.

### ***“On-line” és “off-line” mérőrendszerek***

A mérési eljárás és a mérendő tárgy, vagy folyamat fizikai kapcsolódása szerint közvetett (off-line) és közvetlen (on-line) mérőrendszereket különböztetünk meg. Az első esetben a mérési eljárás információ feldolgozó láncába “beépül” a mérést végrehajtó ember is, pl. leolvassa az adatokat és számítógépbe viszi.

Az on-line rendszerben a mérés és az adatfeldolgozás automatikusan történik.

### ***Mérési stratégia***

A matematikai modell alapján kijelöli a célszerűen (ésszerűen és gazdaságosan) alkalmazható *mérési elvet, mérési módszert és ezekkel összefüggően az alkalmazandó mérőeszközöket.*

A következőkben egy táblázatban tömören és példákkal illusztrálva felsoroljuk a gyakorlatban leginkább előforduló mérési módszereket:

| <b>Mérési módszer<br/>(metrológiai aspektus szerint)</b>   | <b>Példák mérőeszközökre<br/>és mérési feladatra</b>  |
|--|---|
| <p style="text-align: center;"><b>Kitérítés</b></p> <p>A mérendő mennyiség valamilyen fizikai törvény és kapcsolat révén erőt, vagy nyomatékot idéz elő. A műszerben ennek megfelelő ellenelő, vagy ellennyomaték keletkezik. Az egyensúlyi helyzet bekövetkezésekor a mennyiség a skála és mutató segítségével olvasható le.</p>  | <p style="text-align: center;"><b>Mérőóra</b> hossz méréshez</p> <p style="text-align: center;"><b>Forgótekerceses műszer</b><br/>elektromos áram méréséhez</p> <p style="text-align: center;"><b>Rugós erőmérő</b></p>   |
| <p style="text-align: center;"><b>Összehasonlítás,<br/>vagy komparálás</b></p> <p>A mérendő mennyiséget azonos típusú, ismert nagyságú mennyiséggel hasonlítják össze.</p>   | <p style="text-align: center;"><b>Kétkarú összehasonlító mérleg</b></p> <p>A mérendő tömeggel egyenlő súlyt helyeznek a tömeggel ellentétes oldalra (nyomaték-összehasonlítás). Ez a tömegmérési módszer csupán a tömegek összehasonlítására alkalmas: "kisebb", "nagyobb", "egyenlő".</p> <p style="text-align: center;"><b>Mérőléc</b></p> <p>Etalon skála osztásaihoz hasonlítjuk a mérendő hosszúságot</p>  |
| <p style="text-align: center;"><b>Kiegyenlítés,<br/>vagy kompenzáció,<br/>(null-módszer)</b></p> <p>A mérendő mennyiség értékét az általa létrehozott változás kiegyenlítésével állapítjuk meg. Ha a leolvasás a műszer mutató "0" állásában történik, akkor null-kompenzációról is szokás beszélni. Gyakran a kompenzáláshoz szükséges fizikai mennyiséget használják fel a mérőszám megállapítására (közvetett mérés).</p> | <p style="text-align: center;"><b>Kétkarú kompenzációs mérleg</b></p> <p>Cél a mérendő tömeg által okozott kitérés kiegyenlítése a lehetséges minimális hibával, és a kiegyenlítéshez szükséges ellenelő (súly, nyomaték) egzakt megadásával.</p> <p style="text-align: center;"><b>Hőmérséklet mérése kompenzográffal</b></p> <p>Hőmérséklettel arányos villamos feszültség hatását villamos segédmennyiséggel kompenzálják.</p> <p style="text-align: center;"><b>Impedancia</b></p> <p>Villamos impedancia mérése hidkapcsolással, null-detektorral.</p> |
| <p style="text-align: center;"><b>Különbségi</b></p> <p>A mérendő mennyiség és egy azonos típusú ismert, de kismértékben eltérő mennyiség különbségének mérése.</p>  | <p style="text-align: center;"><b>Optiméter</b></p> <p>Csap-átmérő mérése mérőhasábokkal (közeli mérés), majd ezt követően a mérőhasáb kombináció és a munkadarab közötti, kismértékű különbség mérése tapintós optiméterrel.</p>   |
| <p style="text-align: center;"><b>Helyettesítés</b></p> <p>A mérendő mennyiséget azonos típusú, ismert értékű mennyiséggel helyettesítik. Eredményül a kijelzett érték változatlan marad, vagy a kismértékű eltérést skála segítségével mérik.</p>   | <p style="text-align: center;"><b>"Borda"-rendszerű mérleg</b></p> <p>Az alaphelyzetben kiegyenlített mérlegnél a mérendő tömeggel megegyező súlyt vesznek le a mérlegkarról, a tömeg oldalán.</p>  |

2.1. táblázat. A mérési módszerek és néhány mérőeszköz bemutató táblázata

### ***Közvetlen mérés***

Ennek a ***stratégiának*** az alkalmazása során a mérendő fizikai mennyiséget egy lépésben, egyetlen érték-megtestesítővel hasonlítják össze. Ilyen például a hosszúság mérése abszolút mércével ellátott mérőrúddal, amely legtöbbször üvegből, vagy fémből készült. Egyszerűségéből következően alkalmazhatósága igen korlátozott, tekintettel a mérendő mennyiségek sokféleségére, hiszen nem minden fizikai mennyiség esetében rendelkezünk közvetlenül felhasználható etalonokkal.

### ***Közvetett mérés***

Vannak - és nem kis számban - olyan fizikai mennyiségek, amelyek közvetlen módszerrel egyáltalán nem mérhetőek, gondoljunk például az olvadt acél hőmérsékletének mérésére, ahol a hőmérsékletet az anyag által kibocsátott fény spektruma alapján határozzák meg, hiszen egyrészt nem létezik stabil hőmérséklet etalon, másrészt igen magas a mérendő hőmérséklet. Hasonlóan, csak közvetett módon mérhető fizikai mennyiség például a teljesítmény is.

A műszaki (gépészeti) gyakorlatban igen elterjedten alkalmazzák ezt a ***stratégiát***, különösképpen a nem villamos mennyiségek ***villamos, vagy optikai elven*** történő mérésénél. E módszer alkalmazása során a mérendő mennyiséget ún. ***köztes mennyiségek*** láncolatán keresztül vezetik vissza egy, vagy több - műszaki szempontból előnyösen kezelhető - mennyiségre.

Gondoljunk a villamos feszültség mérésének egyszerű módjára, ún. forgótekerceses, vagy Deprez műszer segítségével. A mérendő feszültség a műszer tekercsén áramot "hajt" át. Ez az áram az állandó mágnessel keltett mágneses kör légrésében ún. Lorenz erőt hoz létre, amely a mutató kitérését eredményezi. Ez a kitérítő erő az árambevezető rugók visszatérítő erejével tart egyensúlyt. A mérőeszköz segítségével a feszültséggel analóg, de vele nem azonos kimenő mennyiséget, a mutató szögelfordulását hozzuk létre.

Egy hengeres alkatrész térfogatának meghatározásához, eltérő eredő hibával, többféle matematikai modellt lehet készíteni. Visszavezethetjük például a térfogat mérését hosszmérésekre ( $h$  és  $d$ ), mint köztes mennyiségekre, de tömeg mérésre is, ha a sűrűség kellő pontossággal ismert, vagy fordítva.

Közvetett mérés például a hosszúság precíziós mérése a fényinterferencia elvének felhasználásával, itt a köztes mennyiség a fény hullámhossza (ld.: mérőhasábok méretellenőrzése). De közvetett módszerrel történhet például a gyorsulás mérése, kettős rugós vezetékre felfüggesztett szeizmikus tömeg elmozdulásával, induktív útdó elvén működő eszközzel.

**Fontos megjegyzések az analóg és digitális mérőeszközökkel kapcsolatban:**

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy *analóg, vagy digitális mérési módszerről (!)*, illetve *eljárásról* beszélnek. Ez azért **helytelen**, mert a felhasznált műszaki eszközöket helyezik a meghatározás középpontjába. Ezzel szemben a mérőeszköz és annak működési módja együttesen a *mérés kivitelezésének* fogalomkörét alkotják. A *mérési eljárás* pedig egy másik gyűjtőfogalom, amelybe a mérési módszer és a mérési elv tartoznak bele (Ld.: 2.2. táblázat).

Az ilyen módon történő csoportosítás azért sem célszerű, mert sok digitális mérőeszköz alapvetően analóg módon működik, és csupán a kijelzése digitális. Ugyanakkor az analóg méréstechnikában az is ismert tény, hogy valójában az analóg műszerek többsége sem működik igazán "analóg" módon, és ez különösen a mechanikus és elektromechanikus eszközök esetében igaz. Ezek az eszközök súrlódó építőelemeket tartalmaznak, ezért a jelleggörbájük felnagyított képén azt látjuk, hogy folyamatosan növekvő bemenet hatására a kimenetük diszkrét "lépcsők" sorozatából áll. Ezzel a kérdéskörrel a feloldás és érzékenység témakörénél részletesen foglalkozunk.

A "digitális" jelző alkalmazása, elsősorban a gépiparra jellemző hosszúság és szög mérések esetében, a nemzetközi szakirodalomban igen elterjedt. A **digitális hossz-és szögmérő eszközök** (nem módszer!) kifejezés használata teljesen indokolt. A különféle digitális hossz- és szögmérő rendszerekben eddig kétféle **fizikai elv** terjedt el, az optoelektronikus (pl.: Linear Scale) és az elektromágneses (pl.: Induktosin), míg **a mérés módszere** mind az abszolút (kódolt), mind az inkrementális mérőeszközök esetében is egyaránt **összehasonlító**, hiszen a mérendő mennyiséget fix osztásközű mérőléccel hasonlítjuk össze.

**Összefoglalásként** a következő táblázat két mérési feladat segítségével segít rendszerezni az előzőekben ismertetett fogalmakat:

| Mérési feladat ⇒          |                         | h (hosszúság) ⇒ stratégia: <u>közvetlenül</u> |                 |                  |                            |                        |                                   |
|---------------------------|-------------------------|---|-----------------|------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------------------|
|                           |                         | V (térfogat) ⇒ stratégia: <u>közvetetten</u>  |                 |                  |                            |                        |                                   |
| <b>Mérési eljárás</b>     | Mérési módszer ⇒        | Összehasonlító<br>↓                           |                 | Kitérítéses<br>↓ | Különbségi<br>↓            |                        |                                   |
|                           | Mérési elv ⇒            | Mechanikai                                    | Optikai         | Mechanikai       | Optomechanikai             | Villamos               |                                   |
| <b>Mérés kivitelezése</b> | Mérés módja (működés) ⇒ | Érintéses                                     | Érintésmentes   | Érintéses        | Érintéses                  | Érintéses              | Érintésmentes                     |
|                           | Mérőeszköz ⇒            | Mérőléc                                       | Abbe komparátor | Mérőóra          | Függőleges Abbe hossz-mérő | Tapintós induktív útdő | Nyitott mágnes-körű induktív útdő |

2.2. táblázat. Néhány fontos mérés-technikai fogalom rendszerezése, példákkal kiegészítve

## 2.3 Mérési hibák

A mérőeszközök, mérőműszerek és mérési eljárások pontatlanságai, valamint a környezet és a mérést végző személy által okozott zavaró hatások miatt minden egyes mért érték hibákkal, bizonytalansággal terhelt [2.5], és gyakran maga a mérendő fizikai folyamat is zajos.

A mérési hibák ***eredetük szerint*** a ***modellalkotás, a mérési eljárás*** (elv és módszer), valamint a ***mérés kivitelezésének*** (mód, mérőeszköz, mérő személy) hibái lehetnek.

Az eredményben történő ***megjelenítés formája szerint*** megkülönböztetünk ***abszolút és relatív hibát***. Az abszolút hiba a mérési eredmény mínusz a mérendő mennyiség valódi (helyes) értéke. ***Vigyázat!*** Ez a fogalom nem azt jelenti, hogy a hiba nagyságának abszolút értékét kellene venni, hanem a mérés technikában ezt az “abszolút” hiba elnevezést a hányados típusú relatív hibától való megkülönböztetés miatt vezették be. A relatív hiba ugyanis az abszolút hibának és a valódi értéknek a hányadosa.

Végül ***jellegük szerint*** csoportosítva előfordulhatnak ***durva, rendszeres és véletlen hibák***.

### 2.3.1 Hibák csoportosítása eredetük szerint

Szemléltetésként határozzuk meg a fejezet bevezetőjében már említett henger térfogatát úgy, hogy az átmérő és a magasság mérését tolómérővel végezzük. Néhány lehetséges mérési hiba ***eredet szerinti csoportosítását*** szemléltetjük a következő táblázatban:



| MODELL   | ELJÁRÁS  | KIVITEL   |
|--|--|---|
| $V = \frac{d^2}{4} \pi \cdot h$ <p><b>Hiba:</b><br/>A munkadarab valós alakja eltér a geometriai hengertől, például hordós</p> | <p><b>Elv:</b> mechanikai</p> <p><b>Hiba:</b> a mérőfelületek az érintkezési felület érdességi csúcsain fekszenek fel, a felületi érdesség összevethető a mérőeszköz felbontásával</p>                 | <p><b>Mód:</b> érintéses</p> <p><b>Hiba:</b> a tolómérő mérőfelülete és a munkadarab közé szennyeződés került</p>   |
|  |  | <p><b>Mérőeszköz:</b> tolómérő</p> <p><b>Hibák:</b> billenési hiba, osztás hibák</p>  |
|  | <p><b>Módszer:</b> összehasonlító</p> <p><b>Hiba:</b> tolómérő esetében összehasonlító módszerrel mérünk, de az Abbe-elv nem teljesül, azaz a mérendő hosszúság és a mérce nem esnek egy egyenesbe</p> | <p><b>Mérés körülményei</b></p> <p><b>Hiba:</b> forgácsoló megmunkálás után közvetlenül történik a mérés, a munkadarab hőmérséklete az előírtnál magasabb</p> |
|  |  | <p><b>Mérő személy</b></p> <p><b>Hiba:</b> figyelmetlenségből adódó leolvasási hiba</p>   |

2.3. táblázat. A mérési hibák áttekintése

### 2.3.2 A hibák megjelenítési formái

Előzetesen le kell szögezni, hogy a matematikai úton becsülhető hiba fogalma alatt kétféle hibát értenek a mérés technikában. Az egyik hiba a műszer, mérőeszköz hibája, a másik a mérés, mint munkafolyamat hibája. Ez utóbbi természetesen egyebek között a műszerhibákat is magába foglalja, amint azt 2. fejezetben, a meghatározások között leírtuk.

A **hiba és a mért mennyiség** kapcsolatának **megjelenítésére** az alábbi fogalmakat használják:

**abszolút hiba**  $H_{absz} = x - x_v$        $x$       mért érték  
 $x_v$       valódi érték

**relatív hiba**  $H_{rel} = \frac{x - x_v}{x_v} \cdot 100\%$       a valódi érték százalékában

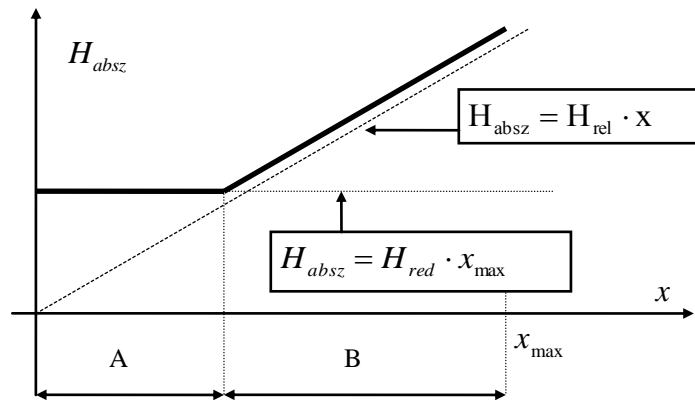
Fontos megjegyezni, hogy a valódi érték, és ennek folytán az abszolút hiba sem ismert. A 4. fejezetben leírt módszerekkel becslés adható arra, hogy a mért érték és az ismeretlen (a valóságban soha meg nem ismerhető) valódi ("pontos") érték eltérése a hibakorlát adott P valószínűségi szinten:

$$|x - x_v| \leq H$$

**A mérési munkafolyamat jellemzésére** például szokásos a **redukált hiba** megadása is, de ebben az esetben a vonatkoztatási mennyiség a mérési tartomány  $(x_{\max} - x_{\min})$ . A redukált hiba többnyire kisebb lesz, mint a relatív hiba:

**redukált hiba** 
$$H_{red} = \frac{x - x_v}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot 100\%$$

Annak eldöntése, hogy a mérés jellemzésére melyik hiba típus megadása célszerű, általában az abszolút mérési hiba nagyságától függ, amint ezt az alábbi ábra szemlélteti [2.6]:



**"A" tartományban:**  $H_{absz}$ , **vagy**  $x_{ki,n,i}$  **"B" tartományban:**  $H_{rel}$

2.3. ábra. A mérési hibák célszerű megadása a mért mennyiség nagyságának figyelembevételével

A gyakorlatban a **műszerhibákat**, a mérőeszközök **hibakorlátokat** többféle módon közölhetik a felhasználóval hogy a mérési eredményben a **rendszeres hiba** feltüntethető legyen. A **becsült rendszeres hiba** (-1)-szeres szorzata a **korrekció**, amit a korrigálatlan mérési eredményhez algebrailag hozzá kell adni.

A pontossági osztályt az abszolút hibának és a műszer végkitérésének felhasználásával számítják ki, és gyakran feltüntetik a mérőeszközökön (elektromechanikus műszerek).

$$\textbf{Pontossági osztály} \quad PO = \left[ \pm \frac{H_{absz}}{x_{max}} \cdot 100 \right] \% = \left[ \pm \frac{x - x_v}{x_{max}} \cdot 100 \right] \%$$

Az eszköz jelleggörbéjében található legnagyobb abszolút hibát (*ez a kalibrálás során meghatározott rendszeres hiba korlát*) a mérési tartomány (skála) maximális értékére vonatkoztatják, miközben bizonyos egyéb paraméterek értékét és a mérés körülményeit rögzítik. A különféle zavarások, így pl. az előírt hőmérséklettől való eltérés, vagy a mágneses terek a pontossági osztályban megadott értékeket lényegesen befolyásolhatják [2.8].

Mérőeszközök adatlapjain, vagy a műszerkönyvben a hiba megadása pontossági osztály, abszolút hiba, relatív hiba formájában fordul elő. Gépészeti mérőeszközöknél gyakori a **relatív hiba** alkalmazása a rendszeres hiba kiszámításához, például a mért mennyiség  $x$  függvényében, valamint a legkisebb skálaérték ( $S$ ) bizonytalansággként való megjelenítésével az alábbi formában:

$$H = \pm H_{rel} \cdot x \pm \frac{1}{2} \cdot S \quad (2.1)$$

A mérőeszközök statikus és dinamikus tulajdonságaival foglalkozó fejezetben (2.4.) megjelenik a mérőeszközök időtől és frekvenciától való függése. Az időbeli és frekvencia tartománybeli viselkedés bemutatása e jegyzet kereteit meghaladná, de annyit szükséges megjegyeznünk, hogy a **hibák formai megjelenésének csoportjába** tartoznak az **idő-és frekvencia tartománybeli hibák, az amplitúdó és fázisátvitel hibája, valamint a mintavételezési hiba**. Az idő tartományban előforduló legfontosabb hibákat és fogalmakat a 2.4. és a 7. fejezetben megtaláljuk, ilyenek pl. a dinamikus hiba, a tranziens hiba, az időállandó, a beállási idő, a mintavételi hiba, stb. A gépészetben ugyanis egyaránt fontos az időben állandó, és időben változó mennyiségek mérése. Az időben változó mennyiségek méréséhez annyit ezen a helyen meg kell jegyeznünk, hogy minden technikai jel felfogható különböző frekvenciájú és amplitúdójú harmonikus jelek szuperpozíciójaként (Ld.: Fourier sor és Fourier transzformáció). A

frekvencia tartományban megjelenő hibák különösen fontosak, ilyenek a mérőrendszerek frekvenciától függő amplitúdó átvitele és fázistolása. Ezeket az átviteli tulajdonságokat ábrázolják a műszer-és méréstechnikában a Bode diagramon, logaritmi-  
kus léptékben. A gépészhallgatók ezzel az ábrázolási móddal az irányítástechnika témakörben találkoznak.

Befejezésül néhány, az életből vett példán érzékeltetjük a **hibakorlát** megadásának **műszergyártók** által alkalmazott formáit úgy, hogy közben alkalmazzuk az előzőekben ismerttetett osztályozási fogalmakat. A következőkben bemutatott két mérőeszköz adatlapján a gyártó feltüntette a “hibákat”.

Nézzük, milyen hibákról van szó?

**Eredetük** szerint a **kivitelezés hibái** közé soroljuk az alább megjelölt két mérőeszköz **forma** szerint **abszolút, vagy relatív, jelleg** szerint pedig **rendszeres hibáit** :

**a./** Az első példa legyen egy **forgatónyomaték mérő** (valójában csak érzékelő, vagy jelátvivő, de a gyakorlatban ez az elterjedt megnevezés) tengely, amelyet a H&B cég gyárt, T1 típusjel alatt. A műszer adatlapján - többek között - az alábbiak olvasható:

- Műszerállandó (érzékenység): 1.5 mV/V

Magyarázat : A nyomaték érzékelő u.n. szenzor egységét 4 db “Wheatston-hídba kötött nyúlásmérő bélyeg alkotja, ezt teljes hídnak nevezi a szakirodalom. A fenti műszerállandó azt jelenti, hogy 1 V-os híd-tápfeszültség mellett a legkisebb, még kimutatható nyomatékváltozás 1.5 mV feszültségkülönbséget hoz létre a hídágak közötti mérőpontokon.

- A műszerállandó tűrése:  $\pm 1\%$

Magyarázat : Ez a tűrés relatív hiba, azt jelenti, hogy a mérőpontokon megjelenő feszültség  $\pm 1.5 \mu\text{V}$  értékkel térhet el a névleges értéktől.

- Termikus hibák az üzemelési hőmérséklettartományban, azaz 10°C és 50°C között K-enként:

Műszerállandó változása a mért értékre vonatkoztatva:  $\pm 0.1 \%$

Nullpont-eltolódás a névleges műszerállandóra vonatkoztatva:  $\pm 0.05 \%$

Mindkét terminus hiba relatív hiba, amelyeknél a gyártó közli a vonatkoztatási értéket is.

**b./** Más gépészeti mérőeszköz adatlapján, pl. a Mitutoyo cég AT 102 típusú. "Linear Scale" **optoelektronikus inkrementális hosszmérőnél** ("útdő") ezt olvashatjuk:

- Mérés hossz: 0 – 3000 mm
- Pontosság (20 °C-on) : (5 + 5 L/1000) μm

Magyarázat : Esetünkben nyilvánvalóan **az abszolút hibáról** van szó. A pontosság a definíció szerint a mérés eredménye és a valódi (helyes) érték közötti egyezés mértéke. Itt "L" az éppen mért, adott hosszúság érték mm-ben. Megjegyezzük, hogy a "pontosság" kifejezés ugyan szabványos, de a mérés technikával foglalkozók általában mégis kerülnek a használatát. Helyette a valóságot jobban tükröző abszolút, vagy relatív hiba elnevezést alkalmazzák.

### 2.3.3 A hibák csoportosítása jellegük szerint

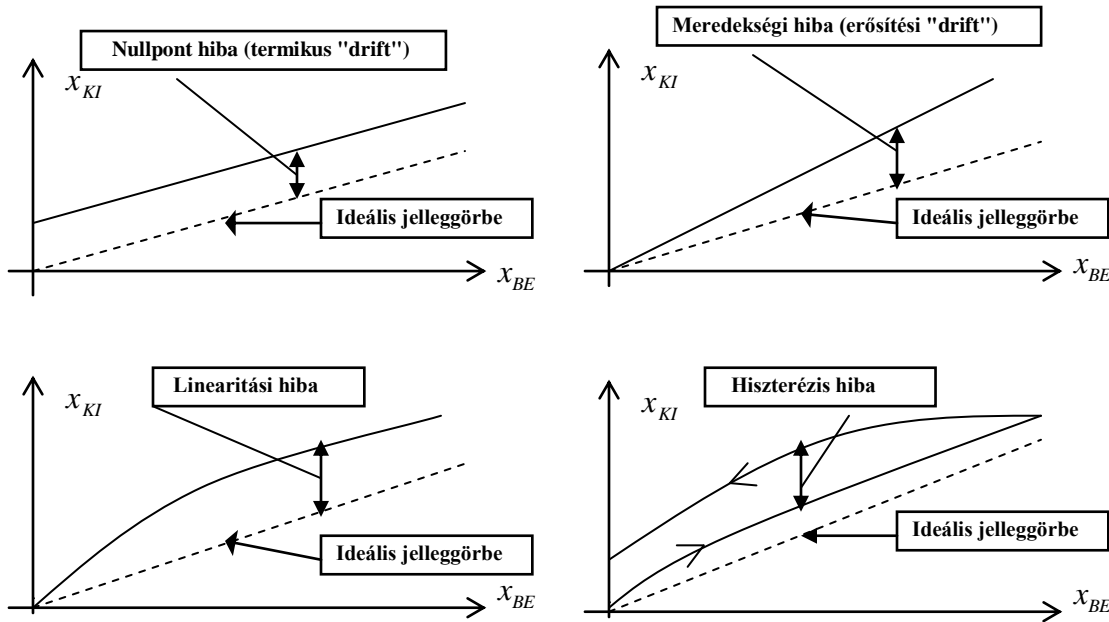
#### ***Durva, kiugró hiba***

Figyelmetlenségből, vagy a mérőeszköz hibás működéséből származó hiba. Eredetét ki kell nyomozni, és az okot lehetőleg meg kell szüntetni.

#### ***Rendszeres hiba***

Rendszeres hibának nevezzük a mérendő mennyiség ismételt mérése során vagy **állandó** marad, vagy előre **meghatározható módon változó** hibákat. Okai lehetnek ismertek, vagy ismeretlenek. Ez a hibafajta például a mérőrendszer tagjainak (mérőlánc) működéséből és a mérési eljárásból is adódhat. Előjele és nagysága az egész méréstartományban ismert.

A soron következő ábrán összefoglalva, általánosságban ábrázoltuk az elektromechanikus mérőeszközökre jellemző legfontosabb rendszeres hibákat. Ezeket a hibákat a jelleggörbe hibáinak is szokás nevezni.



2.4. ábra. Rendszeres hibák összesített ábrázolása

### Nullpont hiba

Elektromechanikus és elektronikus műszerek esetében a melegedés okozza. Ezért bekapcsolás után csak bizonyos idő elteltével (általában 10-20 perc), a termikus egyensúly kialakulása után lehet a méréseket megkezdeni.

### Meredekségi hiba

Elektromechanikus és elektronikus műszerek erősítőjének jellegzetes “meredekségi” hibája. Gondot okozhat, ha az erősítés (meredekség) olyan mértékben megváltozik, hogy nagyobb bemenő jelszint esetében - a kivezérlés miatt - a kimenőjel nemlineárisan torzul.

### Lineartíási hiba

A bemenő-és a kimenőjel között a matematikai összefüggés nem egy állandó értékkel, hanem egy összetettebb függvény kapcsolattal írható le. A bemenőjel szintjétől függő hiba nagysága kalibrálással meghatározható.

### Hiszterézis hiba

Elektromechanikus, mechanikus műszerekre jellemző, súrlódásokból származó hiba. Jellemzője, hogy fokozatos és lassú növelése, illetve csökkentése eltérő jellegű görbét eredményez. A “visszatérő” ág általában az origó felett metszi a kimenőjel tengelyét, jelezve a műszerben lezajlott irreverzibilis energia átalakulást. **Fontos gyakorlati tanács,** hogy tapintós, hiszterézises mechanikai (elektromechanikai) műszer esetében a mérőtapintót mindig egy irányból - azaz a mérendő tárgytól kissé elemelve – óvatosan közelítsük a felület felé, azaz mindig “kifelé mozgó” tapintóval mérjük! Ha a műszer gyenge ütügetésre más és más értéket mutat, akkor a bizonytalanság okozója lehet a túl szoros befogásból eredő rendellenes súrlódás, esetleg befeszülés, vagy egyéb hiba.

A rendszeres hibákkal kapcsolatosan, a gyakorlatra alapozva meg kell jegyez-nünk, hogy ezek a hibák vagy ismertek, tehát számíthatóak, vagy nehezen, esetleg csak nagy költséggel meghatározhatóak és számíthatóak. Ha ez utóbbi esetben ismeret-lennek feltételezzük, akkor a mérés pontatlanságát növelik. Jogos a kérdés, mit te-hetünk?

Nem vesszük figyelembe: ▶ durva hiba keletkezik (ld. 2.5. ábra)

Hibakorláttal vesszük figyelembe: ▶ az eredmény pontatlansága nő

Figyelembe vesszük, mint rendszeres ▶ a korrekció alapja a hiba mérése  
hibát:

Kompenzáljuk a hiba által okozott ha- ▶ a hibának nincs hatása az ered-  
tást: ményre

Látható, hogy a feltett kérdésre több válasz lehetséges, amelyeknek azonban az anyagi és műszaki következményeivel számolnunk kell.

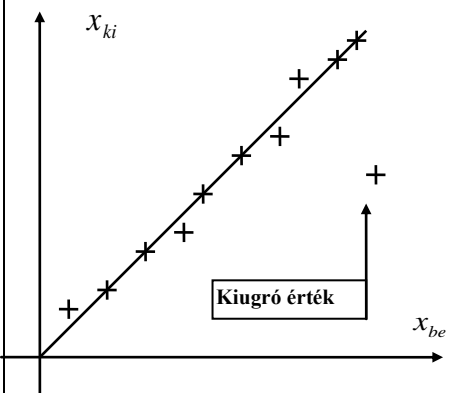
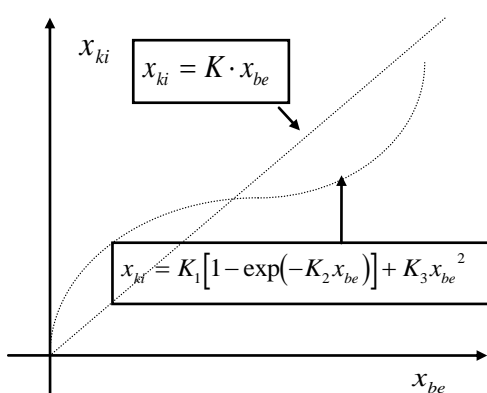
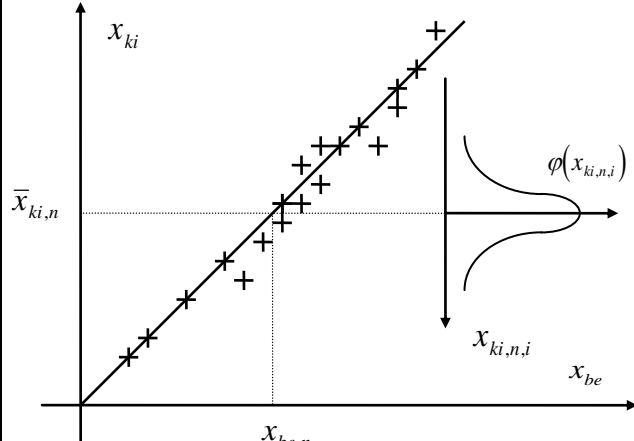
### **Véletlen hiba**

Olyan mérési hiba, amelyik a mérendő mennyiség ismételt mérése során véletlenül szerűen változik. A véletlen hiba a 4. fejezetben leírtak értelmében valószínűségi változó. A 4. fejezetben bemutatunk olyan módszert, amely segítségével a véletlen hibákra vonatkozó hibakorlátot tudunk meghatározni.

A hibák jellegének áttekintő bemutatása Frühauf és Krenz [2.6] munkája alapján:

*A dőlt betűvel jelzett fogalmak magyarázata a jegyzetben megtalálható!*



|                                      | <b>Durva mérési hiba</b>   | <b>Rendszeres hiba</b>  | <b>Véletlen hiba</b>   |
|--------------------------------------|--|---|--|
| A hiba, és a hibao-kozók jel-lemzése | Lehet pl. a "kiugró" érték, ezt gyakran figyelmetlenség okozza, tehát alapvetően elkerülhető, de ide tartozik a pontatlan modell miatt keletkező hiba is | A mérési eljárás és a mérőeszköz elvi hibái<br>Elvben meghatározható, hatása kiszámítható és korrigálható   | A hiba okok időben és térben véletlenszerűen lépnek fel<br><br>Pl.: zajok, sűrűlási hibák, környezeti hatások, a mérendő mennyiségek változásai  |
| A hiba megszűntetésének módja        | A rendszeres hibákhoz hasonlóan, a kiugró érték kizárásával  | a. / Többnyire rendelkezésre állnak a mérőeszköz korrekciós adatai. Ha nem, akkor a <b>hibaterjedés számítás</b> és kalibráció szükséges<br>b. / Nem meghatározható a hiba mértéke, ebben az esetben véletlen hibaként kell kezelni | Ismételt mérésekkel felismerhető, kiszűrhető, statisztikai módszerekkel figyelembe vehető.<br><b>Statisztikai jellemzők: átlagérték<br/>szórás<br/>konfidencia<br/>várható érték<br/>hibastatisztika</b> |
| Példák                               |    |    |    |

2.5. ábra. A mérési hibák jelleg szerinti csoportosítás

## 2.4 MÉRŐESZKÖZÖK STATIKUS ÉS DINAMIKUS TULAJDONSÁGAI

A műszaki gyakorlatban - így a gépiparban alkalmazott mérőrendszerek többsége is – energiatárolókat, energia-átalakítókat és különféle ún. disszipatív építőelemet tartalmaz. Ez azt eredményezi, hogy a teljes rendszer, valamint annak tagjai bemenetére adott mérendő fizikai mennyiség által keltett hatás (válasz) **késleltetéssel** és a mérőrendszerre jellemző időbeli lefutással jelenik meg a kimeneten. Igen csekély azon eszközök száma, amelyek ún. arányos viselkedésűek, tehát a válaszuk időkésleltetés nélküli és a bemenő jellel arányos.

A fentiek miatt tudnunk kell, hogy a dinamikus mérőrendszerek használata esetén, a helytelenül megválasztott kalibrációs technika súlyos hibákhoz vezethet. Például statikus kalibrálás során a válasz-jelszintek leolvasásához (regisztrálásához) kevesebb időt hagyunk annál, amit műszer beállási ideje megkövetelne.

### 2.4.1 A statikus és a dinamikus kalibrálás célja

Új, ismeretlen műszer használatba vétele előtt, valamint időszakos bevizsgálások alkalmával szükség van a mérőeszköz pontossági jellemzőinek ellenőrzésére [2.5]. A kalibrálás az új nemzetközi előírásoknak megfelelően több szinten, szigorú hierarchiában történik. A kalibrációhoz használt etalonokat is e szinteknek megfelelően csoportosították. Felülről lefelé haladva az alábbi kalibrációs szinteket és a hozzájuk rendelt jogosítványokat mutatja be [2.9]:

- Nemzetközi szint
- Nemzeti metrológiai intézetek (nálunk OMH)
- Akkreditált mérőlaboratóriumok
- Házon belüli (üzemi) kalibrálás

E fejezetben nem a kalibrációs szintekről, hanem a kalibrációról, mint összehasonlító tevékenységről lesz szó.

A bevizsgálást a statikus bemenet és statikus kimenet közötti kalibrációs függvény meghatározására általában a **statikus kalibrálással** kezdik. Vannak a gépészeti alkalmazásban olyan mérőeszközök, amelyek funkcionálisan **statikus működésűek**. Így például rendeltetés-szerű használatnál egy tapintós mérőóra, egy optiméter, vagy egy Abbe féle komparátor statikus műszernek tekinthető, nem beszélve olyan nyilvánvaló esetről, mint a hossz mérés mérőhasábokkal, vagy osztásos mércével.

A dinamikus jelenségek persze még a mérőhasábok esetében sem elhanyagolhatóak. A statikus jellemzőknek tekintett geometriai méretek is megváltozhatnak például a hőmérséklet hatására. Ezért a termikus eredetű hibák kiküszöbölésére - a klimatizált mérőlaborban, a mérés megkezdése előtt - a mérőhasábokat a mérendő munkadarabbal együtt olyan állandó hőmérsékletű helyre teszik (pl. gránit lap), ahol bizonyos idő eltelte után beáll az **állandósult (stacionárius) állapot**. Precíziós hosszúság méréseket csak stabilizált, szabványos hőmérsékleten, előírt nyomás és páratartalom mellett lehet elvégezni.

A gépészet területén a statikus mérőeszközök mellett azonban elengedhetetlenül fontosak a dinamikus mérőeszközök, amelyek időben változó mennyiségek mérésére alkalmasak.

A **dinamikus kalibrálás célja** annak eldöntése, hogy a mérőeszköz rendszáma, időállandói, frekvencia menete, alsó és felső határfrekvenciája, rezonancia frekvenciája, stb. valóban egyeznek-e a feltételezett értékekkel, illetve ezek egyeznek-e az adatlapon megadott értékekkel?

Egy műszaki rendszer rendszáma a dinamikus működését leíró matematikai modell, a differenciálegyenlet rendszámával, valamint ezzel összefüggésben, a frekvencia átviteli függvény nevezőjében a Laplace-operátor (s) fokszámával egyezik meg. A rendszám a műszaki rendszerben található független energia tárolók számával egyezik meg.

## 2.4.2 Statikus kalibrálás, a jelleggörbe felvétele

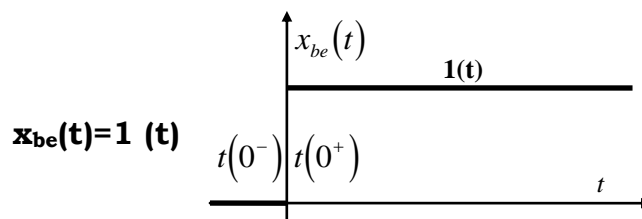
**A kalibrálás során egy ismert jelleggörbéjű mérőeszköz kimeneti jeleivel, vagy etalon(ok) értékével hasonlítjuk össze valamely ismeretlen eszköz kimenő jeleit.** Általános szabály, hogy a kalibráló eszköz ismert mérési bizonytalanságainak eredője (hibája) kisebb legyen a kalibrálandó eszköz becsült hibájánál.

A jelleggörbe felvételével kapcsolatos **dinamikai problémákat** egy könnyen elképzelhető **elsőrendű** (egyetlen energiatárolót tartalmazó) mérőérzékelő példáján szemléltetjük.

Feladatunk egy termoelemet, mint érzékelőt (szenzort) tartalmazó ipari hőmérő (jelátvivő egység) kalibrálásának egyszerű eszközökkel történő elvégzése. A későbbiekben ábrán szemléltetjük, hogy a szenzor bemenő mennyiségének ugrásszerű változása elsőrendű műszer esetében milyen kimenetet eredményez, azaz a válasz mennyire tér el az ideálistól? A méréstechnikában ezt a jelenséget a dinamikus és a tranziens hiba fogalmával jellemzik.

A statikus kalibrálás során a bemenő jelet előre megtervezett lépésekkel, fokozatosan változtatjuk, és leolvassuk, vagy regisztráljuk a vizsgált eszköz válaszát, a statikus állapot kialakulását követően.

A statikus kalibrálás jellemző bemenő jele tehát az *ugrásszerű bemenet*. Ezen **időfüggő** gerjesztést **“egységugrás függvénynek”** nevezik, jelölése és ábrázolása a következő:



2.6. ábra. Egységugrás függvény jelölése és ábrázolása

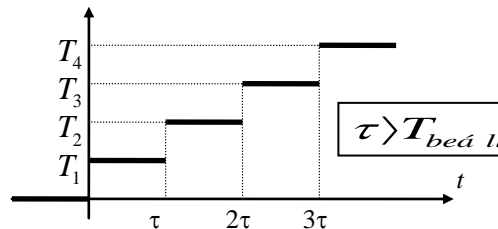
**Az egységugrásra adott rendszerválasz, az átmeneti függvény,** a rendszer dinamikus tulajdonságairól (pl: energiatárolók száma) sok mindent elárul, de a műszaki gyakorlatban, különösen összetettebb, vagy aktív rendszer esetében nem ad

elegendő információt. Ezért, ha lehetséges, más teszt-függvényeket is alkalmaznak. Így pl. harmonikus (szinuszos) gerjesztésnél a frekvencia-függvényében a bemenő és kimenő jel amplitúdójának arányát és a két jel közötti fázis különbséget mérik.

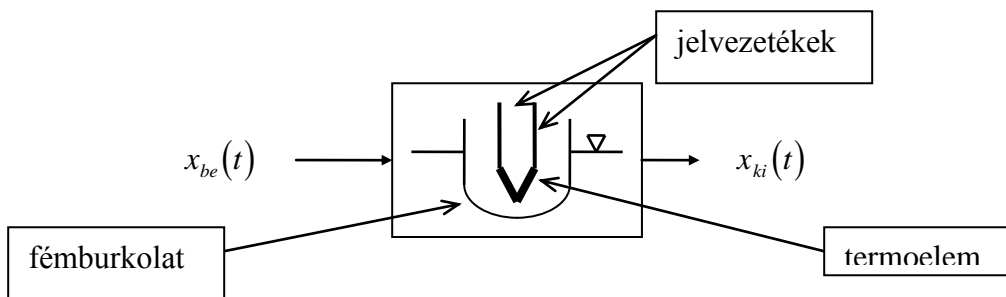
Példánkban a hőmérséklet jelátvivőt a következő módon kalibrálhatjuk: Az eszközt ismert hőmérsékletű folyadékokat tartalmazó tartályokba merítjük be, úgy hogy sorrendben ezek hőmérséklete növekvő tendenciát mutasson. A bemenet tehát egységugrás függvények sorozata. A jelátvivő "válaszát", az egyes hőmérsékleti lépcsőkhöz tartozó villamos kimenő feszültséget, csak az állandósult állapot beállta után szabad leolvasni, mert ellenkező esetben jelentős mértékű tranziens hiba keletkezhet.

Nézzük tehát, hogy a jelátvivő (szenzor) kimenetén hogyan változik a villamos feszültség (termo-feszültség) miközben a jelátvivőt sorban egymás után különböző, egyre növekvő hőmérsékletű közeggel megtöltött tartályba merítjük?

A kalibráció során a bemenet (gerjesztés) időfüggvénye  $x_{be}(t)$  függvények egymás után következő, és egymásra épülő, monoton növekvő sorozata.



2.7. ábra. A bemenet kalibrációs lépései az idő függvényében



2.8. ábra. A termo-elektromos hőmérő tömbvázlatos modellje

A tranziens és dinamikus hibák a kalibráció során megengedhetetlenek. Ezért az egyes bementi változások időtartama hosszabb kell legyen, mint a műszer beállási ideje!

A bemeneti jelsorozatból a hőmérséklet egyetlen ugrásszerű változásra adott ugrás-választ, azaz egy átmeneti függvényt szemléltet a következő ábra, amelyen egy  $T_i$  hőmérsékletű folyadékba történő bemerítés során kapott kimeneti villamos feszültség lefolyása látható. Fontos tudni, hogy az átmeneti függvény felvétele tulajdonképpen a **dinamikus kalibrálás** témakörébe **is** beletartozik. A statikus kalibrálás során csak az állandósult állapot érdekes számunkra, hiszen itt történik az értékek leolvasása. Az átmeneti függvényből azonban az elsőrendű rendszer időállandóját is meg lehet megállapítani. Ennek az időállandónak a reciproka értéke adja azt a körfrekvenciát, amelyet "letörési, vagy sarok-körfrekvenciának" nevez a szakirodalom. Harmonikus gerjesztés esetében ezen a körfrekvencián a kimenő jel amplitúdója már csak mintegy 70 % -a a bemenő jel amplitúdójának. A harmonikus gerjesztés említése azért fontos, mert csaknem minden műszaki szempontból lényeges gerjesztő jel rendelkezik harmonikus összetevőből álló frekvencia spektrummal, amelyet természetesen megfelelő hibaszámítás mellett "felülről" korlátozunk.

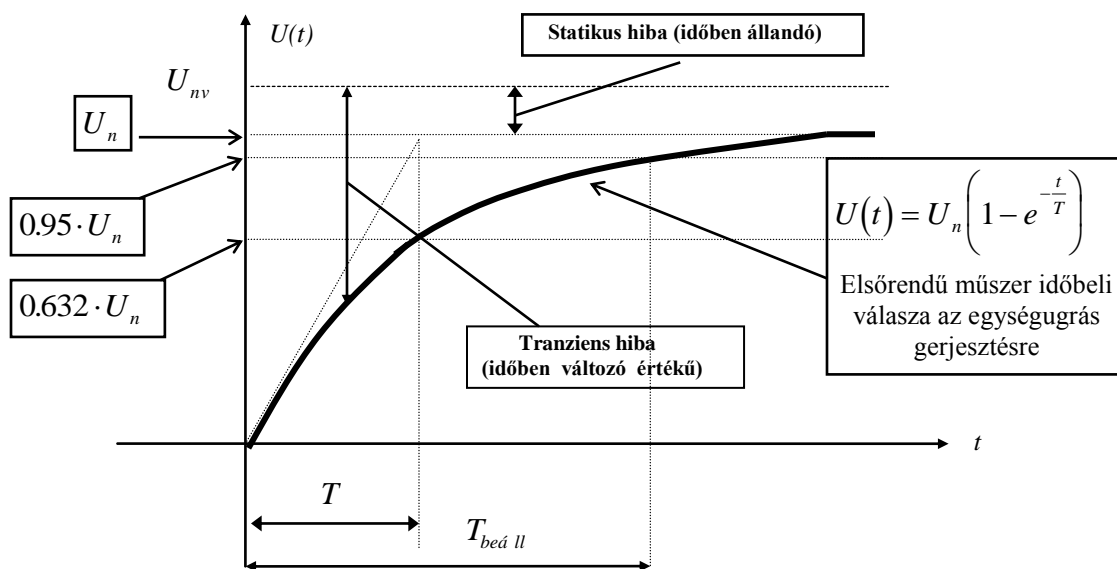
### **Az átmeneti függvényben alkalmazott jelölések és fogalmak:**

$U_{nh}$  n-ik helyes érték

$U_n$  n-ik mért (kijelzett) állandósult érték

$T_{beáll}$  A jelátvivő tag "beállási ideje". Az az idő, amely ahhoz szükséges, hogy a kimenőjel az állandósult értékének 95% -át elérje. Ez a "**tranziens szakasz**" vége.

$T$  A műszer "időállandója". Az az idő, amely az állandósult kimenet  $(1-1/e)$ -ad részének, azaz 0.632-szeresének eléréséhez szükséges.



2.9. ábra. A kimenet válaszfüggvénye (itt átmeneti függvény) egyetlen “bemerítés” után

**Mérési hibák a kalibrálás során:**

- Statikus hiba az  $n$ -ik mérésnél:

$$H_{stat} = U_n - U_{nv} \tag{2.2}$$

- Tranziens hiba a  $t_i$  időpillanatban:

$$H_{tranz}(t_i) = U_n - U(t_i) \tag{2.3}$$

Azt az időtartamot, amely a bemenetre adott ugrásfüggvény bekapcsolásától addig az időpontig tart, amíg a kimeneten a pillanatnyi jelszint és az állandósult állapotához tartozó jelszint közötti százalékos eltérés egy megadott határon belülre nem kerül (pl.: 1%, 5%), nevezik a műszer **beállási idejének**.

Fontos kiegészítés, hogy lengő jellegű műszerválasz (pl.: másodrendű rendszer) esetében a kimeneti jel lecsengő szakaszára vonatkozik az előbbi megállapítás.

Látható, hogy a statikus kalibrálási művelet csak akkor lesz megfelelően kiértékelhető, ha a műszer számára, “elegendő” időt biztosítunk ahhoz, hogy **az állan-**

**dósult állapotot elérhesse.** Ezért a kalibrációs függvény felvételét csak állandósult állapotban nyert értékekkel végezhetjük. A “függvény, vagy görbe” kifejezések azért használatosak, mert a munka során nyert érték párok között nem feltétlenül lineáris a kapcsolat.

Célszerű előzetes próbákat végezni, majd a kalibrációs szinteket ennek alapján felvenni. Az egyes bemeneti szintekhez tartozó méréseket egymás után többször megismételjük (a gyakorlatban ez minimálisan 5 mérést jelent minden pontban), majd az egyes bemeneti szintekhez tartozó válaszok (statikus jelszintek) átlagát képezzük. Az így kapott érték párokat felhasználva, meghatározhatjuk a kalibrációs függvény közelítő egyenletét.

### 2.4.3 Dinamikus és tranziens jelenségek

Ha egy mérőeszköz dinamikus tulajdonságaira vagyunk kíváncsiak (*pl.: időállandók, rezonancia frekvencia, határfrekvenciák, stb.*), akkor a un. **dinamikus kalibrálást** hajtunk végre. Ilyenkor **az egységugrás bemenetre adott teljes időbeli választ** elemezzük. A dinamikus kalibrálás egyik célja, az időállandók és ezzel együtt a frekvencia átviteli tulajdonságok meghatározása azonban komoly rendszertechnikai apparátust igényel. Példaként említjük, hogy a műszerjellelmezők mérési adatokból grafikus eljárással történő meghatározása meghaladja e jegyzet kereteit, ezért itt csak utalunk a megfelelő szakirodalomra [2.5].

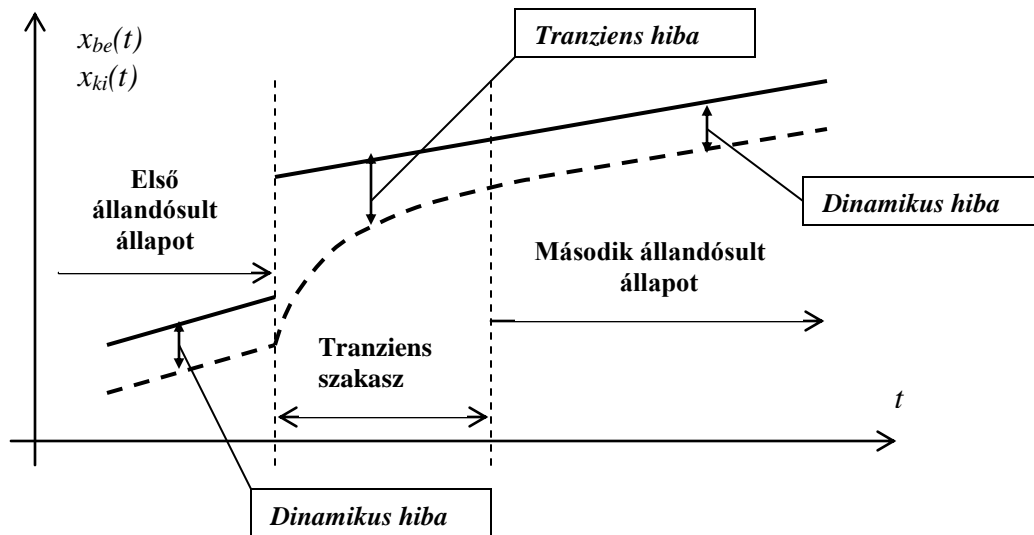
Ezen a helyen a dinamikus tulajdonságok közül csupán azokat vizsgáljuk részletesen, amelyek a statikus jelleggörbe felvétele során a mérés eredményét befolyásolják.

Fontos azonban tisztában lenni azzal, hogy a példában bemutatott „T” időállandó reciprokl értéke is fontos műszerjellemző:  $1/T = \omega_s$ . Az  $\omega_s$  sarokkőrfrekvencia (vagy letörési körfrekvencia) az a pont, amelynél a műszer harmonikus jelátvitelének értéke  $X_{ki}/X_{be} = 0.7$ , logaritmikus léptékben -3dB. E körfrekvenciánál nagyobb értékeknél a kimenőjel a körfrekvencia minden megtízszereződésére a tizedére csökken



(-20dB/dekád). A gyakorlatban az elsőrendű műszer arányos (hibátlan) frekvencia átviteli tartománya  $0 \leq \omega \leq \omega_f$ . A felső határ(kör)frekvencián az amplitúdó átvitel hibája maximum 1% lehet. Ez az arány, tehát  $\frac{X_{ki}}{X_{be}}(\omega) = 0.99$  a műszertechnikában szokásos módon, dB-ben kifejezve  $20 \lg \frac{X_{ki}}{X_{be}}(\omega) = 0.1 \text{dB}$  értéket jelent.

Láttuk az előző fejezetben, hogy a dinamikus válasz első szakasza *a tranziens hibával* terhelt. Ezt a hibát az állandósult állapotbeli jelszinthez viszonyítjuk, ami természetesen lehet időben változó is. A következő ábrán látható, hogy a műszer állandósult állapotban állandó értékű hibával követi az időben változó bemenetet, ez a **dinamikus hiba**. Ha azonban a bemenet ugrásszerűen változik, akkor egy átmeneti időszakban a hiba értéke változó lesz. A műszer belső felépítésére jellemző tranziens (átmeneti jellegű) hiba bizonyos idő elteltével megszűnik "lecseng". A tranziens folyamat jellegét a műszer dinamikai tulajdonságai határozzák meg.

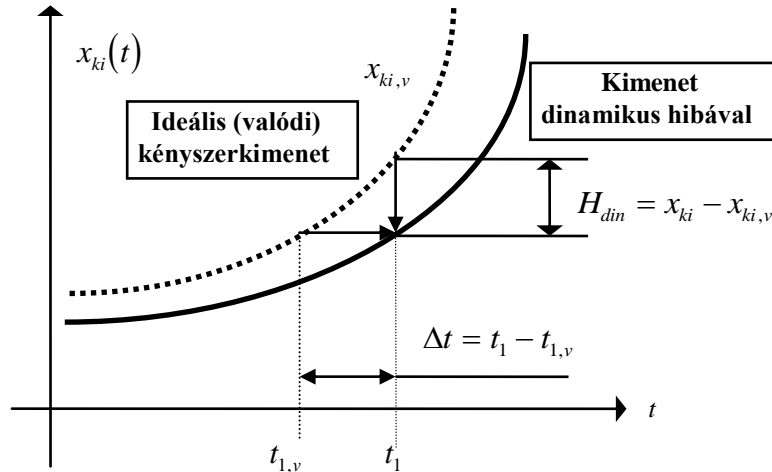


2. 10. ábra. Az állandósult állapot és a tranziens folyamat szemléltetése

Láttuk, hogy a bemeneti változást a rendszer (műszer) csak az energiatárolóitól függő késleltetéssel, azaz dinamikus hibával képes követni. A dinamikus hiba meghatározásához értelmezni kell a dinamikailag hibamentes működést és az ehhez tartozó be-és kimeneti értékeket. Egy mérőműszer akkor működik ideálisan, ha a be-

menetén megjelenő értékeket a statikus érzékenységi tényezővel szorzott értéken és késedelem nélkül (vagy előírt állandó késéssel) jeleníti meg a kimenetén. Az ilyen, un. etalon kimenet az ideális (valódi) kényszerkimenet.

A dinamikus hiba a szokásos értelmezésű. A késleltetés pozitív, ha a válasz időben később éri el a valódi értéket.



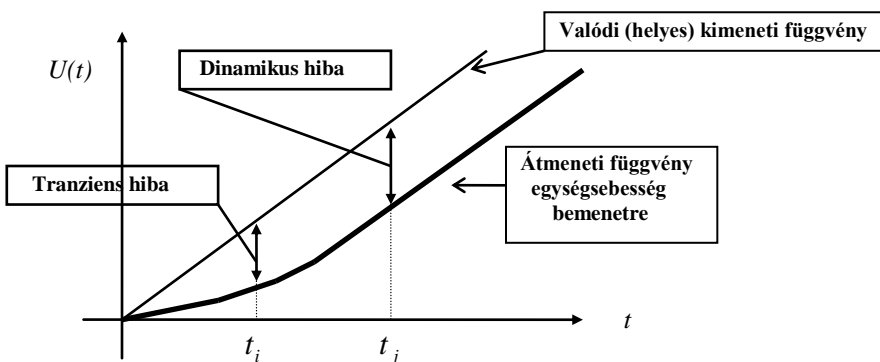
2.11. ábra. Dinamikus hiba és késleltetés

Helyezzük el a példában bemutatott termo-elektromos hőmérőt lassan növekvő hőmérsékletű folyadékban.

A kimeneten a villamos feszültség az ábrán bemutatott módon fog változni. Tranziens hiba e folyamatban is megjelenik, ugyancsak időben változó nagyságú.

Dinamikus hiba a  $t_j$  időpillanatban:

$$H_{din}(t_j) = U(t_j) - U_v(t_j) \quad (2.4)$$

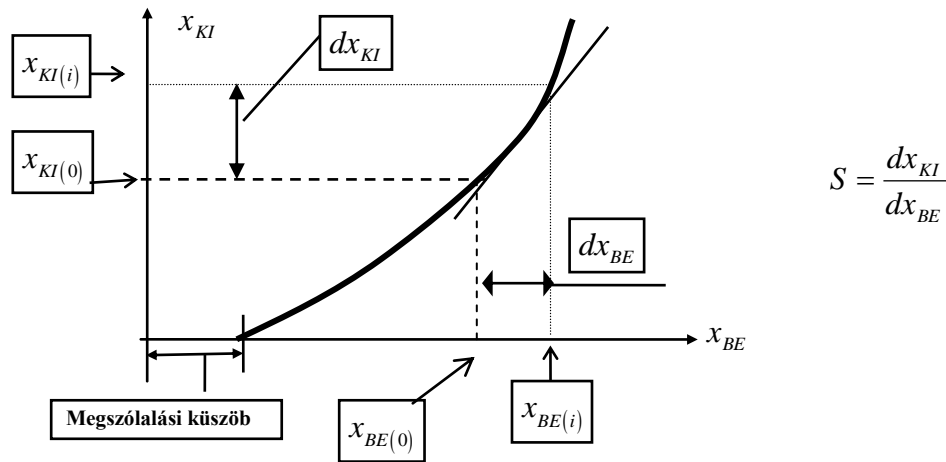


2.12. ábra. Első-  
rendű tag válasza egy-  
ség-sebesség függ-  
vényre

#### 2.4.4 Érzékenység és kapcsolódó fogalmak

A kalibrációs görbe meredeksége a műszer egy adott pont környezetében jellemző **érzékenységének** meghatározására is alkalmas, ha a kalibrációs függvény deriválható:

A kimenet és a hozzá tartozó bemenet végtelen kis növekményének a hányadosa az **érzékenység**, jelölésére gyakran az **S (Sensitivity)** betűt alkalmazzák.



2.13. ábra. A kalibrációs függvény, érzékenység (felnagyítva), megszólalási küszöb

Nemlineáris kalibrációs görbe esetén a gyártó mellékeli a konkrét eszköz mérési bizonylatát és általában a legkisebb érzékenységet tünteti fel adat-táblázatában, mint jellemzőt. Az érzékenységet - a méréses eljáráson kívül - számítással is meg lehet határozni, a műszer  $Y(s)$  átviteli függvényéből.

Tudni kell azonban, hogy a mérőeszközöket, különösen azokat, amelyekben súrlódás, kotyogás léphet fel, más paraméterekkel is jellemezni szokták.

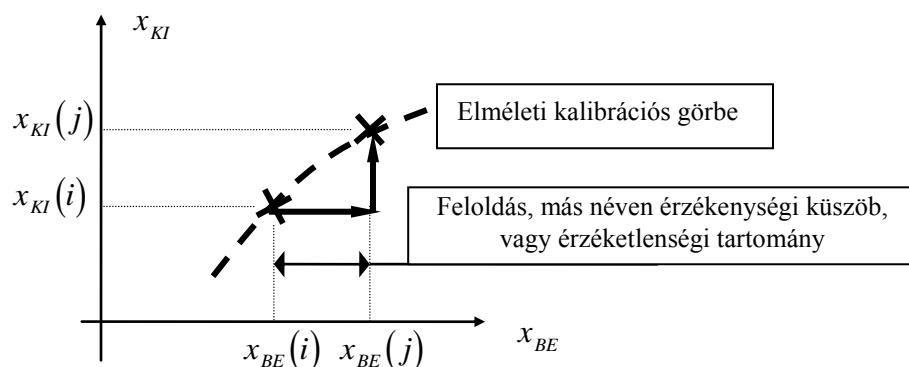
Mechanikus, elektromechanikus műszereknél különösen fontos a **megszólalási küszöb** ismerete. A kalibrációs görbe **origó környezetében lévő tartományban**, a bementi jel folyamatos, lassú növelése mellett azt tapasztalhatjuk, hogy a műszert kimenetén csak akkor észlelhető változás, ha a bemenő jel egy meghatározott  $x_{be,k}$  "küszöbértéket" elért, ezt a bemeneti értéket nevezik megszólalási küszöbnek.

Hasonló jelenség figyelhető meg a kalibrációs függvény más tartományában is. Ha a bemenetet lassan változtatjuk, tehát két, már jól megkülönböztethető  $x_{BE}(i)$  és  $x_{BE}(j)$  pont között eltelt idő meghatározásánál figyelembe vettük a műszer beállási idejét (ld.: 2.9. ábra), akkor az **érzéketlenségi küszöb, vagy feloldás** értékét tudjuk megállapítani.

Ha tehát a bemenet lassú változtatása (növelése) eredményeként kapott görbét megfelelően kinagyítjuk, akkor súrlódással rendelkező eszközökben a kimenet ugrás-szerű változását tapasztalhatjuk. Azt a bemeneti értéket, amelynél a kimenet változása éppen már megjelenik, feloldásnak nevezzük.

Ez az érték a teljes mérési tartományban nem szükségképpen állandó, de a műszergyártók a kalibrációs függvény mentén mérhető legnagyobb feloldást (legnagyobb érzékenységi küszöböt, vagyis érzéketlenségi tartományt) szokták az adatlapokon feltüntetni. A jelenség nyilvánvalóan mérési hibát okoz, ezért a skála felbontása és a feloldás közötti kapcsolatra még visszatérünk.

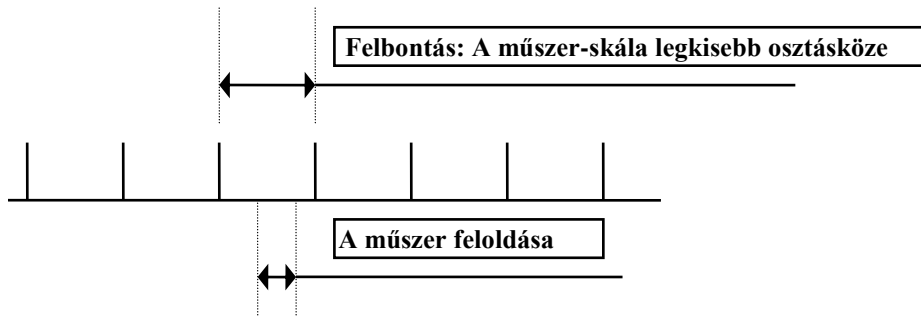
Nyilvánvaló, hogy az elsőrendű műszerként bemutatott hőelektromos rendszer rendelkezhet megszólalási küszöbvel, de rá nem lesz jellemző a feloldás olyan mértékben, mint például egy mérőóra, vagy egy tapintós induktív útdadó esetében. Az alábbi ábra a feloldást szemlélteti (felnagyított kép):



2.14. ábra. A feloldás szemléltetése. A nyíllal jelzett út a műszer valós működését mutatja két mérési pont között

A műszer (mérőlánc) kimenetén megjelenített, egymástól egyértelműen megkülönböztethető jelzések lehetséges legkisebb különbsége a **felbontás**. Természetes elvárás a mérőeszközökkel szemben, hogy a kalibrációs görbe teljes tartományára vo-

natkozóan, a legnagyobb érzéketlenségi küszöbérték kisebb legyen a felbontásnál, azaz a kijelzés (analóg, digitális) legkisebb értékénél.



2.15. ábra. A feloldás és a felbontás viszonya

### **A 2. fejezet irodalma:**

- [2.1] Schnell L.(szerk.): Jelek és rendszerek mérés technikája.  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [2.2] Beledi D. (szerk.) Bevezetés az általános metrológiába  
Országos Mérésügyi Hivatal kiadványa, Budapest, 1988.
- [2.3] Hoffmann, K.: Az ipari mérés technika  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [2.4] Lukács Gy.: Mérés technikai kézikönyv  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.
- [2.5] Petrik O.: Finommechanika  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [2.6] Frühauf, U.: Meßtechnik (Lehrbrief), Modernes Studieren GmbH  
Hamburg - Dresden, 1998.
- [2.7] Sydenham, P.H.: Handbook of Measurement Science  
J. Wiley & Sons, Chichester, 1983.
- [2.8] Draper, Ch.S.: Instrument Engineering  
Massachusetts Inst. of Technology, 1972.
- [2.9] OMH Tanfolyami segédanyag (Nemzetközi dokumentumok, ajánlások fordításai).  
Nemzetközi Metrológiai Értelmező Szótár, 1996.

### **3. VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK**

Ebben a fejezetben összefoglaljuk azokat a valószínűségyszámítási módszereket, amelyeket a méréskiértékelés során használni fogunk. A valószínűségyszámítás fogalmait mérnöki szemszögből mutatjuk be. Ez a tárgyalásmód szemléletes, de a matematikai definíciók pontosságát nem helyettesíti. A felhasznált állításokat, tételeket sem bizonyítjuk szigorú matematikai eszközökkel, sok esetben beérjük szemléletes, de pontatlan mérnöki igazolásokkal. A pontos megfogalmazások tekintetében a bőséges magyar nyelvű szakirodalomra utalunk. (Rényi [3.1], Prékopa [3.2], Monostory [3.3])

Ez a tárgyalásmód lehetőséget ad arra, hogy a mérnökhallgatók úgy ismerjék meg a korábban megszokott, determinisztikus szemlélettől alapvetően eltérő valószínűségyszámítási gondolatmenetet, hogy azonnal kézzelfogható alkalmazást és eredményes problémamegoldó módszereket is lássanak.

Reméljük, hogy amikor a valószínűségyszámítás elvont fogalmainak szigorú, axiomatikusan megalapozott tárgyalása a matematika tárgy keretén belül sorra kerül, akkor már azok nem lesznek teljesen idegenek és eredményes mérnöki módszerekhez tudják kötni azokat.

#### **3.1 Alapfogalmak**

##### Véletlen események

Azokat a jelenségeket, ahol a vizsgálat során tekintetbe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a jelenség lefolyását (a kísérlet kimenetelét), véletlen jelenségeknek (vagy véletlen eseménynek) nevezzük. Tipikus véletlen jelenség a különböző szerencsejátékok kimenetele. A műszaki gyakorlat sok eseménye is ilyen, hiszen úgy is defini-

álhatunk egy eseményt, hogy rögzítünk egy intervallumot és megfigyeljük, hogy a számunkra érdekes változó (átmérő, tömeg, élettartam, stb.) beleesik-e. E változót méréssel határozzuk meg, a mérési eredmények mindig mutatnak egy kis véletlenszerű ingadozást. Így a rögzített intervallumba esés ténye is véletlenszerű.

Gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség.

Rögzítsünk egy számunkra érdekes eseményt, és figyeljük meg, hogy a jelenség (kísérlet)  $n$  alkalommal történő megismétlése során ez az esemény hány alkalommal következik be. Az eredmény bekövetkezésének  $k$  számát az esemény **gyakoriságának**, a  $k/n$  hányadost **relatív gyakoriságnak** nevezzük. Tegyük fel, hogy a kísérletet (jelenséget) tetszőlegesen sokszor meg tudjuk ismételni, és az  $n$  kísérletszám növekedésével a  $k/n$  relatív gyakoriság egy bizonyos stabilitást mutat: csak kevésbé ingadozik egy állandó (átlagos) érték körül. Ezt az állandó értéket nevezzük az esemény **valószínűségének**. Jelöljük a kiválasztott eseményt  $A$ -val, ekkor a

$$P(A) = p$$

jelöli az  $A$  esemény  $p$  valószínűségét. E gondolatmentet következménye, hogy

$$0 \leq p \leq 1 \quad (3.1)$$

A biztosan bekövetkező esemény valószínűsége 1, a lehetetlen eseményé pedig 0. A valószínűség fogalmának axiomatikus bevezetését a Matematika tárgy körében fogják megismerni, és megjegyezzük, hogy a (3.1) összefüggésen kívül még további axiómákat is ki kell mondani a tárgykör ellentmondásmentes felépítéséhez.

Valószínűségi változó.

Az olyan mennyiségeket, amelyeknek az értékét nem határozzák meg egyértelműen a tekintetbe vett körülmények, hanem véletlen jellegű ingadozásokat mutat, valószínűségi változóknak nevezzük. Közismerten ilyen változó valamely szerencsejáték végeredménye, de a műszaki gyakorlat sok változója is ilyen tulajdonságú. Például egy tömeggyártásból

kiemelt alkatrész bármely mérete, tömege, anyagtulajdonsága, de a témánk szempontjából fontos változó: a mérési eredmény is ilyen. A valószínűségi változókat általában görög betűvel jelöljük.

A valószínűségi változó értékére vonatkozó feltételekkel, megkötésekkel véletlen eseményeket tudunk meghatározni. A további tárgyalásunkban beszélni fogunk olyan  $A$  eseményről, ahol a  $\xi$  valószínűségi változó kisebb mint egy rögzített  $x$  érték:  $A_x = (\xi < x)$ , vagy a  $\xi$  változó egy adott  $[a, b]$  intervallumba esik:  $A_{ab} = (a \leq \xi \leq b)$ . Ezekben az esetekben eseményeket határoztunk meg valószínűségi változó (véletlen számértékek) segítségével. A valószínűségi változó és a véletlen események kapcsolata fordítva is elképzelhető.

### Eloszlásfüggvény

Legyen  $\xi$  egy valószínűségi változó, legyen  $x$  egy tetszőleges rögzített érték, és vizsgáljuk az  $A_x = (\xi < x)$  esemény  $P(\xi < x)$  valószínűségét. A

$$P(\xi < x) = F(x) \quad (3.2)$$

egyenlőséggel azt fejezzük ki, hogy a kérdéses valószínűség függ  $x$  értékétől. Más szóval minden  $x$ -hez tartozik az  $F(x)$  valószínűség, a  $\xi$  változó  $F(x)$  valószínűséggel vesz fel  $x$ -nél kisebb értéket. A (3.2) összefüggéssel definiált  $F(x)$  függvényt nevezzük a  $\xi$  változó **eloszlás függvényének**. E függvény tulajdonságai

$$\begin{aligned} F(x) &\rightarrow 0 && \text{ha } x \rightarrow -\infty \\ F(x) &\rightarrow 1 && \text{ha } x \rightarrow \infty \\ F(x_1) &\leq F(x_2) && \text{ha } x_1 < x_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Egy folytonos eloszlásfüggvény grafikonja a 3.1. ábrán látható. Az eloszlásfüggvény segítségével az  $(a, b)$  intervallumba esés valószínűsége így írható:

$$P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) \quad (3.4)$$

### Sűrűségfüggvény



A továbbiakban csak differenciálható eloszlásfüggvényekkel foglalkozunk. Ha az eloszlásfüggvényt differenciáljuk, akkor az

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \quad (3. 5)$$

függvényt **sűrűségfüggvény**nek nevezzük. Az eloszlásfüggvény (3.3) jelű tulajdonságából következik, hogy

$$f(x) \geq 0$$

A (3. 4) összefüggés az  $f(x)$  sűrűségfüggvénnyel így fejezhető ki:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad (3. 6)$$

Vagyis a sűrűségfüggvény alatti (a,b) intervallumhoz tartozó terület arányos a valószínűségi változó (a,b) intervallumba esésének valószínűségével.

### Várható érték

Ha ismerjük a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlás- vagy sűrűségfüggvényét, akkor a valószínűségi változóval kapcsolatos minden kérdésre választ adhatunk. Vannak olyan esetek, amikor nem kell kimerítően jellemezni a valószínűségi változót, elegendő, ha meg tudjuk mondani azt a "középértéket", ami körül a változó ingadozik, és jellemezni tudjuk a változó ingadozását.

A "középérték" pontos megfogalmazása a **várható érték**. A  $\xi$  valószínűségi változó  $M(\xi)$  várható értékét az

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (3. 7)$$

összefüggés határozza meg.

Az alábbi gondolatmenet hozzásegít ahhoz, hogy megértsük azt, hogy mit jelent a (3. 7) improprius integrál. A  $\xi$  valószínűségi változóra vonatkozó megfigyelések legyenek a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  értékek. Számítsuk ki a megfigyelések  $\bar{\xi}$  átlagát:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j$$

A megfigyelés sorozat elemei a  $[\xi_{min}, \xi_{max}]$  intervallumba tartoznak. E befoglaló intervallumot bontsuk fel  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_K$   $K$  darab (diszjunkt) részintervallumra. Számoljuk meg, hogy az egyes részintervallumba hány megfigyelés esik. A részintervallumba esés gyakoriságát jelölje a  $v_1, v_2, \dots, v_K$  számsorozat. Az egyes részintervallumok középső értékét jelölje  $x_1, x_2, \dots, x_K$ . Ezekkel a jelölésekkel a  $\bar{\xi}$  átlag közelítőleg kiszámítható:

$$\bar{\xi} \cong \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K v_k x_k$$

Az összefüggés tovább alakítható:

$$\bar{\xi} \cong \sum_{k=1}^K x_k \frac{v_k}{n}$$

Az összefüggésben szereplő  $v_k/n$  relatív gyakoriság közelíthető az  $f(x)$  sűrűségfüggvény  $\Delta x_k$  intervallumhoz tartozó területével:

$$\bar{\xi} \cong \sum_{k=1}^K x_k f(x_k) \Delta x_k \quad (3. 8)$$

Ha finomítjuk a  $\Delta x_k$  részintervallumokat és  $K \rightarrow \infty$ , akkor a (3.8) összeg az

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

kifejezéshez tart, amelyik kifejezés a valószínűségi változó várható értékét adja. Ez a gondolatmenet érthetővé teszi számunkra a (3. 7) impropius integrált, mert azt mondja, hogy a (3.7) összefüggéssel definiált várható érték egy bizonyos fajta határértéke az átlagnak. Azt nem mondhatjuk, hogy az átlag  $n$  növelése esetén tart a várható értékhez (a szó analízisbeli értelmében), de a későbbiekben idézett nagy számok törvénye pontosabban bemutatja az átlag és a várható érték kapcsolatát.

Nem bizonyítjuk csak kijelentjük és használjuk, hogy a várható érték számítása lineáris művelet. E kijelentés alatt azt értjük, hogy ha a  $\xi$

valószínűségi változó várható értéke  $M(\xi)$  valamint  $a$ , és  $b$  állandóak, akkor

$$M(a\xi + b) = a M(\xi) + b \quad (3.9)$$

A (3.9) egyenlet elfogadását segíti (nem bizonyítja), ha belátjuk hogy átlagokra igaz. Legyen a megfigyelés sorozat eredménye a  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  értékek. Minden  $\xi_i$  értékből számítsuk ki az  $\eta_i$  értéket:

$$\eta_i = a \xi_i + b, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

és számítsuk ki az  $\eta_i$  értékek  $\bar{\eta}$  átlagát:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a \xi_i + b) = a \bar{\xi} + b \quad (3.10)$$

A (3.10) egyenlőség utolsó sora éppen azt mondja ki az átlagokra, mint a (3.9) egyenlet a várható értékekre.

### A szórás

A várható érték bevezetésével részlegesen jellemeztük a valószínűségi változót, mert megadtuk azt az értéket, amely körül ingadozik. A továbbiakban az ingadozás mértékszámát mutatjuk be.

Egy  $\xi$  valószínűségi változó  **$D^2(\xi)$  szórásnégyzetét** a (3.11) összefüggés definiálja:

$$D^2(\xi) = M [(\xi - M(\xi))^2] \quad (3.11)$$

Szavakba foglalva azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó és az  $M(\xi)$  várható érték különbségét négyzetre emeljük, és ennek a mennyiségnek tekintjük a várható értékét (négyzetes-átlagos eltérés). A szórás létezéséhez szükséges és elegendő feltétel, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó  $M(\xi)$  várható értéke létezzen. A (3.11) szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke a  $D(\xi)$  szórás.

A szórásnégyzet fogalmát szemléletessé teszi, ha megmutatjuk, hogy a  $\xi$  változóra vett  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  minta (mérési eredmény) segítségével hogyan közelíthetjük meg a  $D^2(\xi)$  szórásnégyzetet. A mintából számolt becslést **tapasztalati szórásnégyzetnek** hívjuk és  $s_{\xi}^2$ -vel jelöljük:

$$s_{\xi}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 \quad (3.12)$$

A tapasztalati szórásnégyzet csak  $n \rightarrow \infty$  esetén ad torzítatlan becslést. Véges mintaszám esetén a (3.13) összefüggés **szerinti korrigált tapasztalati szórásnégyzet** használatával kapunk torzítatlan becslést. Ha a megfigyelések száma ( $n$ ) “elég nagy”, akkor a korrigált tapasztalati szórásnégyzet “nincs messze” a  $D^2(\xi)$  szórásnégyzettől.

$$s_{\xi}^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 \quad (3.13)$$

A szórás tulajdonságai közül bemutatunk néhányat. A (3.11) összefüggésből következik, hogy a szórás nulla vagy pozitív szám:

$$D(\xi) \geq 0$$

Ha a (3.11) összefüggés szögletes zárójelében lévő négyzetre emelést elvégezzük, majd kihasználjuk a várható érték linearitását, azt kapjuk, hogy

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) \quad (3.14)$$

Legyen  $\xi$  szórásnégyzete  $D^2(\xi)$  és  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  állandó értékek. Ekkor

$$D^2(\mathbf{a} \xi + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 D^2(\xi) \quad (3.15)$$

Ez az összefüggés belátható, ha az  $\eta = \mathbf{a}\xi + \mathbf{b}$  valószínűségi változóra alkalmazzuk a (3.11) definíciót. Egy másik – később felhasználandó – tulajdonság a független  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változók összegének szórásnégyzetére vonatkozik:

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \dots + D^2(\xi_n) \quad (3.16)$$

### 3.2 Nevezetes eloszlások

E fejezet részben csak azt a néhány eloszlást említjük meg, amelyet ebben a könyvben használtunk. Bővebb áttekintés érdekében utalunk Rényi [3.1] és Prékopa [3.2] könyveire.

### Binomiális eloszlás

Tekintsünk egy olyan kísérletet, amelynek két lehetséges kimenetele van ( $A$  és  $B$ ). Végezzük el a kísérletet  $n$  alkalommal. Legyen  $\xi$  azon kísérletek száma, ahol  $A$  következett be. A  $\xi$  változó binomiális eloszlást követ, az  $A$  esemény valószínűségét jelölje  $p$ . Annak a valószínűsége, hogy  $n$  kísérletből az  $A$  esemény éppen  $k$  alkalommal következik be:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (3.17)$$

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = np \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = np(1-p) \quad (3.18)$$

### Normális eloszlás

Egy valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye alábbi alakú:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.19)$$

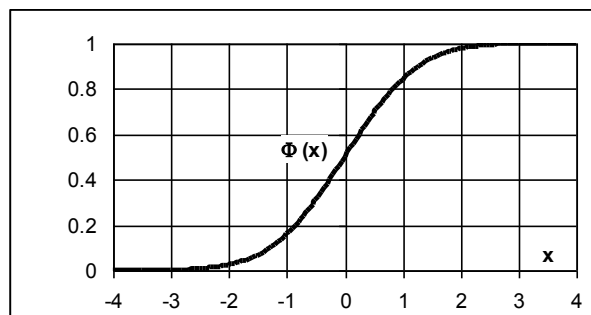
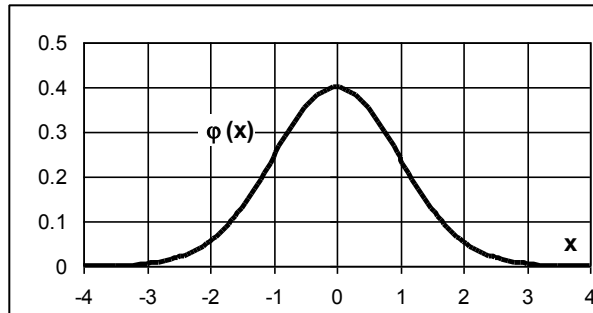
Ebben az összefüggésben szereplő  $m$  paraméter a valószínűségi változó várható értéke,  $\sigma$  pedig a szórása. A  $\xi \in N(m, \sigma)$  jelöléssel azt fejezzük ki, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó  $m$  várható értékű  $\sigma$  szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Ha a  $m = 0$  és  $\sigma = 1$ , akkor "standard" normális eloszlásról beszélünk,  $(N(0,1))$ , ennek sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.20)$$

A  $\varphi(x)$  és a hozzá tartozó

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz$$

eloszlásfüggvény táblázatos formában megtalálható a fejezet végén, grafikonját a 3.1. ábrán mutatjuk be.



3.1. ábra. Standard normális eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye.

### Student eloszlás

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  és  $\eta$  független  $N(0,1)$  eloszlású valószínűségi változók. A

$$t = \frac{\eta \sqrt{n}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}}$$

változót  $n$  szabadságfokú  $t$ - vagy Student eloszlású valószínűségi változónak nevezzük. E változó eloszlásfüggvényének egy részét, táblázatos formában a fejezet végén megadjuk.

### 3.3 A nagy számok törvénye

Az alapfogalmak között hivatkoztunk arra, hogy sok esetben az esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága bizonyos stabilitást mutat. A nagy számok törvényei címszó azokat a matematikai tételeket foglalja össze, amelyek az ilyen típusú stabilitásra vonatkoznak.

Bernoulli tétele azt mondja ki, hogy tekintsünk egy kísérletet, amelynek két kimenetele van:  $A$  és  $B$ . Végezzük el a kísérletet sokszor egymástól függetlenül. Jelölje  $\zeta_n$  az  $A$  esemény relatív gyakoriságát  $n$  kísérlet során. Ekkor minden  $\varepsilon > 0$ -hoz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\zeta_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1 \quad (3.21)$$

ahol  $p$  az  $A$  esemény valószínűsége. Nézzük meg, hogy gyakorlati szempontból mit mond nekünk Bernoulli tétele. A zárójeles esemény  $P$  valószínűsége nagy  $n$  esetén igen közel lesz az egyhez. Ekkor a zárójelen belül álló esemény gyakorlatilag biztos, így

$$\left|\frac{\zeta_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon$$

vagyis a relatív gyakoriság eltérése az esemény valószínűségétől gyakorlatilag tetszőleges kicsivé tehető. A (3.21) egyenlet szabatosan kifejezve azt mondja, hogy a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál az esemény valószínűségéhez.

A várható érték és az átlag kapcsolatára hasonló típusú tétel mondható ki. Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  azonos  $m$  várható értékű és szórású független valószínűségi változók. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - m\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

Vagyis "nagy"  $n$  esetén az átlag és az  $m$  várható érték eltérése gyakorlatilag tetszőlegesen kicsivé tehető.

### 3.4 A központi határeloszlás-tételek

Ezek a tételek azt fejezik ki, hogy nagyszámú független valószínűségi változó összege közelítőleg normális eloszlású, feltéve, hogy az összeg minden egyes tagja (nagy valószínűséggel) igen kicsiny az egész összeghez képest.

A központi határeloszlás tétel tipikus alkalmazásaként a mérési hibákat szokták említeni. Egy mérés eredményére általában igen sok, egymástól független, apró, zavaró, véletlentől függő tényező van hatással. E hatások eredőjeként alakul ki a mérési hiba. A központi határeloszlás tételre való hivatkozással mondhatjuk, hogy a mérési hibák leggyakrabban normális eloszlást követnek.

Nem szabad azt gondolni, hogy minden határeloszlás normális típusú. Ha a hatások nem összegeződnek, hanem szorozódnak (mint pl. törési és aprítási folyamatoknál), akkor az illető mennyiség logaritmus lesz közelítőleg normális eloszlású, maga a mennyiség ú. n. lognormális eloszlást követ.

A központi határeloszlás tételek közül egy tételt mutatunk be. Számos általánosítás megtalálható a valószínűségszámítással foglalkozó, idézett szakirodalomban.

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  teljesen független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, mindegyike  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással. Legyen továbbá

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

és

$$\zeta_n^* = \frac{\zeta_n - M(\zeta_n)}{D(\zeta_n)}$$

Jelölje  $F_n(x)$  a  $\zeta_n^*$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ezekkel a jelölésekkel a központi határeloszlás tétel azt mondja ki, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$



Bizonyítás megtalálható pl. Rényi [3.1] tankönyvében.

### 3.5 Mérési hibák megfogalmazása valószínűségszámítási eszközökkel.

A mérés során a mérési eredmény kialakulására véletlen folyamatok is hatást gyakorolnak. Még a legegyszerűbb esetben is, amikor a mérendő mennyiség állandó és mód nyílik az etalon közvetlen összehasonlítására, a környezeti hatások, a leolvasási pontatlanságok, stb. miatt azt tapasztaljuk, hogy a mérést azonos körülmények között megismételve, más és más eredményt kapunk. Ezért a  $\xi$  mérési eredmény valószínűségi változó, amely a keresett  $X$  "pontos" érték és az  $\varepsilon$  mérési hiba összegeként állítható elő.

$$\xi = X + \varepsilon$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét, és azt kapjuk, hogy

$$M(\xi) = M(X + \varepsilon) = X + M(\varepsilon) \quad (3.22)$$

Az  $\varepsilon$  mérési hiba várható értéke szempontjából két esetet különböztethetünk meg: ha  $M(\varepsilon) = m \neq 0$ , akkor az  $m$  érték olyan hiba, amely minden mérési eredményt azonos módon terhel (esetünkben állandó mennyiség). Az ilyen típusú hibát **rendszeres hibának** nevezzük. Az  $\varepsilon$  mérési hiba fennmaradó része a

$$\delta = \varepsilon - M(\varepsilon)$$

ezt nevezzük **véletlen hibának**. A  $\delta$  véletlen hiba várható értéke nulla, gyakran mondhatjuk (a központi határeloszlás tételre hivatkozva), hogy normális eloszlást követ, szórása  $\sigma$ :

$$\delta \in N(0, \sigma)$$

A mérés során adódó rendszeres és véletlen hiba más-más okokra vezethető vissza. Gyakori rendszeres hiba például a "nullpont hiba". Ha mérésnél használt műszer skálája elmozdult, akár hányszor ismételjük meg a mérést, ez az eltolódás minden mérési eredményt azonos módon

terhel. A mérési eredményből csak akkor mutatható ki, ha más, pontosabb műszerrel végzett mérésekkel hasonlítjuk össze. Ha csak ennek a nullpont-hibás műszernek a mérési eredményei állnak rendelkezésünkre, ezekből az eredményekből nem mutatható ki a hiba. Általában a mérőműszer kalibrálása vagy hitelesítése biztosíthat bennünket arról, hogy a műszer nem okoz számottevő rendszeres hibát. A rendszeres hibának más okai is lehetnek, például hibás mérési eljárás alkalmazása is okozhatja. Mindezekből látható, hogy a rendszeres hiba kezelése a mérés szakterületéhez kapcsolódik. Helyes mérési módszer és megfelelő technikai apparátus használata biztosítja, hogy a rendszeres hiba vagy elhanyagolható, vagy becsülhető értékű legyen.

Más a helyzet a véletlen hibával. Véletlen hiba minden mérési eredményt terhel, hatása kezelhető a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszereivel. Ezek a módszerek nem kötődnek a mérés szakterületéhez, a követendő eljárások általánosan megfogalmazhatók. Ezekkel az eljárásokkal foglalkozunk a továbbiakban.

### ***A 3. fejezet irodalma***

**[3.1]** Rényi, A.: Valószínűségszámítás.

Tankönyvkiadó, Budapest 1954.

**[3.2]** Prékopa, A.: Valószínűségelmélet, műszaki alkalmazásokkal.

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

**[3.3]** Monostory, I.: Valószínűségelmélet és matematikai statisztika.

Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

## 4. ÁLLANDÓ MENNYISÉG KÖZVETLEN MÉRÉSE

Méréskiértékelés szempontjából az az eset egyszerű, amikor a keresett mennyiség állandó (sem az időtől, sem más paramétertől nem függ, vagy a befolyásoló paramétereket a mérés során állandó értéken tudjuk tartani). Ha ezt a keresett állandó mennyiséget közvetlenül meg tudjuk mérni (mód van etalonnal való közvetlen összehasonlításra), akkor a méréssorozat kiértékelése az előző fejezetben megismert valószínűségi számítási módszerek közvetlen alkalmazásával történik.

### 4.1 A mérési sorozat átlaga

Legyen  $X$  keresett mennyiség, a közvetlen mérési sorozat eredménye pedig a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  értékek. Tegyük fel, hogy a méréseink "jók", azaz a  $\xi$  mérési eredményeket nulla várható értékű  $\sigma$  szórású normális eloszlású  $\delta$  véletlen hiba terheli:

$$X = \xi + \delta \quad \text{és} \quad \delta \in N(0, \sigma) \quad (4.1)$$

A (4.1) egyenlet következménye, hogy (mindkét oldal várható értékét véve)

$$X = M(\xi) \quad (4.2)$$

hiszen az  $X$  állandó mennyiség várható értéke önmaga, és  $M(\delta) = 0$ . A (4.2) egyenlet azt mondja nekünk, hogy a véletlen hibával terhelt mérési eredményekből várhatóérték becsléssel határozhatjuk meg a keresett  $X$  mennyiséget.

A várhatóérték-becslés módja esetünkben a mérési eredmények átlagának kiszámítása (utalunk itt a 3. fejezetben bemutatott nagy számok törvényére). A mérési eredmények átlaga:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j \quad (4.3)$$

A (4.3) összefüggésből még azt is kiolvashatjuk, hogy  $\bar{\xi}$  normális eloszlású, hiszen  $n$  darab független azonos (normális) eloszlású valószínűségi változó összegeként áll elő.

Kérdés, hogy az eredmények átlagolása mennyit “javít” az eredeti mérési eredményeken. Vegyük a (4.3) egyenlet mindkét oldalának várható értékét:

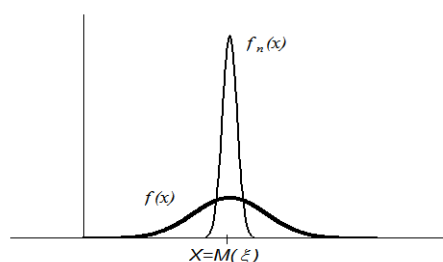
$$M(\bar{\xi}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = M(\xi_j) = M(\xi) = X \quad (4.4)$$

A (4.4) egyenlet szerint az átlag képzésével nem “rontottuk” el a mérési eredményt, hiszen az átlag várható értéke megegyezik az eredeti mérési eredmény várható értékével. De önmagában a (4.4) egyenlet nem indokolja, hogy érdemes átlagot számolni. Ahhoz, hogy az átlagolást indokoljuk, meg kell vizsgálnunk az átlag ingadozását. Tudjuk, hogy a  $\xi$  mérési eredmény szórásnégyzete  $\sigma^2$ , számítsuk ki az átlag szórásnégyzetét (ez jellemzi az átlag ingadozását):

$$D^2(\bar{\xi}) = D^2\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n D^2(\xi_j) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.5)$$

A szórásnégyzetet tagonként lehet számítani, mert a mérési sorozat elemei független valószínűségi változók. A (4.5) egyenlet mutatja meg számunkra az átlagszámítás előnyét: az átlag  $D(\bar{\xi})$  szórása az egyedi mérési eredmény  $\sigma$  szórásának  $\sqrt{n}$ -ed része.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy az átlag normális eloszlású,  $X = M(\xi)$  várható értékű  $\sigma / \sqrt{n}$  szórású valószínűségi változó. A 4.1. ábrában megmutatjuk  $\xi$  változó  $f(x)$  és a  $\bar{\xi}$  átlag  $f_n(x)$  sűrűségfüggvényét



4.1 ábra. A mérési eredmény és az átlag sűrűségfüggvénye

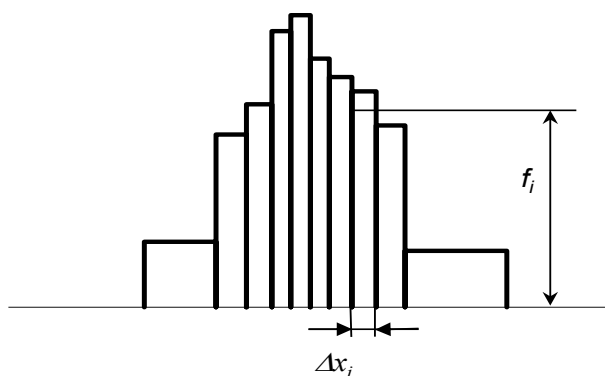
## 4.2 A mérési sorozat jellemzése a tapasztalati sűrűségfüggvénnyel.

A mérési sorozat átlagának kiszámítása “pontoszerű” információt ad az eredményekről. Szemléletesebb képet kaphatunk, ha megszerkesztjük az  $n$ . tapasztalati sűrűség függvényt. Felidézzük azt a gondolatmenetet, amelyet a 3. fejezetben, a (3.7) összefüggés kapcsán mondtunk el.

Legyenek a mérési eredmények a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  értékek. A megfigyelés sorozat elemei a  $[\xi_{min}, \xi_{max}]$  intervallumba tartoznak. Ezt a befoglaló intervallumot bontsuk fel  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_K$   $K$  darab diszjunkt részintervallumra. Számoljuk meg, hogy az egyes részintervallumba hány darab mérési eredmény esik. A részintervallumba esés gyakoriságát jelölje  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_K$  számsorozat. Ezek az értékek függnnek attól, hogy hány mérést végeztünk összesen és attól is, hogy milyen  $\Delta x_i$  hosszúak az egyes részintervallumok. Ezért az  $i$ -edik részintervallumot így nem a  $\nu_i$  gyakoriság,

hanem az  $f_i = \frac{\nu_i}{n \Delta x_i}$  hányados jellemzi.

A teljes a  $[\xi_{min}, \xi_{max}]$  intervallum fölé rajzoljunk egy olyan lépcsős-függvényt, amelynek a  $\Delta x_i$  fölé eső magassága  $f_i$ . A kapott eredményt a 4.2 ábrán mutatjuk be.



4.2 ábra. Tapasztalati sűrűségfüggvény

Egy-egy részintervallum felett lévő téglalap területe:

$$f_i \Delta x_i = \frac{V_i}{n}$$

éppen az intervallumba esés relatív gyakoriságát adja. Nagy mérés-szám esetén ez a relatív gyakoriság közel van az intervallumba esés valószínűségéhez. Ezért az imént rajzolt lépcsős függvény hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a (3.5) összefüggéssel definiált tapasztalati sűrűségfüggvény. A lépcsős-függvény neve tapasztalati sűrűségfüggvény vagy hisztogram.

A részintervallumok  $K$  számát gyakorlati tapasztalatok alapján választjuk meg. Ha mérések száma 100-nál kisebb, akkor a

$$K \approx \sqrt{n}$$

összefüggést használjuk, nagyobb mérésszám esetén a

$$K \approx \log_2 n + 1$$

összefüggés ad alkalmazható eredményt.

A részintervallumok  $\Delta x_i$  hosszának megválasztásánál azt a szabályt tartjuk szem előtt, hogy minden részintervallumba közelítőleg ugyanannyi – tehát  $n/K$  darab mérési eredmény essen. Ez a beosztás nem egyenletes részintervallumokat eredményez, de minden részintervallumba esés relatív gyakorisága közelítőleg ugyanakkora lesz.

### 4.3 Alkalmazás: sorozatgyártású tűgörgő átmérőjének jellemzése

Az alábbiakban a Műszaki Mérések c. tantárgy egyik gyakorlatán született mérési eredményeket mutatjuk be. A gyakorlaton az a feladat, hogy egy gyártási sorozatból kiválasztott 30 darab tűgörgő átmérőjét mérőórával meg kell mérni és a mérési sorozatot tapasztalati sűrűségfüggvénnyel, átlaggal, tapasztalati szórással és az átlag körül rajzolt, három-szórásnyi sugarú intervallummal kell jellemezni.

Az adatfeldolgozáshoz a hallgatók a MITUTOYO DIGIMATIC típusú célszámítógépet használják. Bemenő adatként meg kell adni egy alsó- és egy felsőhatár értéket, amelyet alapértelmezés szerint 8 állandó szélességű részintervallumra bont a program. Az alsóhatár alatt és a felsőhatár felett kijelöl további három-három, az előzőekkel azonos szélességű intervallumot.

A begépett mérési eredmények alapján a célszámítógép meghatározza az  $\bar{x}$  átlagot, a  $SD$  korrigált tapasztalati szórást, az intervallumba esés gyakoriságát, felrajzolja a tapasztalati sűrűségfüggvényt, és kijelöli az átlag körüli  $3SD$  sugarú intervallumot.

A megadott LL alsó-és UL felsőhatár értéke:

$$LL=3.19 \text{ mm}$$

$$UL=3.2 \text{ mm}$$

Az adatfeldolgozás eredményét mutatja a 4.1. táblázat.

| Intervallum határok [mm] | gyakoriság |
|--------------------------|------------|
| 3.1874                   | 1          |
| 3.1875                   | 0          |
| 3.1888                   | 2          |
| 3.1900                   | 3          |
| 3.1912                   | 2          |
| 3.1925                   | 3          |
| 3.1937                   | 8          |

| Intervallum határok [mm] | gyakoriság |
|--------------------------|------------|
| 3.1950                   | 9          |
| 3.1962                   | 0          |
| 3.1975                   | 1          |
| 3.1978                   | 1          |
| 3.2010                   | 0          |
| 3.2022                   | 0          |
| 3.2035                   | 0          |

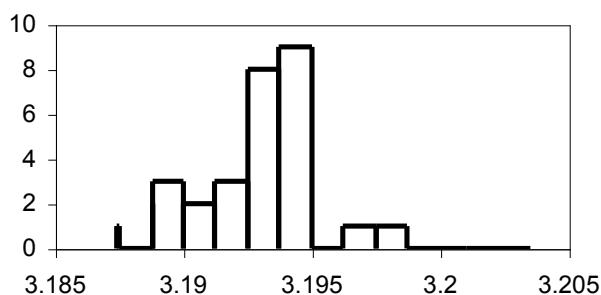
4.1. táblázat. A részintervallumok határai és a gyakoriságok

Az  $\bar{x}$  átlag, az  $SD$  korrigált tapasztalati szórás és az átlag körüli  $3SD$  sugarú intervallum értékei:

$$\bar{x} = 3.19366 \text{ mm} \qquad SD = 0.0027 \text{ mm}$$

$$\bar{x} - 3SD = 3.18615 \text{ mm} \qquad \bar{x} + 3SD = 3.20118 \text{ mm}$$

A 4.3. ábrán mutatjuk be az adatokból rajzolt tapasztalati sűrűségfüggvényt. A gyakorlaton használt célszámítógép egyenletes osztású intervallumokra támaszkodó hisztogramot számol. Ha elfogadjuk, hogy a tűgörgők átmérője normális eloszlást követ és elhanyagoljuk a becslések pontatlanságait, akkor azt mondhatjuk, hogy az esetek 99,73 %-ában a gyártott tűgörgők átmérője a  $3.194 \pm 0,008$  mm intervallumba esik.



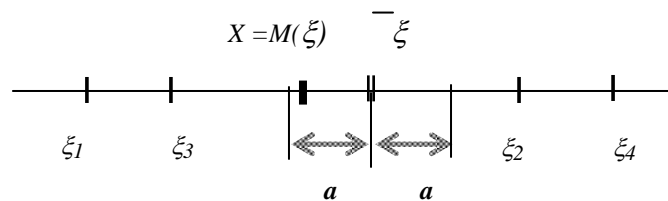
4.3. ábra. Tűgörgők átmérője alapján rajzolt gyakoriságok.

#### 4.4 Konfidencia intervallum becslése, ha a szórás ismert

Tudjuk, hogy az átlag véges mérésszám esetén eltér a keresett várható értéktől. A nagyszámok törvénye alapján tudjuk, hogy az átlag “közeledik” (sztochasztikusan konvergál) a várható értékhez. A közöttük lévő eltérés becslése hozzásegít bennünket a mérési sorozat hibakorlátjának megállapításához. A 4.4 ábrán számegyenesre rajzoltuk a  $\xi_1$ ,



$\xi_2, \dots, \xi_n$  mérési eredményeket, a  $\bar{\xi}$  átlagot és a keresett  $X = M(\xi)$  várható értéket.



4.4 ábra. Konfidencia intervallum

A  $\bar{\xi}$  átlag pontosságát a  $|\bar{\xi} - M(\xi)|$  eltéréssel tudjuk jellemezni, sajnos azonban  $M(\xi)$  értékét nem ismerjük, ezért ezt az eltérést teljes bizonyossággal nem tudjuk kiszámítani.

Ki tudjuk számolni a  $\bar{\xi}$  átlag köré rajzolható intervallum  $a$  sugarát, amely általunk megszabott  $p < 1$  valószínűséggel tartalmazza a keresett  $X = M(\xi)$  értéket. Ezt az intervallumot nevezzük konfidencia intervallumnak, és az általunk választott  $p$  valószínűséget szignifikancia szintnek. A fent mondottakat a (4.6) összefüggés fogalmazza meg:

$$P(\bar{\xi} - a \leq X \leq \bar{\xi} + a) = p \quad (4.6)$$

A  $\bar{\xi}$  és  $p$  ismeretében kívánjuk ebből az egyenletből az  $a$  sugarat kiszámítani. Először rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$P(-a \leq \bar{\xi} - X \leq a) = p$$

Ezt követően osszuk el – önkényesen – az egyenlőtlenség mind a három oldalát  $\sigma/\sqrt{n}$ -nel. Használjuk a

$$\lambda = \frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}; \quad \eta = \frac{\bar{\xi} - X}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (4.7)$$

jelöléseket, amelyek segítségével azt írhatjuk, hogy:

$$P(-\lambda \leq \eta \leq \lambda) = p \quad (4.8)$$

Ha sikerül meghatároznunk  $\eta$  sűrűségfüggvényét, akkor a (4.8) valószínűség kiszámítható lesz. A (4.7) egyenlettel meghatározott  $\eta$ -ról azt tudjuk, hogy normális eloszlású (hiszen  $\bar{\xi}$  is az). Várható értékét és szórását számítsuk ki:

$$M(\eta) = M\left(\frac{\bar{\xi} - X}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0$$

Kihasználva a várható érték számítás linearitását, a (4.4) egyenlet értelmében a számláló nulla. A szórás-számítás azt eredményezi, hogy

$$D^2(\eta) = D^2\left(\frac{\bar{\xi} - X}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{n}{\sigma^2} D^2(\bar{\xi}) = 1$$

Itt használtuk a szórásnégyzet-számítás tulajdonságait és a (4.5) egyenletet. A két utóbbi egyenlet birtokában azt mondhatjuk, hogy  $\eta \in N(0,1)$ . Ezért  $\eta$  sűrűségfüggvénye a 3. fejezetben bemutatott  $\varphi(x)$ , és a (4.8) valószínűség kiszámítható:

$$P(-\lambda \leq \eta \leq \lambda) = p = \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(x) dx = \phi(\lambda) - \phi(-\lambda) \quad (4.9)$$

Figyelembe véve, hogy a  $\phi(\lambda)$  eloszlásfüggvény pontszimmetrikus a  $(0,0.5)$  pontra (lásd 3.1 ábra)

$$\phi(-\lambda) = 1 - \phi(\lambda)$$

Ezzel a (4.9) összefüggés az alábbi alakot kapja:

$$p = 2 \phi(\lambda) - 1$$

Ebből  $\phi(\lambda)$ -t kifejezve:

$$\phi(\lambda) = \frac{p+1}{2} \quad (4.10)$$

A (4.10) egyenlet lehetőséget ad a keresett intervallum-sugár kiszámítására a következő módon: a  $p$  szignifikancia szintet önkényesen megválasztjuk, legyen  $p=0.95$ . Ekkor (4.10) alapján

$$\phi(\lambda) = 0.975. \quad (4.11)$$

A  $\phi(\lambda)$  függvény táblázatából (lásd a 3. fejezet végén) megkeressük, hogy milyen  $\lambda$  értéknél teljesül a (4.11) egyenlet. Azt találjuk, hogy ez

$$\lambda = 1.96 \quad (4.11)$$

értéknél teljesül. Most, hogy  $\lambda$  ismert, visszatérünk a (4.7) összefüggéshez, amelyből  $\lambda$ ,  $\sigma$  és  $n$  ismeretében a keresett  $a$  sugár így számítható:

$$a = \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.12)$$

Ezzel a (4.12) összefüggéssel megoldottuk a fejezet elején felvetett kérdést: ha ismerünk  $n$  darab, véletlen hibával terhel mérési eredményt és a  $\sigma$  szórást, akkor az önkényesen választott  $p$  szignifikancia szinthez ki tudjuk számolni azt az  $a$  intervallum sugarat, amely intervallum  $p$  valószínűséggel tartalmazza az ismeretlen  $x=M(\xi)$  keresett mennyiséget.

#### 4.5 Konfidencia intervallum becslése, ha a szórás nem ismert.

A 4.4 pontban mutatott módszer csak akkor alkalmazható, ha ismerjük a  $\sigma$  szórást. Ez csak kivételes esetekben ismert. Ezért gondoljuk végig, hogy miként módosul a fenti gondolatmenet, ha  $\sigma$  nem ismert, hanem az

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\xi_j - \bar{\xi})^2 \quad (4.13)$$

korrigált tapasztalati szórásnégyzettel becsüljük. Ebben az esetben a (4.7) összefüggések ilyen alakúak:

$$\lambda_{st} = \frac{a}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}; \quad \eta_\delta = \frac{\bar{\xi} - X}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} \quad (4.14)$$

Meg kell állapítanunk, hogy míg a (4.7) összefüggés szerinti  $\eta$ -ban csak a  $\bar{\xi}$  függött a véletlentől és így  $\eta \in N(0,1)$  volt, addig a (4.14) összefüggéssel meghatározott  $\eta_s$ -ben az  $\bar{\xi}$  és az  $s^*$  is véletlentől függ, vagyis valószínűségi változó. Ennek következtében  $\eta_s$  nem normális eloszlású, hanem (amint azt Prékopa [3.2] könyvében láthatjuk) Student eloszlást követ  $(n-1)$  paraméterrel. A Student eloszlás táblázatba foglalt értékeit a

3.fejezet végén mutattuk be. A  $\lambda_{st}$  érték ebből a táblázatból választható,  $p$  szignifikancia szint és  $(n-1)$  ismeretében:

$$\lambda_{st} = \lambda_{st}(p, n - 1)$$

Természetesnek kell találnunk, hogy azonos  $p$  szignifikancia szinthez

$$\lambda_{st}(p, n-1) > \lambda(p) \quad (4.15)$$

A két táblázat összehasonlításán túl ez abból is következik, hogy ha  $\sigma$ -t  $s^*$ -gal becsüljük, ez további bizonytalanságot okoz a konfidencia intervallum sugarának megállapításában. Ezért azonos  $p$  esetén az utóbbi esetben bővebb intervallumot kell kapnunk: ezt mutatja a (4.15) összefüggés. Ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor

$$\lambda_{st}(p, n-1) \rightarrow \lambda(p)$$

A konfidencia intervallum  $a$  sugarát az

$$a = \lambda_{st} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \quad (4.15)$$

összefüggéssel számoljuk ki.

A konfidencia intervallum  $a$  sugaráról megállapíthatjuk, hogy csökkentése csak az  $n$  mérésszám növelésével lehetséges (állandó szignifikancia szint mellett). Ha a szignifikancia szintet növelem (nagyobb biztonsággal akarok dönteni azonos mérés-szám mellett), akkor nagyobb sugarat kapok.

A (4.15) összefüggéssel kiszámolt intervallum sugarat a mérési eredmények átlagához tartozó  $H$  hibakorlátnak is szokták nevezni. Ismerjük fel a (4.15) összefüggésben azt, hogy  $\lambda_{st}$  Student együtthatóval szorzott mennyiség éppen a  $\bar{\xi}$  átlag tapasztalati szórása. A Student együttható értéke 2 körül van. Ezért gyakran szokták azt mondani, hogy valamely  $\xi$  mennyiség  $H$  hibakorlátja az  $\xi$  mennyiség szórásának kétszerese:

$$H_{\xi} \cong 2\sigma_{\xi} \quad (4.16)$$

A (4.16) összefüggés szerint számolt hibakorlát csak a véletlen hibák hatását veszi figyelembe. Az alkalmazott műszer és/vagy a mérési

módszer okozta rendszeres hiba is jelentős hatást gyakorol az eredmény pontosságára. E hatások számításba vételét az 5. fejezetben tárgyaljuk.

A Student eloszlás fenti alkalmazásához hozzáfűzzük Rényi [3.1] könyvében található megjegyzést: “Student”, valódi nevén William S. Gosset angol matematikus, a dublini Arthur Guinness Son & Co. sörgyár alkalmazásában állott és matematikai-statisztika terén elért eredményeit a sörgyártásban alkalmazták. Munkaadójának kívánságára kellett a “Student” álnevet használnia, ugyanis a munkaadó attól félt, hogy ha valódi neve alatt publikálná dolgozatait, ebből a konkurens sörgyárak rájönnének, hogy a statisztikai módszereket a sörgyártásban alkalmazni lehet, és ez csökkentené az ő profitját.

#### **4.6 Alkalmazás: csavarszivattyú elméleti folyadékszállításának meghatározása.**

A csavarszivattyú a térfogat-kiszorítás elvén működő szivattyú, amelyben egy nagy árokmélységű csavarorsót forgatunk és a szállítandó olaj az orsó árkaiban halad előre a nyomócsonk felé. A gép elméleti folyadékszállítása az a térfogat amelyet a csavarorsó egy fordulata alatt a szivattyú szállít (ha a szivattyúba való be- és kilépésnél azonos a nyomás).

A mérést úgy végezzük, hogy a csavarszivattyú tengelyét kézzel forgatjuk és mérőedénnyel megmérjük  $n_i$  fordulat alatt szállított  $\Delta V_i$  folyadék térfogatot. A  $Q_i$  egy fordulatra eső folyadékszállítást a  $Q_i = \Delta V_i / n_i$  összefüggés adja. A kísérletet  $i = 1, 2, \dots, n$  esetben megismételjük. Felteszünk, hogy a fordulatszámolás során nem követtünk el hibát, a  $\Delta V_i$  folyadék-térfogat értékeit pedig véletlen hiba terheli. A megmért  $Q_i$  értékek a  $Q_e$  elméleti érték körül ingadoznak. Célunk olyan konfidencia intervallum szerkesztése, amely 95 %-os valószínűséggel tartalmazza a  $Q_e$  értéket.

A mérés eredményeként  $n=21$  összetartozó  $(n_i, Q_i)$  értékpárt áll a rendelkezésünkre (lásd a 4.2.táblázatot). Kiszámítjuk a  $Q_i$  értékek átlagát:

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i = 13,25 \text{ cm}^3 / \text{ford}.$$

A táblázat utolsó oszlopából számítható a korrigált tapasztalati szórásnégyzet.

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{Q} - Q_i)^2 = 0.1419 \text{ (cm}^3 / \text{ford)}^2 \quad \text{és} \quad s^* = 0,38 \text{ cm}^3 / \text{ford}$$

A konfidencia intervallum

$$\bar{Q} - \lambda_{st} \frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq Q_e \leq \bar{Q} + \lambda_{st} \frac{s^*}{\sqrt{n}}$$

alakú,  $p=95\%$  valószínűségi szinthez és  $n-1 = 20$  értékhez  $\lambda_{st} = 2,086$  érték tartozik, a Student-eloszlás táblázata alapján (lásd a 3. fejezet végén). Az értékek behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$13.25 - 2.086 \frac{0.38}{\sqrt{21}} \leq Q \leq 13.25 + 2.086 \frac{0.38}{\sqrt{21}}$$

$$Q = 13.25 \pm 0.17 \text{ cm}^3 / \text{ford} \quad (95\%)$$

| $Q_i$ [cm <sup>3</sup> /ford] | $Q_i$ [cm <sup>3</sup> /ford] | $Q_i$ [cm <sup>3</sup> /ford] |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 13,00                         | 13,67                         | 13,20                         |
| 13,67                         | 12,22                         | 13,00                         |
| 13,33                         | 13,00                         | 13,50                         |
| 13,33                         | 13,21                         | 13,00                         |
| 13,67                         | 13,39                         | 13,33                         |
| 13,33                         | 12,44                         | 13,64                         |
| 13,50                         | 13,33                         | 13,42                         |

4.2. táblázat. Csavarszivattyú folyadékszállítása

#### 4.7 Adott pontossághoz tartozó mérésszám becslése

Továbbra is azzal az egyszerű esettel foglalkozunk, amikor egy állandó mennyiséget közvetlenül meg tudunk mérni, és méréseinket csak véletlen hiba terheli.

Abban az esetben, ha a mérési sorozat  $\sigma$  szórása ismert, akkor az átlag pontosságát jellemző konfidencia intervallum  $a$  sugara a (4.12) összefüggéssel számítható. Feltehető az a kérdés, hogy hány mérést kell ahhoz végezni, hogy a

$$h = \frac{a}{\xi}$$

relatív hibakorlát egy adott  $h_m$  értéknél kisebb legyen, azaz:

$$\frac{a}{\xi} \leq h_m$$

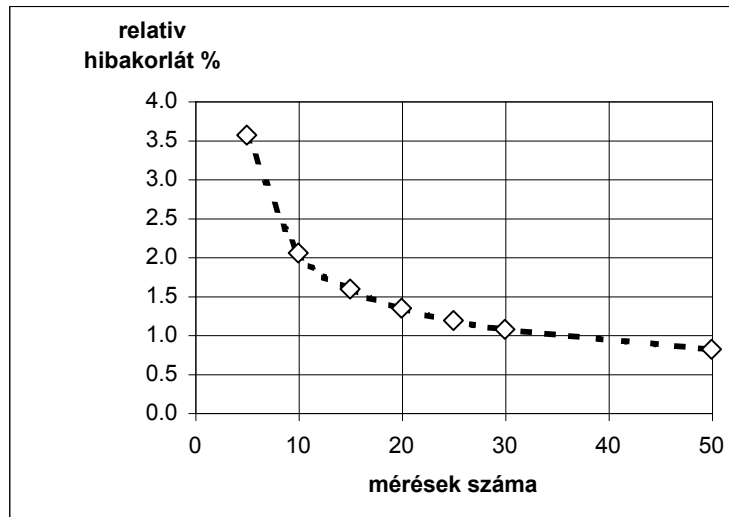
A (4.12) összefüggés felhasználásával következik, hogy

$$\sqrt{n} \geq \frac{\lambda\sigma}{h_m \xi} \quad (4.17)$$

Ha a mérési sorozat  $\sigma$  szórása nem ismert, akkor az adott pontosság eléréséhez szükséges minimális mérésszám nem adható meg a (4.17) összefüggéshez hasonló explicit formulával. Mérnöki szempontból elfogadható közelítés az alábbi módszerrel határozható meg: legyen adott a  $h_m$  relatív hibakorlát-határ, és tételezzük fel, hogy a mérési sorozat szórásának  $s^*$  becslése és  $\bar{\xi}$  átlaga keveset változik a mérések számának növelésével. Ebben az esetben minden  $n_i$  mérésszámot ki tudjuk számítani a  $h_i$  relatív hibakorlát a (4.15) összefüggés segítségével:

$$h_i = \lambda_{st} \frac{s^*}{\bar{\xi} \sqrt{n_i}} \quad (4.18)$$

Ebben az összefüggésben  $\lambda_{st}$  is függ  $n_i$ -től. Néhány  $n_i$  értékhez kiszámolt  $h_i$  értékből a 4.5. grafikon rajzolható:



4.5.ábra

A relatív hibakorlát változása a mérések számának függvényében

A grafikon természetesen csak  $n_i$  egész értékeinél értelmezett, a szaggatott vonallal való összekötés csak a változás tendenciáját hivatott mutatni. Ebből a grafikonból adott  $h_m$  -hez kiolvasható a szükséges  $n_m$  mérésszám.

#### 4.8 Alkalmazás: adott pontossághoz tartozó mérésszám becslése

A 4.6 pontban bemutatott alkalmazás adatait felhasználva számítsuk ki, hogy legalább hány mérést kell végezni ahhoz, hogy a relatív hibakorlát 1 %-nál kisebb legyen. Felhasználjuk a

$$\bar{Q} = 13,25 \text{ cm}^3/\text{ford} \quad \text{és} \quad s^* = 0,38 \text{ cm}^3/\text{ford}$$

értéket és (4.18) összefüggés használatával a 4.3. táblázatban látható értékeket kaptuk. Ezeket az értékeket ábrázoltuk a fenti 4.5. ábrán, ahonnan leolvashatjuk, hogy az 1 %-os relatív hibakorlát eléréséhez legalább  $n \cong 35$  mérésre van szükség.



| <b>Mérések száma<br/>(<math>n_i</math>)</b> | <b><math>h_i</math> %</b> | <b>Mérések száma (<math>n_i</math>)</b> | <b><math>h_i</math> %</b> |
|---|---------------------------|---|---------------------------|
| 5   | 3.56                      | 25                                      | 1.18                      |
| 10  | 2.05                      | 30                                      | 1.07                      |
| 15  | 1.59                      | 50                                      | 0.81                      |
| 20  | 1.34                      | 500                                     | 0.25                      |

4.3. táblázat. Mérések száma és a relatív hibakorlát

#### **A 4. fejezet irodalma**

- [4.1]** Vincze, I.: Matematikai statisztika műszaki alkalmazásokkal.  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968.
- [4.2]** Bendat, J.S.-Piersol, A.G.: Random Data Analysis and  
Measurement Procedures.  
John Wiley & Sons, 2000. New York
- [4.3]** Lukács O.: Matematikai statisztika.  
Bolyai könyvek, Műszaki Könyvkiadó, 1999.
- [4.4]** Halász, G.-Márialigeti, J.-Zobory. I.: Statisztikus módszerek a mű-  
szaki gyakorlatban.  
BME továbbképző Intézete, 1976.

## 5. KÖZVETETT MÉRÉSEK, HIBATERJEDÉS

A műszaki mérések többségénél nincs lehetőségünk közvetlen mérésre, etalonnal való közvetlen összehasonlításra, akár a mérendő mennyiség nagysága, akár ennek összetett mivolta miatt. Nem mérünk meg közvetlen módon két város közötti távolságot, bár van hosszúság-etalonunk, és nem tudunk közvetlenül hatásfokot mérni, mert nincs hatásfok etalonunk. Ilyen esetben a közvetett mérés módszeréhez kell folyamodnunk.

Közvetett a mérés, ha a higanyos hőmérővel mérünk hőmérsékletet. Ekkor valójában egy táguló higanyoszlop hosszát mérjük meg, ami arányos a hőmérséklettel. A hőmérséklet skálát (az összefüggést bemenő és kimenő jellemzők között) elméleti vagy kísérleti úton rendeljük hozzá az oszlop hosszához. Akkor is közvetett a mérés, ha egy tapintó mechanikus elmozdulását karos-fogaskerékes mechanizmus adja át egy mutatónak. Ekkor a tapintó elmozdulása és a mutató elfordulása közötti függvénykapcsolatot kell ismernünk.

A közvetett mérés során a mérendő mennyiség értékét a vele ismert függvénykapcsolatban álló egy vagy több, közvetlenül mérhető mennyiség mérési eredményéből határozzuk meg. Az ismert függvénykapcsolatba tehát hibával terhelt mennyiséget helyettesítünk be, és kíváncsiak vagyunk a függvényérték – az általunk keresett mennyiség – hibájára. Közvetett mérés esetén az eredő hiba csak számítással határozható meg, ezért a hibaszámításra kiemelt figyelmet kell fordítani.

Általában feltesszük, hogy ismerjük az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mennyiségek egy becslését, azok hibáját, szórását, vagy hibakorlátját, ismerjük továbbá az

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

összefüggést. Kérdés, hogy a fentiek ismeretében hogyan tudjuk meghatározni az  $y$  mennyiség hibáját vagy hibakorlátját. E kérdés megválaszolásával foglalkozunk a továbbiakban.

## 5.1 Ismert nagyságú és előjelű (rendszeres) hiba terjedése

A rendszeres hibák terjedésének számításához ismernünk kell (nagyságra és előjelre) az egyes  $x_i$  mennyiségek  $\Delta x_i$  rendszeres hibáit. Az  $y$  mennyiség pontos értékét az (5.1) függvénynek az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  helyen vett helyettesítési értéke, a hibát pedig az  $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n$  helyen vett helyettesítési érték és a pontos érték különbsége adja.

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.2)$$

Ismerjük az  $f$  függvényt, ismerjük (nagyságra és előjelre) az  $x_i$  és a  $\Delta x_i$  mennyiségeket, tehát az (5.2) összefüggéssel az  $y$  mennyiség  $\Delta y$  rendszeres hibája mindig (pontosan) kiszámítható.

E helyen jegyezzük meg, hogy a legújabb törekvések célja valamennyi rendszeres hiba forrásának felderítése, és hatásukat korrekcióval (kalibrálással) veszik figyelembe.

Az (5.2) összefüggés nem mutatja meg számunkra azt, hogy a  $\Delta y$  eredő rendszeres hibában az egyes  $\Delta x_i$  rendszeres hibák milyen súllyal szerepelnek, milyen a hatásuk. Például ha a  $\Delta y$  csökkentése a cél, melyik  $\Delta x_i$  hibáját érdemes csökkenteni azért, hogy  $\Delta y$  megfelelő szintre súlyledjen. E kérdés megválaszolásához tekintsük az (5.1) függvény Taylor sorát, és a lineárisnál magasabb rendű tagokat hanyagoljuk el

$$y + \Delta y \cong f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$
$$H_y = \Delta y \cong \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (5.3)$$

Az (5.3) összefüggés a  $H_y$  eredő rendszeres (abszolút) hiba terjedésének általánosan használt összefüggése. Akkor érvényes, ha a linearizáláskor elkövetett hiba (a magasabb rendű tagok elhanyagolása) nem számottevő a lineáris tagok nagyságához képest. Az (5.3) kifejezés-

ben szereplő parciális deriváltakat gyakran **érzékenységi együtthatóknak** hívják, hiszen ezek mutatják meg, hogy  $\Delta y$  milyen érzékeny az egyes  $\Delta x_i$  mennyiségekre, a  $\Delta x_i$  mennyiségek hogyan, milyen súllyal vesznek részt a  $\Delta y$  létrehozásában.

Előfordul olyan eset is, amikor az  $y$  mennyiséget nem tudjuk explicit formában kifejezni, amint azt az (5.1) összefüggés mutatja, hanem csak az

$$F(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5.4)$$

implicit összefüggés áll rendelkezésünkre. Ekkor, (követve a fenti gondolatmenetet) azt mondhatjuk, hogy a függvény  $\Delta F$  megváltozása is nulla, amiből

$$\Delta F = 0 \cong \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

összefüggést nyerjük. Ebből kifejezhető a keresett  $\Delta y$

$$H_y = \Delta y \cong - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (5.5)$$

Természetesen az (5.1) összefüggést átrendezve

$$y - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

és az így kapott  $F$ -re alkalmazzuk az (5.5.) összefüggést, akkor visszakapjuk az eredeti (5.3.) összefüggésünket.

A szakirodalomban használják a **rendszeres abszolút hiba maximális értékének** fogalmát is. Ezt úgy definiálják, hogy az (5.3) kifejezés tagjainak abszolút értékét összegzik:

$$\Delta y_{\max} \cong \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \quad (5.6)$$

Az ilyen módon számított érték alapján összehasonlíthatnak mérőeszközöket vagy mérési eljárásokat.

Igen gyakori, hogy a rendszeres abszolút hiba mellett a **rendszeres relatív hibát** adják meg. Az abszolút hibából a relatív hiba az ismert viszonyítás révén kapható meg:

$$H_{rel} = \frac{\Delta y}{y} \cong \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{y} \quad (5.7)$$

Ha az  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvényben a változók közötti művelet csak osztás, szorzás vagy hatványozás, akkor a relatív rendszeres hiba kiszámításának módja egyszerűsödik. Legyen  $C$  tetszőleges konstans, és

$$y = C x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (5.8)$$

Kiszámítva az (5.7) kifejezés szerinti parciális deriváltakat, azt kapjuk, hogy:

$$H_{rel} = \frac{\Delta y}{y} \cong \sum_{i=1}^n k_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (5.9)$$

A fenti fogalmakat az alábbi egyszerű példán mutatjuk be. Legyen a  $V$  henger térfogat a  $D$  átmérő és  $h$  magasság függvénye:

$$V = \frac{D^2 \cdot \pi \cdot h}{4} \quad (5.10)$$

A  $\Delta D$  és a  $\Delta h$  rendszeres hibák hatására a térfogat  $\Delta V$  hibája:

$$H_{absz} = \Delta V = \frac{2D\pi h}{4} \Delta D + \frac{D^2\pi}{4} \Delta h = E_1 \cdot \Delta D + E_2 \cdot \Delta h \quad (5.11)$$

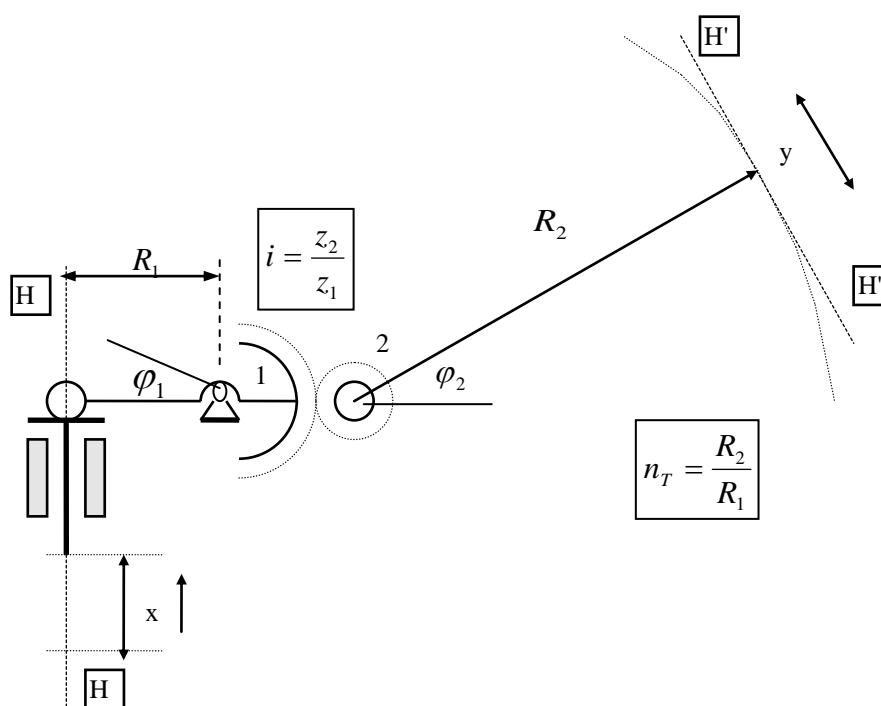
Itt  $E_1$  és  $E_2$ -vel jelöltük az érzékenységi együtthatókat. A relatív hiba az (5.9) kifejezésnek megfelelően:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} \quad (5.12)$$

vagy is ebben az egyszerű esetben a térfogat relatív hibája a változók relatív hibájából számolható. A rendszeres hiba terjedését egy mechanikus műszer – a szinusz emelő – hibájának kiszámításán keresztül mutatjuk be.

## 5.2 Alkalmazás: a szinusz-emelő rendszeres hibája

A gépészeti mérés technikában igen gyakran vagy tisztán mechanikus, vagy elektromechanikus műszerekkel dolgozunk. Ezekben a műszerekben a mérendő fizikai mennyiséget valamilyen mechanizmus közvetíti ahhoz a szerkezeti elemhez, amelynek alakváltozása, vagy elmozdulása lehetővé teszi a mechanikai mennyiség kijelzését, vagy vilamos analóg jellé való átalakítását. Ezért a mérés technikában fokozott követelményeket támasztanak az információ továbbító finommechanikai szerkezetekkel és azok gyártási hibáival (tűréseivel, hibakorlátaival) szemben.



5.1 ábra. Szinusz-mechanizmus (pl. tapintó-emelő) és fogaskerék áttétel (pl. mérőóra)

A bemutatott eszköz lehet elmozdulás mérő, ebben az esetben ez egy teljes mérőlánc, érzékelő - átalakító - kijelző, illetve más megfogalmazásban jelátvivő - jelfeldolgozó - megjelenítő [5.3]. De elképzelhetjük ezt a

vázlatot egy precíziós manométer egy szerkezeti részleteként is, a nyomás-átalakító membránja nélkül. Ez utóbbi esetben a mérőláncnak természetesen csak két tagját látjuk, az átalakítót és a kijelzőt.

A mérőláncon végigterjedő hibák szemléltetésére nézzünk ezt a hagyományos mechanikai műszert. Az u.n. szinusz emelőt és fogaskerék áttétet tartalmazó eszközben az 1 és 2 tengelyek között a módosítás  $i$ , a karok aránya (a szinusz emelő és a skála mutatójának hosszaránya) pedig  $n_T$ .

A szinusz-mechanizmus és a mutató összefüggései, ha  $x$  jelöli a tapintó elmozdulást, és  $y$  a mutató skála körívén való elmozdulását:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \text{Arc sin } \frac{x}{R_1} \\ y = R_2 \cdot \varphi_2 \end{array} \right\} \quad y = \frac{R_2}{i} \text{Arc sin} \left( \frac{x}{R_1} \right) \quad (5.13)$$

Legyen az általános leírás mellett a példánkban néhány egyszerű számadat és méret a szemléletesebb bemutatás kedvéért. A hibák nagysága és előjele legyen ismert.

A szinusz-emelő karhossza egy a valósághoz közeli érték legyen ( $R_1=10$  mm), hibája  $\Delta R_1=0.02$  mm. A mutató hosszát  $R_2=100$  mm-ben választjuk meg, és legyen a gyártási hibája  $\Delta R_2=0.1$  mm. A fogas ív fogszáma  $z_1=200$ , míg a mutatóval egytengelyű fogaskerék fogszáma  $z_2=20$ .

A műszerre jellemző konstansok a fenti adatokkal:

$$\frac{R_2}{R_1} = n_T = 10 \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = i = \frac{1}{10}$$

a gyakorlatban a szinusz-emelőt tartalmazó tapintós műszereknél a bemenet ( $x$ ) abszolút értéke korlátozva van, optiméterek esetében  $|x_{\max}| \leq 100 \mu\text{m} = 0.1\text{mm}$ . Ennek oka az, hogy igyekeznek a skála linearitását megőrizni. Konstruktív okokból  $x/R_1 < 1$ , így a MacLauren sor segítségével a műszeregyenlet átalakítható:

$$y = \frac{R_2}{i} \text{Arc sin} \left( \frac{x}{R_1} \right) = \frac{R_2}{i} \left[ \left( \frac{x}{R_1} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{R_1} \right)^3 + \frac{3}{40} \left( \frac{x}{R_1} \right)^5 + \dots \right] \quad (5.14)$$

Figyelembe véve a jellemző méretarányokat, általában és esetünkben is legfeljebb még a harmadik hatványon lévő összetevő mértékadó, tehát:

$$y = \frac{R_2}{i} \left[ \left( \frac{x}{R_1} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{R_1} \right)^3 \right] = \frac{R_2 \cdot x \cdot (6R_1^2 + x^2)}{6 \cdot i \cdot R_1^3} \quad (5.15)$$

Látható, hogy minél kisebb a bemenő  $x$  elmozdulás az  $R_1$  karhosszhoz viszonyítva, annál inkább tartható a lineáris skálaosztás. Ehhez kapcsolódik a mechanikai egységeket tartalmazó műszerekben a megvalósítható nagyítás kérdése. A példánkban szereplő eredő nagyítás az egyfokozatú hajtómű miatt nyilvánvalóan nem lenne elégséges, de ismeretes, hogy a mérőórákban például már többfokozatú gyorsító hajtómű található. Ha a műszersúrlódásokkal együtt járó hiszterézis hibáját el akarják kerülni, akkor a nagyítást optikai úton oldják meg, vagy a jelet villamos analóg mennyiséggé alakítják át, és felerősítik.

A példában az egyszerűség kedvéért maradjunk egyetlen gyorsító fokozat alkalmazásánál. A mutató körív menti végkitérése a tapintó maximális bemenő elmozdulása esetén kiszámítható:

$$y_{\max} \cong \frac{R_2}{i} \frac{x_{\max}}{R_1} = 10 \cdot 10 \cdot 0.1 \text{ mm} = 10 \text{ mm}$$

A műszer két olyan elemet tartalmaz, amelynél figyelembe kell vennünk a lehetséges gyártási hibákat. Határozzuk meg a műszer eredő rendszeres abszolút hibáját, az egyes hibaokozók súlytényezőit, a maximális abszolút hibát, és a relatív hibát, a megadott konstrukciós adatokkal, a rendszeres hiba terjedésének összefüggésével!



### **Abszolút hiba eredőjének számítása – a műszer rendszeres hibája**

Az abszolút hiba terjedésének számításához a két hibaösszetevő szerint kell parciálisan deriválni a műszeregyenletet:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial y}{\partial R_2} \Delta R_2 = - \left[ \frac{R_2}{i} \left( \frac{x}{R_1^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{x^3}{R_1^4} \right] \Delta R_1 + \frac{1}{i} \left( \frac{x}{R_1} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{R_1} \right)^3 \right) \Delta R_2 \quad (5.16)$$

$$\Delta y = - \frac{R_2}{i R_1} \left[ \frac{x}{R_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R_1} \right)^3 \right] \Delta R_1 + \frac{1}{i} \left[ \frac{x}{R_1} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{R_1} \right)^3 \right] \Delta R_2 \quad (5.17)$$

A példában szereplő műszer eredő rendszeres hibájának számítása a konstrukciós adatok alapján egyszerűsíthető. Látható, hogy a szinusz mechanizmus karhosszának a bemenő elmozduláshoz viszonyított aránya jelentősen befolyásolja az eszköz hibáját. Esetünkben ez az arány kedvező:

$$\frac{x_{\max}}{R_1} = \frac{0.1 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 10^{-2}, \text{ tehát írható, hogy } \frac{x_{\max}}{R_1} \gg \left( \frac{x_{\max}}{R_1} \right)^3, \text{ és ezzel a bemeneti}$$

elmozdulástól (mérendő mennyiségtől) függő rendszeres műszerhiba:

$$\Delta y \cong - \frac{n_T}{i} \left( \frac{x}{R_1} \right) \Delta R_1 + \frac{1}{i} \left( \frac{x}{R_1} \right) \Delta R_2 \quad (5.18)$$

A két hiba súlytényezője láthatóan eltérő, és ugyancsak függ az “x” bemeneti elmozdulástól:

$$\Delta R_1 \text{ súlytényezője: } k_1 = - \left( \frac{n_T}{i} \frac{1}{R_1} \right) \cdot x = - \frac{10}{1[\text{mm}]} x [\text{mm}]$$

$$\Delta R_2 \text{ súlytényezője: } k_2 = \frac{1}{i \cdot R_1} \cdot x = \frac{10}{10[\text{mm}]} x [\text{mm}]$$

Ebben az esetben is célszerű a bemeneti elmozdulás lehetséges maximális értéke mellett vizsgálni a súlytényezőket (érzékenységi együtthatókat), hiszen ezek a faktorok segítik a műszerkonstruktőröket és a műszer-alkalmazókat a célnak legmegfelelőbb eszközök kiválasztásában.

A súlytényezők maximális értékével az eredő rendszeres műszerhiba számszerű értéke az alábbi lesz:

$$\Delta y = k_1 \cdot x_{\max} \cdot \Delta R_1 + k_2 \cdot x_{\max} \cdot \Delta R_2$$

$$\Delta y = -10 \cdot 0.1 \cdot \Delta R_1 + 0.1 \cdot 1 \cdot \Delta R_2 = (-2 \cdot 10^{-2} + 10^{-1} \cdot 10^{-1}) \text{ mm} = -10^{-2} \text{ mm} = -10 \mu\text{m}$$

Az abszolút hiba maximális értéke az egyes összetevők abszolút értékének figyelembe vételével számítható:

$$|\Delta y| = |\Delta R_1| + |10^{-1} \Delta R_2| = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mm} = 30 \mu\text{m}$$

### **A relatív hiba számítása**

A relatív hiba számításához felhasználjuk az abszolút hiba számításának képletét és a műszeregyenletet:

$$\frac{\Delta y}{y} = -\frac{R_2 x}{R_1^2 i} \cdot \frac{(2R_1^2 + x^2)}{2R_1^2} \cdot \frac{6iR_1^3}{R_2 x (6R_1^2 + x^2)} \cdot \Delta R_1 + \frac{x}{iR_1} \cdot \frac{6R_1^2 + x^2}{6R_1^2} \cdot \frac{6iR_1^3}{R_2 x (6R_1^2 + x^2)} \cdot \Delta R_2$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{3(2R_1^2 + x^2) \Delta R_1}{(6R_1^2 + x^2) R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{6 + 3\left(\frac{x}{R_1}\right)^2}{6 + \left(\frac{x}{R_1}\right)^2} \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (5.19)$$

Ha az eredő abszolút műszerhiba számításánál figyelembe vettük a maximális bemenő elmozdulás és a kar arányát, tehát

$$x_{\max}/R_1 = 0.1/10 = 10^{-2} < 1,$$

akkor következetesen itt is megtesszük. Ezzel a második tag együtthatója 1.000033 lesz, ami belátható módon nem változtat lényegesen az eredményen. A vizsgált műszer relatív hibája számértékekkel, ha minden adatot mm-ben helyettesítünk be:

$$\frac{\Delta y}{y} \cong \frac{10^{-1}}{10^2} - 1.0033 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10} \cong -10^{-3}$$

### 5.3 A véletlen hibák terjedése közvetett mérésnél

A véletlen hibák terjedésének vizsgálatakor abból kell kiindulnunk, hogy az (5.1.) összefüggésben szereplő  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mennyiségeket véletlen hiba terheli, tehát valószínűségi változók. Az (5.1) összefüggésbe helyettesítve ezeket a valószínűségi változókat, az eredményül kapott  $y$  mennyiség is valószínűségi változó lesz. Véletlen hibával terhelt közvetlen mérés kiértékelésénél (lásd a 4. fejezetet) a mért mennyiség (tapasztalati) szórásából tudunk hibakorlátot meghatározni: Most is ezt az utat követjük: először definíciót adunk a keresett  $y$  mennyiség véletlen hibájára, majd kiszámítjuk szórását, végül hibakorlátot (konfidencia intervallumot) határozunk meg.

Az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mennyiséget terhelő véletlen hibákat jelölje  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ . Ekkor az  $y$  mennyiséget terhelő  $\varepsilon_y$  hiba az (5.3) összefüggés szerint:

$$\varepsilon_y \cong \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i \quad (5.20)$$

alakú. Nézzük meg  $\varepsilon_y$  tulajdonságait. Hanyagoljuk el azt, hogy a parciális deriváltak helyettesítési értéke valószínűségi változó, tekintsük azokat konstansoknak. A sorba fejtés eredményeként az  $\varepsilon_y$  mint a  $\varepsilon_i$  mennyiségek lineáris kombinációja áll előttünk. Ezt felhasználva, vegyük mindkét oldal várható értékét:

$$M(\varepsilon_y) \cong \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} M(\varepsilon_i). \quad (5.21)$$

Ha  $\varepsilon_i$  nulla várható értékű véletlen hiba, akkor  $\varepsilon_y$  hiba is nulla várható értékű, és ha  $\varepsilon_i$  normális eloszlású akkor  $\varepsilon_y$  is az.

Az  $y$ -ra vonatkozó konfidencia intervallum meghatározása érdekében számítsuk ki  $(y + \varepsilon_y)$  mennyiség  $\sigma_y$  szórását. Feltéve, hogy az egyes  $x_i$  mennyiségek mérése független, akkor az  $(x_i + \varepsilon_i)$  változók függetlenek,

így az összeg szórásnégyzete az összeadandók szórásnégyzetének összegével egyenlő:

$$\sigma_y^2 \cong \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (5.22)$$

Itt ismét kihasználtuk azt az elhanyagolást, hogy a parciális deriváltak nem valószínűségi változók, hanem konstansok. A relatív szórásnégyzet számítása az (5.23) összefüggés szerint történik:

$$\left( \frac{\sigma_y}{y} \right)^2 \cong \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \left( \frac{\sigma_{x_i}}{y} \right)^2 \quad (5.23)$$

Az összefüggés egyszerűsödik, ha az  $y$  függvény az (5.8.) szerinti felépítésű. Ekkor az (5.9.) összefüggéshez hasonlóan a relatív szórásnégyzet az egyes változók relatív szórásnégyzetének lineáris kombinációjából állítható elő:

$$\left( \frac{\sigma_y}{y} \right)^2 \cong \sum_{i=1}^n \left( k_i \frac{\sigma_{x_i}}{x_i} \right)^2 \quad (5.24)$$

A fenti összefüggések alkalmazását a már korábban is példaként használt  $V$  hengertérfogat szórásszámításán keresztül mutatjuk be, itt a henger térfogatát az (5.10) összefüggés szerint számoljuk. A henger  $D$  átmérőjét és a  $h$  magasságot  $N$  alkalommal megmérjük. Kiszámoljuk az átlagokat, valamint a korrigált tapasztalati szórásokat:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N D_j & \bar{h} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j \\ s_D^{*2} &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (D_j - \bar{D})^2 & s_h^{*2} &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (h_j - \bar{h})^2 \end{aligned}$$

A  $V$  térfogat összefüggésbe az átlagos átmérőt és átlagos magasságot helyettesítjük be, és kapunk egy közepes térfogatot:

$$\bar{V} = \frac{\bar{D}^2 \cdot \pi \cdot \bar{h}}{4} \quad (5.25)$$

Így a  $\bar{V}$  térfogat relatív szórásának számításakor az (5.23) összefüggésben a  $\bar{D}$  és a  $\bar{h}$  szórásaival kell számolnunk:

$$s_D^{*2} = \frac{S_D^{*2}}{N} \qquad s_h^{*2} = \frac{S_h^{*2}}{N}$$

E kifejezéseket helyettesítve az (5.24) összefüggésbe, azt kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{s_V^*}{\bar{V}}\right)^2 = \left(2 \frac{s_D^*}{D}\right)^2 + \left(\frac{s_h^*}{h}\right)^2 \quad (5.26)$$

Szükségesnek tartjuk felhívni a figyelmet arra, hogy az (5.2) összefüggéshez fűzött gondolatmenethez hasonló eljárás itt is alkalmazható. Ha csak az eredő  $y$  (vagyis a  $V$  térfogat) szórásának meghatározása a cél, és nem kell vizsgálnunk az egyes komponensek hatását, akkor egyszerűbb, ha az alábbiak szerint járunk el:

Minden  $D_j$ ,  $h_j$  értékpárt behelyettesítünk az (5.10) összefüggésbe és kapjuk a  $V_1, V_2, \dots, V_N$  térfogatok sorozatát. Ebből a szorzatból számolhatunk átlagot, és tapasztalati szórást is:

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_j \qquad s_V^{*2} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (V_j - \bar{V})^2$$

Ha így számoljuk az eredő tapasztalati szórást, akkor nem kell differenciálni, a parciális deriváltak helyettesi értékét számolni.

#### 5.4 A mérési eredmény megadása (rendszeres és véletlen hibák hatása)

A mérési eredmény bizonytalanságát befolyásoló tényezők közül az 5.1. alfejezetben tárgyaltuk az ismert nagyságú és előjelű rendszeres hibák terjedését, az 5.3. alfejezetben pedig a véletlen hibák terjedését. Még két hiba-típust kell megemlítenünk, ami hatást gyakorolhat az eredményre: az egyik a mérési módszer vagy a műszer elvi hibája, a másik a műszer pontossága (pontossági osztálya).

**A műszer elvi hibájára** láttunk példát a szinusz-emelő elemzésekor: a lineáris skála előtt előforduló mutató csak korlátozott bemenőjel tartományban mutat helyesen: ahol a mutató valódi szögelfordulása és a

lineárisan készített skála között elhanyagolható az eltérést. Hasonló rendszeres hibát okoz térfogat mérésnél az, hogyha a mérendő folyadék hőmérséklete eltér az etalon edény térfogatához tartozó rögzített hőmérséklettől. A mérési módszer – műszer elvi hibája például az, hogy a hengeresnek feltételezett, és így kalibrált köböző tartálynak geometriai hibái vannak. A modellezési hibák is ebbe a hiba-kategóriába tartoznak. Amint a felsorolt példák mutatják, e hiba számításba vétele a hiba természetétől függ. Ha a rendszeres eltérésre számérték, vagy a mérendő nagyságtól függő függvény-kapcsolat adható meg, akkor – amint ezt az ismert nagyságú és előjelű rendszeres hibák esetén is tettük – a mérés eredményt korrigálnunk kell. Ha a rendszeres eltérésre konkrét számértéket nem tudunk megadni, csak hibakorlátot, akkor az alábbiakban leírt módszert kell alkalmaznunk.

A másik hibafajta amit az eredmény megadásánál számításba kell vennünk, az a **műszer pontossága**. A műszerek jelentős részét bizonyos pontossági megjelöléssel árusítják. Ez legtöbbször egy relatív érték: pl.  $\varepsilon = 1.5\%$  vagy  $\varepsilon = 0.5\%$ . Az esetek többségében ez az érték - ha ettől eltérő meghatározást a műszer leírása nem tartalmaz - azt jelenti, hogy a műszer a pontos  $x$  érték helyett az  $x \pm \delta$  tartományon belül mutat egy értéket, ahol

$$\delta = x_{\max} \frac{\varepsilon}{100}$$

Ezt a bizonytalanságot a sorozatgyártású műszer alkatrészeinek méret és anyagminőség ingadozása okozza.

Ha van lehetőségünk a kalibrálásra: összehasonlítjuk műszerünket egy nála legalább egy nagyságrenddel pontosabb mérőeszközzel, akkor a kalibrálás eredményeként kapott korrekcióval módosítjuk mérési eredményünket. Ha nincs lehetőségünk etalonnal összehasonlítani saját berendezésünket, akkor nem tudhatjuk, hogy ez a hiba + vagy - irányban módosítja eredményünket. Ráadásul az ugyanabból a gyártási sorozatból származó másik hasonló műszer, amelyik hasonló  $\varepsilon$  pontossággal mér,

esetleg pont az ellenkező irányba módosítja eredményünket. Ezért a fenti  $\pm\delta$  abszolút eltérést úgy kell kezelnünk, mint a véletlen hibát és a véletlen hibák terjedésénél megismert szórásnégyzet-összegzéssel kell számításba vennünk.

A fentieket összefoglalva, az állandó  $y$  mennyiség közvetett mérésére vonatkozó mérési eredményt valamely  $p$  valószínűségi szinten így adjuk meg:

$$y|_p = \bar{y} + \Delta y \pm U \quad (5.27)$$

Az  $\bar{y}$  mennyiséget az ismert módon kaphatjuk meg: a kiértékelő összefüggésbe helyettesítjük az egyes változóra mért értékek  $\bar{x}_j$  átlagát:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (5.28)$$

Ha nagyságra és előjelre ismerjük a függvényben szereplő  $x_i$  változók  $\Delta x_i$  hibáit, akkor a  $\Delta y$  korrekció az (5.3) összefüggés szerint számolható.

Minden  $x_i$  mért mennyiségre rendelkezésünkre áll a  $j = 1, 2, \dots, J$  elemű mérési sorozat, ebből kiszámítható minden változóra az  $s_i^{*2}$  korrigált tapasztalati szórás:

$$s_i^{*2} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{x}_i - x_{ij})^2 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.29)$$

Minden mért változóra kiszámítható a megválasztott  $p$  valószínűségi szinthez tartozó  $u_i$  konfidencia intervallum sugár (amint azt a 4. fejezetben leírtuk).

$$u_i = \lambda_{st} \frac{s_i^*}{\sqrt{J}} \quad (5.30)$$

Itt  $\lambda_{st}$  a Student eloszlásból származó érték,  $J$  a mérések száma. Az egyes  $x_i$  mennyiségeket különböző  $\varepsilon_i$  pontossági osztályba tartozó műszerrel mérjük. Ha nincs lehetőségünk kalibrálni, akkor a

$$\delta_i = x_{i \max} \frac{\varepsilon_i}{100} \quad (5.31)$$

mennyiség is növeli pontatlanságunkat. A szórásnégyzetek összegének megfelelően (lásd a (5.22) összefüggést) a változók véletlen ingadozásából és a műszer gyártási pontatlanságából eredő  $U$  bizonytalanságot

$$U^2 \cong \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (u_i^2 + \delta_i^2) \quad \text{és} \quad U = +\sqrt{U^2} \quad (5.32)$$

összefüggéssel számítjuk ki. A szabvány előírásainak megfelelően  $U$  az  $U^2$  pozitív négyzetgyöke.

A számítás egy részét másképpen (esetenként rövidebben is) elvégezhetjük. Ezt az egyszerűbb módszert csak akkor alkalmazhatjuk, ha minden műszert kalibráltunk, vagyis rendszeres hiba elhanyagolható a többi hiba mellett. Más szóval kifejezve: az  $x_i$  mennyiségek mérését csak véletlen hiba terheli. Ekkor minden egyes mért értéket behelyettesítünk a függvénybe, és kapunk egy  $y_1, y_2, \dots, y_J$  sorozatot:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}) \\ y_2 &= f(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}) \\ &\vdots \\ y_J &= f(x_{1J}, x_{2J}, \dots, x_{nJ}) \end{aligned}$$

Ezek segítségével az (5.27) összefüggésben szereplő  $\bar{y}$  értékét átlagolással számítjuk:

$$\bar{y} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J y_j \quad (5.33)$$

A  $y$  szórását közvetlenül az  $y_1, y_2, \dots, y_J$  sorozatból számítjuk, és az  $U$  értékét az  $y$ -ra számított konfidencia intervallum sugara adja.

$$s_y^{*2} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (y_j - \bar{y})^2 \quad (5.34)$$

$$U = \lambda_{st} \frac{s_y^*}{\sqrt{J}} \quad (5.35)$$

Ekkor nem kell az egyes  $\Delta x_i$  mennyiségeket kiszámítani, nem kell az érzékenységi együtthatókat parciális deriválással előállítani. Látjuk azonban, hogy ebben az esetben nem tudjuk figyelembe venni az egyes



mennyiségeket mérő műszerek  $\delta_i$  pontosságát, sem az esetleges  $\Delta x_i$  rendszeres hibáját.

## 5.5 Alkalmazás: Átmérő mérés optiméterrel

A mérési példa feladatot úgy választottuk meg, hogy a rendszeres és a véletlen hibák számítása szemléletesen bemutatható legyen. A mérés különbségi módszeren alapul. Fontos módszer ez a gépészeti hossz-  
mérések esetében, mert a módszer alapján, egy megfelelő mérőhasáb kész-  
lettel és egy finomtapintóval (optiméter, esetleg induktív finomtapintó)  
lehetővé válik akár 100 mm-nél hosszabb tárgyak méretének  $1 \mu\text{m}$  körüli,  
esetleg ezen értéknél nagyobb pontossággal való meghatározása. A  
módszer lényege az, hogy a mérendő tárgy méretét a finomtapintó mérési  
tartományának megfelelő pontossággal megmérjük. A mérőgépbe, vagy  
mérőállványba befogott tapintót a hossz méretnek megfelelően összeállí-  
tott mérőhasáb kombináció segítségével nullázzuk, majd a mérőha-  
sáb-kombináció helyére betesszük a mérendő tárgyat, és az optiméterrel,  
vagy a finomtapintóval megmérjük a különbséget.

Feladat: 1 db acél csapágygörgő (henger) átmérőjének mérése és az  
eredmény megadása 95%-os megbízhatósági szinten, 5 mérés eredménye  
alapján.

### Stratégia:

- Módszer: Különbségi
- Elv: Optomechanikai, vagy elektromechanikus
- Mérőeszköz: Függőleges optiméter, vagy induktív finomta-  
pintó A felületi érdesség az optiméter (finomta-  
pintó) mérési bizonytalanságánál kisebb, az al-  
kalmazott mérőeszköz kiválasztása tehát indo-  
kolt.

**Mérés módja:** Érintéses

Mérés menete a kiértékeléssel együtt (munkaterv) [lásd például 5.2]:

1. A munkadarab közelítő átmérőjének megállapítása kengyeles mikromérővel.
2. Az átmérőt közelítő mérőhasáb-kombináció összeállítása.
3. Az optiméter zérusra állítása úgy, hogy a mérőhasáb kombinációt helyezzük az optiméter asztalára a mérőtapintó alá. A beszbályozáshoz durva és finom állítás áll rendelkezésre. A műszer skálája - a zérus helyzettől kiindulva -  $\pm 100 \mu\text{m}$  abszolút eltérés leolvasását teszi lehetővé. A mérési módszer különbségi, mert a mérőhasáb kombináció (etalon minőség) és a munkadarab mérete közötti különbség kiértékelésén alapul.
4. A mérőhasáb kombináció (etalon) mérése ötször
5. A csapágygörgő átmérőjének mérése ötször.
6. A mért adatok statisztikai feldolgozása, hibaterjedés (hibaösszegzés) számítása
7. Az eredmény megadása.

A mérés és a számítás kivitelezése:

1. A közelítő átmérő kengyeles mikromérővel mérve:

$$D = 3,720 \text{ mm}$$

2. Etalon kombináció közelítő mérete legyen:

$$E = 3,700 \text{ mm}$$

(1 db 2 mm-es és 1 db 1,7 mm-es mérőhasáb felhasználásával)

3. és 4. Optiméter zérusra állítása és a mérőhasáb kombináció mérése ötször.

A táblázat célszerűen a statisztikai kiértékelés első fázisait is tartalmazza,

így az átlagértéket, az eltéréseket ( $\delta$ ) és ezek négyzeteit.

| Leolvasott skálaérték<br>[ $\mu\text{m}$ ]<br>(Eltérés a nulla hely-<br>zettől) | Eltérés az átlagtól [ $\mu\text{m}$ ]<br>$\delta_{ei} = x_{e,i} - \bar{x}$ | Eltérés négyzete [ $\mu\text{m}^2$ ]<br>$\delta_{ei}^2$ |
|---|--|---|
| 0   | +0,3   | 0,09  |
| -0.5  | -0.2   | 0.04  |
| -1  | -0.7   | 0.49  |
| 0   | +0.3   | 0.09  |
| 0   | +0.3   | 0.09  |
| $\bar{x}_e = -0.3 \mu\text{m}$  |  | $\sum (x_{e,i} - \bar{x})^2 = 0.8 \mu\text{m}^2$        |

A táblázatban  $\bar{x}_e$  a mérőhasáb kombináción történő zérusra állítás pontatlanságának korrekciója.

A mérőhasáb kombináció mérési eredményeinek szórás négyzete (mérési sorozat szórás négyzete):

$$s_e^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^5 \delta_{ei}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^5 (x_{e,i} - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 0.8 \mu\text{m}^2 = 0.2 \mu\text{m}^2$$

5. A csapágygörgő átmérőjének mérése során kapott eredmények:

| Leolvasott skálaérték<br>[ $\mu\text{m}$ ]<br>(Eltérés a nulla hely-<br>zettől) | Eltérés az átlagtól [ $\mu\text{m}$ ]<br>$\delta_{ai} = x_{a,i} - \bar{x}$ | Eltérés négyzete [ $\mu\text{m}^2$ ]<br>$\delta_{ai}^2$ |
|---|--|---|
| +22   | +0,4   | 0,16  |
| +23   | +1,4   | 1,96  |
| +19   | -2,6   | 6,76  |
| +24   | +2,4   | 5,76  |
| +20   | -1,6   | 2,56  |
| $\bar{x}_a = +21,6 \mu\text{m}$   |  | $\sum (x_{a,i} - \bar{x})^2 \mu\text{m}^2$              |

Ebben a táblázatban  $\bar{x}_a$  a különbség mérés korrekciója.

Az alkatrész mérési eredményeinek tapasztalati szórás négyzete (mérési sorozat szórás négyzete):

$$s_a^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^5 \delta_{ai}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^5 (x_{a,i} - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 17,2 \mu\text{m}^2 = 4,3 \mu\text{m}^2$$

6. A mérési eredmény meghatározása. Az eredmény általános alakja az (5.16) kifejezésnek megfelelően:

$$x = M + \bar{x}_a - \bar{x}_e \pm U$$

“ $M$ ” a mérőhasáb kombináció névleges értéke, + az optiméterről leolvasott  $\bar{x}_a$  átlagérték, a “korrekció” az optiméter  $\bar{x}_e$  nullponteltolódása, az  $U$  “bizonytalanságot” pedig számolni fogjuk:

$$U = \pm \sqrt{U_M^2 + U_a^2 + U_e^2}$$

A fenti összefüggésben szereplő kifejezések magyarázata:

$U_M$  a mérőhasáb kombináció méretbizonytalansága

$U_a$  az alkatrész (csapágygörgő) mérésének bizonytalansága

$U_e$  a mérőhasáb kombináció mérésének bizonytalansága

Vegyük sorra az egyes bizonytalanság összetevőket, amelyek maguk is rész bizonytalanságokat tartalmaznak. Ezek jellegük szerint rendszeres és véletlen hibák.

6.1 *A mérőhasáb kombináció méretbizonytalansága több tényezőtől függ:*

$B$  : a mérőhasáb kombináció hibakorlátja vagy bizonytalansága, a mely minden egyes mérőhasábra két, gyárilag garantált bizonytalanság figyelembevételével számítható:

$E$  : középmeret megengedett eltérése,

$f$  : megengedett eltérés a síkpárhuzamosságtól,

$U_T$  : Termikus eredetű hiba, ha az etalon és a munkadarab hőtágulási együtthatói között eltérés van.

$$U_T = M[mm] \cdot \Delta T[^\circ C] \cdot \delta_\alpha \left[ \frac{\mu m}{^\circ C \cdot mm} \right], \text{ ahol } \Delta T \text{ az eltérés az alap-}$$

hőmérséklettől ( $20^\circ C$ ),  $\delta_\alpha$  a hőtágulási együtthatók közötti különbség.

Egyenletekkel kifejezve és összefoglalva a fentieket:

$$U_M = \sqrt{B^2 + U_T^2}$$

$$B = \pm\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

$$b_n = \pm\sqrt{E_n^2 + f_n^2}$$

Behelyettesítjük a megfelelő adatokat, figyelembe véve, hogy a mérőhasáb készlet a II. pontossági osztályhoz tartozik, és a hőtágulási együtthatók közötti különbség, azaz a termikus rendszeres hiba hatás-

$$\text{tényezője legyen } \delta_\alpha = 1,5 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\mu m}{^\circ C \cdot mm} \right]:$$

$$b_1^2 = b_2^2 = E_{1,2}^2 + f_{1,2}^2 = (0,5^2 + 0,2^2) \mu m^2 = 0,29 \mu m^2$$

$$B^2 = 0,29 \mu m^2 + 0,29 \mu m^2 = 0,58 \mu m^2$$

A termikus eredetű rendszeres hiba értéke elhanyagolható az etalon várható legnagyobb hibájához képest, ha az etalon és a munkadarab hőmérséklete megegyezik, és a közös hőmérséklet eltérése az előírt hőmérséklethez +3°C:

$$U_T = 3,7 mm \cdot 3^\circ C \cdot 1,5 \frac{\mu m}{^\circ C \cdot mm} = 1,7 \cdot 10^{-5} \mu m$$

Így a mérőhasáb méretbizonytalanságának négyzete a következő lesz:

$$U_M^2 \cong 0,58 \mu m^2$$

6.2 A mérés kivitelezésének (mérőeszköz, mérési munka) hibáit ugyancsak a négyzetes hibaterjedés szabálya szerint összegezzük, mind az etalon, mind a munkadarab esetében:

$$U_{e,a}^2 = V_{e,a}^2 + \delta^2$$

"V" a mérés megbízhatósági (konfidencia) intervalluma az 5.4 fejezetben leírtak szerint számolva (p=95%, Student eloszlás szabadsági foka 4,  $\lambda_{st}=2.78$ ):

$$V_e = \lambda_{st} \frac{s_e^*}{\sqrt{5}} = 2.78 \frac{0.44}{\sqrt{5}} = 0.54 \mu m$$

$$V_a = \lambda_{st} \frac{s_a^*}{\sqrt{5}} = 2.78 \frac{2.07}{\sqrt{5}} = 2.57 \mu\text{m}$$

Legyen " $\delta$ " a műszer (optiméter) bizonytalansága. Várható legnagyobb értéke a műszerkönyv adatai szerint a teljes mérési tartományában:  $\delta = \pm 0.2 \mu\text{m}$ .

A mérés kivitelének eredő bizonytalansága, illetve a későbbiekben való felhasználás miatt ennek négyzete, az alábbi lesz:

Az etalonra:

$$U_e^2 = (0.54 \mu\text{m})^2 + (0.2 \mu\text{m})^2 = 0.33 \mu\text{m}^2$$

A munkadarabra:

$$U_a^2 = (6.21 \mu\text{m})^2 + (0.2 \mu\text{m})^2 = 38.6 \mu\text{m}^2$$

Az összes eredő mérési bizonytalanság:

$$U = \pm \sqrt{U_M^2 + U_e^2 + U_a^2} = \pm \sqrt{0.58 \mu\text{m}^2 + 0.33 \mu\text{m}^2 + 38.6 \mu\text{m}^2} = \pm 6.28 \mu\text{m} \cong \pm 6 \mu\text{m}$$

Az eredményben látható kerekítés mértéke a mérőeszköz bizonytalanságával ( $\delta = \pm 0.2 \mu\text{m}$ ) függ össze. A kerekítést a számítási műveletek végén végezzük el, és ügyelünk arra, hogy az eredményben megadott pontosság a műszer "képességeivel" összhangban legyen. Az indokolatlan tizedes jegyek nem csak feleslegesek, hanem feltűntetésük egyenesen félrevezető is lehet, hiszen a felhasználóban azt a képzetet keltik, mintha a mérést az eredményben megadott pontosságnál nagyobb feloldású mérőeszközzel végezték volna el.

7. Végezetül az optiméterrel végzett csap-átmérő mérés eredményét, 5-5 mérés alapján, 95%-os szignifikancia szinten:

$$x = M + \bar{x}_a - \bar{x}_e \pm U$$

$$x|_{P=95\%} = 3,700\text{mm} + 21,6 \mu\text{m} - (-0.3) \mu\text{m} \pm 6 \mu\text{m} = 3,722\text{mm} \pm 6 \mu\text{m}$$

**Az 5. fejezet irodalma**

- [5.1] Petrik O.: Finommechanika  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [5.2] Kaposvári Z.: Műszaki mérések (Mérési útmutatók)  
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994.
- [5.3] Schnell L. (szerk.): Jelek és rendszerek mérés technikája  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [5.4] Glebicki, K.: Graphische Berechnungsmethoden beim Entwerfen  
von Messgeräten, Feingerätetechnik, Jg. 8. Heft  
1/1959. P23.
- [5.5] Hoffmann, D.: Az ipari mérés technika. Műszaki Könyvkiadó, Bu-  
dapest, 1982.
- [5.6] Leinweber, P.: Hosszmérés technikai zsebkönyv  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.

## 6. A VÁLTOZÓK KÖZÖTTI KAPCSOLAT VIZSGÁLATA

A mérnöki gyakorlatban sokszor a változók közötti kapcsolatot vizsgálunk méréssel. Azt keressük, hogy az egyik változó különböző értékeinek hatására a folyamat más változói milyen értékeket vesznek fel. Ilyen változók közötti kapcsolat az egyes gépek jelleggörbéje: egy belsőégésű motor fordulatszám-nyomaték összefüggése vagy egy szivattyú szállítómagasság-térfogatáram kapcsolata. A mérnöki gyakorlatban a vizsgált folyamat determinisztikus jellege miatt a változók közötti kapcsolat léte és a kapcsolat függvényszerű volta elfogadott.

Ebben az esetben a kapcsolatot méréssel igyekezünk feltárni. A méréseinket hiba terheli, így (két változót tekintve) nem a mérési pontok összekötése (például interpolációs polinommal), hanem a pontok között haladó “kiegyenlítő” grafikon ad helyes tájékoztatást a két változó kapcsolatáról. Ekkor a “kiegyenlítő” görbe megrajzolása vagy egyenletének meghatározása a méréskiértékelés célja. Ilyen típusú kérdések kezelésére bemutatjuk a legkisebb négyzetek, Abraham Wald és a kiegyenlítő spline módszerét. Whittaker [6.8] és Nyíri [6.9] módszerei megtalálhatók a jelzett irodalomban.

A szorosan vett mérnöki-laboratóriumi tevékenységen kívül a társadalmi és gazdasági életben előforduló számos változó mennyiség között a kapcsolat nem feltétlenül determinisztikus. Nem állíthatjuk például, hogy függvénykapcsolat van az egyetemre felvett hallgatók felvételi pontszáma és valamely félév végén elért súlyozott átlaga között, vagy egy folyó vízgyűjtő területére hullott csapadék mennyisége és a folyó vízszintje között.

Ezért logikusan feltehető az a kérdés, hogy valamely két változó között létezik-e kapcsolat vagy sem és e kapcsolat véletlenszerű vagy függvényszerű-e. Ilyen típusú kérdésre ad választ a korrelációs együttható és a korrelációs index.



## 6.1 Korrelációs együttható

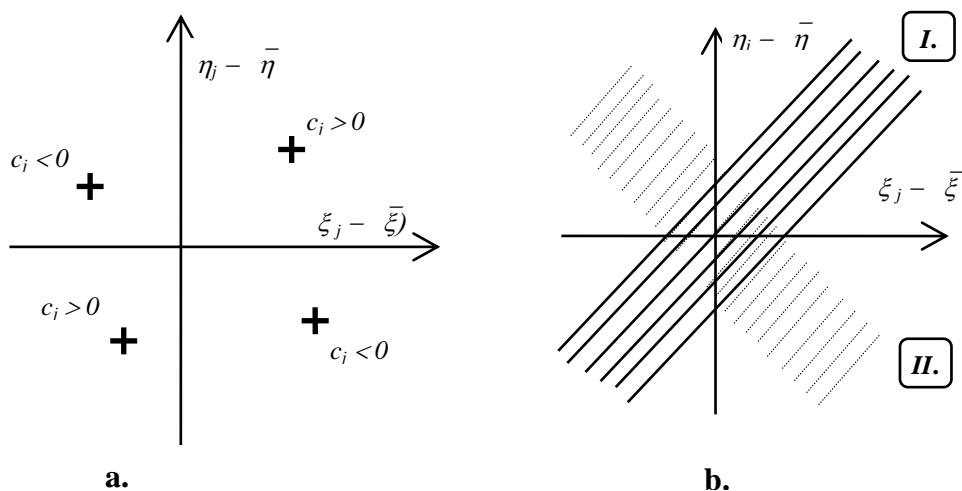
A korrelációs együttható matematikai megfogalmazása előtt egy olyan gondolatmenetet mutatunk be, amely egyszerű fogalmak segítségével teszi kézzel foghatóvá a korrelációs együttható matematikai definícióját (lásd Felix-Blaža [6.1] könyvében).

Tekintsünk két változó mennyiséget – legyen ez  $\xi$  és  $\eta$  – és álljon rendelkezésünkre egy megfigyelés sorozat:  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ . Ez azt jelenti, hogy az egyik változó  $\xi_j$  értékéhez a másik változó  $\eta_j$  értéke tartozik. Számítsuk ki mindkét változó átlagát:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j \qquad \bar{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j$$

Ábrázoljuk a rendelkezésünkre álló értékpárokat egy olyan koordináta rendszerben, ahol az origóhoz a  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  értékpárt rendeljük, és a tengelyekre a  $(\xi_j - \bar{\xi})$  és az  $(\eta_j - \bar{\eta})$  mennyiséget mérjük fel. Minden mérési pontban számoljuk ki a  $c_j$  mennyiséget:

$$c_j = (\xi_j - \bar{\xi})(\eta_j - \bar{\eta})$$



6.1 ábra  
A tapasztalati korrelációs együttható

Az első és harmadik síknegyed pontjainál  $c_j > 0$ , míg a második és negyedik síknegyedbe eső pontokhoz  $c_j < 0$  érték tartozik. (lásd 6.1 ábra **a.** része). Képezzük a  $j = 1, 2, \dots, n$  pontokra a  $c_j$  mennyiségek alábbi összegét:

$$C = \sum_{j=1}^n (\xi_j - \bar{\xi})(\eta_j - \bar{\eta}) \quad (6.1)$$

Ha a pontok a 6.1 ábra **b.** részében bemutatott I. jelű sávba esnek, akkor – az origó környezetében lévő pontoktól eltekintve –  $c_j > 0$ , és így a  $C > 0$ . Ha a pontok a II. jelű sávba tartoznak, akkor  $C < 0$ . Ha a pontok kb. egyenletesen oszlanak meg a négy síknegyedben, akkor  $C \approx 0$ . Vagyis a (6.1.) összefüggés szerint számolt  $C$  érték a pontok elhelyezkedésére vonatkozó információt hordoz. A  $C$  mennyiség nagysága függ a pontok számától és a  $\xi$  és  $\eta$  változók ingadozásának mértékétől.

Ezért, ha különböző megfigyelés-sorozatok akarunk összehasonlítani, akkor célszerű a mérések számával ( $n$ ) és a változók ingadozására jellemző  $s_\xi$  és  $s_\eta$  tapasztalati szórásokkal elosztani a  $C$  mennyiséget:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\xi_j - \bar{\xi})(\eta_j - \bar{\eta})}{s_\xi s_\eta} \quad (6.2)$$

Az így kapott  $\rho(\xi, \eta)$  mennyiséget nevezik a  $(\xi, \eta)$  változók **tapasztalati korrelációs együtthatójának**. Az információt hordozó számláló neve: **tapasztalati kovariancia**. E gondolatmenet alapján a  $\rho(\xi, \eta)$  tapasztalati korrelációs együttható értékével globálisan jellemezhető a pontok elhelyezkedése a  $(\xi, \eta)$  síkon.

A (6.2) összefüggés általánosítása az (6.3) összefüggés, ahol az átlagok helyett a várható érték, a tapasztalati szórások helyett pedig a  $\sigma_\xi$  és a  $\sigma_\eta$  szórások szerepelnek:

$$r(\xi, \eta) = \frac{M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))]}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \quad (6.3)$$

A (6.3) összefüggés az  $r(\xi, \eta)$  **korrelációs együttható** definíciója. Tulajdonságainak részletes vizsgálata megtalálható pl. Prékopa [3.2] könyvében, itt mi csak néhány, a műszaki alkalmazások szempontjából fontos tulajdonságot emelünk ki. A (6.3) összefüggés alakjából következik, hogy szimmetrikus:

$$r(\xi, \eta) = r(\eta, \xi)$$

Számunkra legfontosabb tulajdonság az, hogy ha  $|r(\xi, \eta)| = 1$ , akkor a változók közötti lineáris kapcsolat van. A vonatkozó matematikai állítást – amelyet fontosságára való tekintettel bizonyítunk – az alábbiakban fogalmazzuk meg:

Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két valószínűségi változó, a (létező) várható értéket  $M(\xi)$  és  $M(\eta)$  jelöli, a szórások jele  $\sigma_\xi$  és a  $\sigma_\eta$ . Definiálja az  $r(\xi, \eta)$  korrelációs együtthatót a (6.3) összefüggés. A bizonyítandó állítás kétirányú:

- (a) ha  $\xi$  és  $\eta$  között lineáris kapcsolat van, (vagyis  $\eta = a\xi + b$ , ahol  $a, b$  állandók) akkor  $r(\xi, \eta) = 1$  ha  $a > 0$ ,
- (b) ha  $|r(\xi, \eta)| = 1$  akkor ebből következik a két változó közötti lineáris kapcsolat.

Az állítás első részének bizonyítása: legyen

$$\eta = a\xi + b \quad ; \quad a > 0$$

Ekkor  $M(\eta) = aM(\xi) + b$ , és  $\sigma_\eta = a\sigma_\xi$  a várható értéknek és a szórásnak a 3. fejezetben bemutatott tulajdonságai miatt. Ezeket a (6.3) formulába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$r(\xi, \eta) = \frac{M[(\xi - M(\xi))(a\xi - aM(\xi))]}{a\sigma_\xi\sigma_\xi}$$

A számlálóban az  $a$  kiemelése után a  $\xi$  változó szórásnégyzetét definiáló összefüggés marad, így az egyszerűsítés után

$$r(\xi, \eta) = 1.$$

Hasonló módon látható be a  $a < 0$  esetén az  $r(\xi, \eta) = -1$  állítás is.

Az állítás második részének bizonyításához használjuk a következő jelöléseket:

$$\xi^* = \frac{\xi - M(\xi)}{\sigma_\xi} \quad \text{és} \quad \eta^* = \frac{\eta - M(\eta)}{\sigma_\eta} \quad (6.4)$$

A  $\xi^*$  és az  $\eta^*$  u.n. standardizált változók, amelyekről felírásuk alapján láthatjuk, hogy

$$M(\xi^*) = 0 \quad \text{és} \quad M(\eta^*) = 0$$

és azt, hogy

$$\sigma_{\xi^*} = 1 \quad \text{és} \quad \sigma_{\eta^*} = 1.$$

Tudjuk továbbá azt is, hogy

$$\sigma_{\xi^*}^2 = 1 = M\left[(\xi^* - M(\xi^*))^2\right] = M(\xi^{*2}) \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\eta^*}^2 = M(\eta^{*2}) = 1 \quad (6.6)$$

A (6.4) jelölések alkalmazásával a (6.3) formula így írható:

$$r(\xi, \eta) = M\left(\frac{\xi - M(\xi)}{\sigma_\xi} \cdot \frac{\eta - M(\eta)}{\sigma_\eta}\right) = M(\xi^* \cdot \eta^*) = 1 \quad (6.7)$$

Vizsgáljuk meg a  $(\xi^* - \eta^*)^2$  kifejezés várható értékét:

$$M(\xi^* - \eta^*)^2 = M(\xi^{*2} - 2\xi^* \eta^* + \eta^{*2}) = M(\xi^{*2}) - 2M(\xi^* \eta^*) + M(\eta^{*2})$$

Ez utóbbi egyenlőség a várható érték linearitásának következménye. A (6.5), (6.6) és (6.7) egyenlőségek következtében azt írhatjuk, hogy

$$M(\xi^* - \eta^*)^2 = 0$$

Ennek következménye az, hogy  $\xi^* = \eta^*$ . A (6.4) összefüggéseket ebben helyettesítve majd rendezve kapjuk a keresett eredményt:

$$\eta = \xi \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} - M(\xi) \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} + M(\eta)$$

Alkalmazva az

$$a = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \quad \text{és} \quad b = M(\eta) - M(\xi) \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$$

jelöléseket, akkor a két változó között lineáris kapcsolatot

$$\eta = a \xi + b$$

alakba írhatjuk. Vagyis beláttuk azt, hogy ha a korrelációs együttható egyenlő eggyel, akkor a változók közötti kapcsolat lineáris.

Az elméleti jellegű vizsgálatoktól eltekintve, a mérnöki gyakorlatban mindig megfigyelési adatok – minta – alapján kívánunk becslést adni a korrelációs együttható értékére. E becslés kiszámítására szolgál a (6. 2) jelű összefüggés, a tapasztalati korrelációs együttható formulája. A számítás célja legtöbbször az, hogy a  $(\xi, \eta)$  grafikonba felrakott mérési pontok képszerű benyomásán túl, objektív módon, számszerűen jellemezzük a változók közötti lineáris kapcsolat erősségét. Gyakorlati tapasztalatként fogadjuk el, hogy ha a megfigyelési adatokból számolt érték

$$|\rho(\xi, \eta)| < 0.6 \sim 0.7$$

akkor a változók közötti kapcsolat laza (véletlenszerű), a véletlenszerűség és a linearitás egyaránt alakítja a kapcsolatot. Ha

$$|\rho(\xi, \eta)| > 0.9$$

akkor mondhatjuk, hogy változók közötti kapcsolat mérnöki szempontból lineárisnak tekinthető, amit kis mértékben befolyásolnak véletlen hatások is.

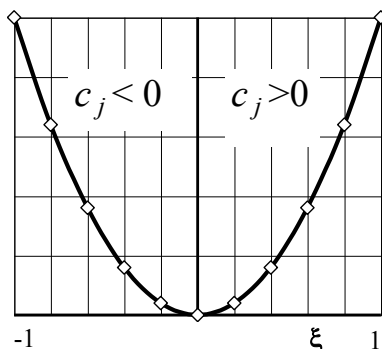
Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a korrelációs együttható értéke a változók közötti kapcsolat linearitására ad felvilágosítást, és nem arra, hogy a kapcsolat függvényszerű-e vagy sem. Ezt magyarázandó, mutatjuk a következő példát. Legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású a  $[-1, 1]$  intervallumban, és legyen  $\eta = \xi^2$ , a két változó között tehát függvénykapcsolat áll fenn. Számítsuk ki a korrelációs együttható értékét:

$$M(\xi) = 0, \quad M(\eta) = M(\xi^2) = \sigma_\xi^2$$

$$r(\xi, \eta) = \frac{M[\xi \cdot (\xi^2 - \sigma_\xi^2)]}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = \frac{M(\xi^3) - \sigma_\xi^2 M(\xi)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = 0$$

Vagyis a korrelációs együttható értéke nulla, a függvénykapcsolat fennállása ellenére. A matematikai indokolás mellett emlékezzünk visz-

sza a (6.1) ábrához fűzött gondolatmenetre. Jelen esetben a függvénykapcsolat szimmetrikus volta miatt kapjuk a  $C \approx 0$  eredményt. (Lásd a 6.2 magyarázó ábra).

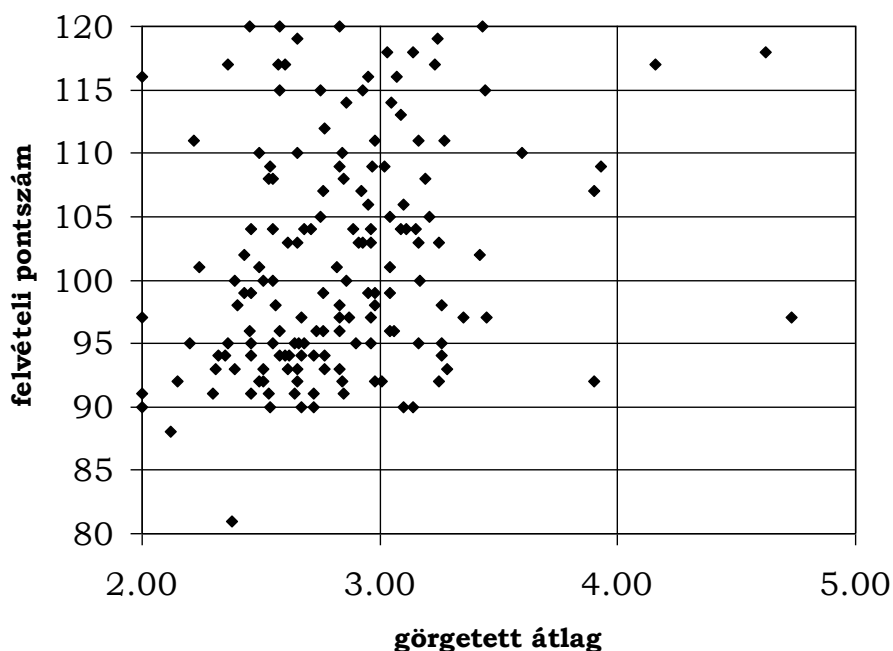


6.2. ábra. Magyarázat a korrelációs együtthatóhoz

Ez az ellenpélda mutatja, hogy nem a kapcsolat függvényszerűségét, hanem linearitását tükrözi a korrelációs együttható. A kapcsolat függvényszerűségét mutató mennyiséget a 6.6. pontban ismerünk meg.

## 6.2 Alkalmazás: a korrelációs együttható használata

Az egyetemi felvételi eljárásban a középiskolai eredményeket az  $u$ . n. "hozott pontok" fejezik ki, ez néhány kiválasztott középiskolai tárgy osztályzatának összege. Feltehető az a kérdés, hogy a hozott pontok (a középiskolai eredmény) és a későbbi egyetemi félévekben elért eredmény kapcsolatban áll-e egymással. Az 6.3. ábrán az egyik tengelyre felmértük a hozott pontokból számított felvételi pontszámot ( $\xi_j$  változik 80-120 pont között), a másik tengelyre a néhány félév során kialakult "görgött" átlagot ( $\eta_j$  változik 2-5 között). A 6.3. ábrából látható, hogy nincs lineáris függvénykapcsolat a két változó között, a kapcsolatot döntően a véletlen határozza meg. A tapasztalati korrelációs együttható értékét a (6.2) összefüggés felhasználásával számítottuk ki és  $\rho(\xi, \eta) = 0.258$  értéket kaptuk.



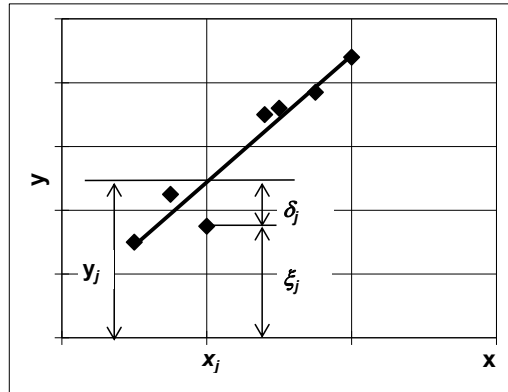
6. 3. ábra. A felvételi pontszám és a féléves tanulmányi átlag közötti kapcsolat

### 6.3. A legkisebb négyzetek módszere

Az alábbiakban ismertetett módszer felfedezője és első alkalmazója Karl Friedrich Gauss (1777-1855), aki a módszert 18 évesen, 1795-ben fedezte fel. A valószínűség számítási háttérrel Andrej Markov (1856-1922) orosz matematikus kapcsolta Gauss gondolatához. E módszer hatékonyságára jellemző, hogy napjainkban a legtöbb, matematikai módszerekkel dolgozó programcsomag beépített eljárásként tartalmazza, számos könyv foglalkozik vele (lásd pl. Y. V. Linnik [6.2] munkáját.)

Először bemutatjuk a módszer alapgondolatát, statisztikai háttér nélkül, majd ezt követi a tételszerű megfogalmazás, bizonyítással.

A módszer alapötletét a 6.4 ábra mutatja be.



6. 4 ábra. A legkisebb négyzetek módszere

Tételezzük fel, hogy az  $(y, x)$  változók között lineáris kapcsolat áll fenn:

$$y = a_0 + a_1x$$

Rendelkezésünkre áll az  $\{x_j, \xi_j\}_{j=1}^N$  számpárokából álló mérési sorozat. Célunk az, hogy a mérési sorozat alapján meghatározzuk az egyenes  $a_0$  és  $a_1$  paramétereinek  $\alpha_0$  és  $\alpha_1$  becslését. A számítás alap gondolata az, hogy minden  $x_j$  mérési pontban kiszámítjuk az egyenes és a mérési pont  $y$  irányú eltérését (lásd az 6.4 ábrán a  $\delta_j$  értéket.), és képezzük e mennyiségek négyzetösszegét. Az összeg tartalmazza a keresett  $\alpha_0$  és  $\alpha_1$  paramétereket. Azt az  $\alpha_0$  és  $\alpha_1$  értéket fogadjuk el, ahol ez a “hibanégyszeg” jellegű összeg  $\alpha_0$  és  $\alpha_1$  függvényében felveszi a minimumát.

$$\delta_j = \xi_j - y_j = \xi_j - (\alpha_0 + \alpha_1 x_j)$$

$$D(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{j=1}^N (\xi_j - \alpha_0 - \alpha_1 x_j)^2 \quad (6. 8)$$

Legyen

$$\frac{\partial D(\alpha_0, \alpha_1)}{\partial \alpha_0} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial D(\alpha_0, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (6. 9)$$



Számítsuk ki a parciális deriváltakat. Az első egyenlet az  $\alpha_0$  szerinti derivált, a második az  $\alpha_1$  szerinti deriválás eredménye

$$\begin{aligned} -2 \sum_{j=1}^N (\xi_j - \alpha_0 - \alpha_1 x_j) &= 0 \\ -2 \sum_{j=1}^N (\xi_j - \alpha_0 - \alpha_1 x_j) x_j &= 0 \end{aligned}$$

Egyszerűsítések és rendezés után kétismeretlenes lineáris egyenlet-rendszert kapunk:

$$N\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{j=1}^N x_j = \sum_{j=1}^N \xi_j \quad (6.10)$$

$$\alpha_0 \sum_{j=1}^N x_j + \alpha_1 \sum_{j=1}^N x_j^2 = \sum_{j=1}^N x_j \xi_j \quad (6.11)$$

Az (6. 10) és (6. 11) egyenletek megoldása:

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x}) \xi_j}{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2} \quad (6.12)$$

$$\alpha_0 = \bar{\xi} - \alpha_1 \bar{x} \quad (6.13)$$

Az utóbbi két összefüggésben az

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad \text{és} \quad \bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j$$

jelöléseket használtuk. E gondolatmenet a 6. 4 ábra jelöléseire támaszkodva megadja a pontthalmazhoz illeszkedő egyenes paramétereinek kiszámítási módját, de ehhez nem köt semmiféle valószínűség számítási – statisztikai megfontolást. Így az eredményül kapott egyenest is csak a pontok közé rajzolt grafikonja alapján tudjuk értékelni: látjuk, hogy a pontok között halad. De a pontok közé más paraméterekkel is tudunk egyenest rajzolni. Ezért az egyenes jóságának megítéléséhez a valószínűségszámítás eszközeit kell segítségül hívni.

Fogalmazzuk meg általánosan a fenti módszert és a hozzá tartozó valószínűségi számítási állítást. (Ez a Gauss-Markov tétel, megtalálhatjuk pl. Rényi [3.1] könyvében). Feltételezzük, hogy:

- Az  $x$  és  $y$  változók között polinomiális függvénykapcsolat van:

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (6.14)$$

amelyben nem ismerjük az  $a_0, a_1, \dots, a_n$  paramétereket.

- E paraméterek becslésére méréseket végzünk. A mérések során pontosan be tudjuk állítani az  $x$  értékeket, míg az  $y$  változóra vett mérések  $\xi$  eredményét normális eloszlású, nulla várható értékű véletlen hiba terheli.

$$\xi_j = y_j + \varepsilon_j, \quad \varepsilon \in N(0, \sigma_y) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.15)$$

A mérések eredménye:  $\{x_j, \xi_j\}_{j=1}^N$

- A  $\xi_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) mérési eredmények független valószínűségi változók.

A Gauss-Markov tétel állítása: ha legkisebb négyzetek módszerével becsüljük az (6.14) egyenlet ismeretlen paramétereit (az  $a_0, a_1, \dots, a_n$  értékek becslései a  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ), akkor

$$M(\alpha_0) = a_0, \quad M(\alpha_1) = a_1, \quad M(\alpha_n) = a_n$$

Vagyis a becsült állandók várható értéke megegyezik az elméleti értékkel (torzítatlan becslés). Az állítás további része az, hogy a

$$s_y^2 = \frac{1}{N - (n+1)} \sum_{j=1}^N \left( \xi_j - \sum_{i=0}^n \alpha_i x_j^i \right)^2$$

korrigált tapasztalati szórásnégyzet torzítatlan becslése  $\sigma_y$ -nak.

Tekintsük át az első állítás bizonyítását. A becslés ugyanúgy történik, mint a fejezet elején bemutatott (egyváltozós lineáris) esetben. Minimalizáljuk az alábbi négyzet-összeget

$$D(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^N \left( \xi_j - \sum_{i=0}^n \alpha_i x_j^i \right)^2 \quad (6.16)$$

(Nem vizsgáljuk a lokális minimum létezésének feltételét). A minimumot a megfelelő parciális deriváltak nulla helye adja meg, deriváljunk  $\alpha_k$  szerint ( $k=0, 1, \dots, n$ ):

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_k} = -2 \sum_{j=1}^N \left( \xi_j - \sum_{i=0}^n \alpha_i x_j^i \right) x_j^k = 0$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer ( $n+1$  egyenlet,  $n+1$  ismeretlen) a következő:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \sum_{j=1}^N x_j^{i+k} = \sum_{j=1}^N \xi_j x_j^{i+k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.17)$$

Ez az az egyenlet, amelynek a megoldásából kapjuk meg az  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  becsléseket. A bizonyítás folytatásához vegyük mindkét oldal várható értékét és használjuk ki, hogy (6.15) és (6.14) szerint:

$$M(\xi_j) = y_j = \sum_{i=0}^n a_i x_j^i$$

Ekkor a (6.17) egyenletből rendezés után kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=0}^n M(\alpha_i) \sum_{j=1}^N x_j^{i+k} = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=1}^N x_j^{i+k} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.18)$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor marad igaz bármely  $x_j$  és  $N$  értékre, ha

$$M(\alpha_i) = a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (6.19)$$

Ezt kívántuk bizonyítani.

Rényi **[3.1]** könyvében még többek között azt is bizonyítja, hogy a (6.15) feltételben szereplő  $\sigma_y$  szórást a mérési eredményekből az  $s_y$  korrigált tapasztalati szórással becsülhetjük:

$$s_y^2 = \frac{1}{N - (n+1)} \sum_{j=1}^N \left( \xi_j - \sum_{i=0}^n \alpha_i x_j^i \right)^2 \quad (6.20)$$

Mérlegeljük mérnöki szempontból a legkisebb négyzetek módszerének előnyeit és hátrányait.

Előnyök:

- ☺ a módszer rendkívül elterjedt, a szinte mindegyik matematikai - statisztikai programcsomag tartalmazza felhasználó-barát feldolgozásban. Formálisan az is tudja használni, aki nem ismeri matematikai hátteret,
- ☺ Rényi [3.1] könyvében is megtalálható az a bizonyítás, amely szerint a fenti állítás igaz marad sokváltozós lineáris formára is,
- ☺ igaz marad a tétel akkor is, ha a függvénykapcsolat

$$y = \sum_{i=p}^n a_i \varphi_i(x) \quad (6. 21)$$

alakú, ahol  $\varphi_i(x)$  teljesen ismert függvény és az ismeretlen  $a_i$  együtthatókat kívánjuk mérési eredményekből becsülni.

A könnyű és gyakori alkalmazás mellett számos előnytelen tulajdonsággal is szembe kell néznünk:

- ☺ Az első feltétel azt igényli, hogy pontosan ismerjük a vizsgált változók közötti kapcsolat matematikai felépítését, és ezt polinomiális vagy a (6. 21) egyenletben megadott alakú legyen. Itt nem arról beszélünk, hogy az ismeretlen függvénykapcsolatot pl. polinommal közelítjük, hanem arról, hogy a vizsgált kapcsolat polinomiális. E feltételt szigorú, sajnos meg kell állapítanunk, hogy alig-alig, vagy egyáltalán nem ismerünk olyan a valóságban lejátszódó folyamatot, amelynek pontosan ismerjük matematikai felépítését. Ezért ez a feltétel a műszaki gyakorlatban szinte soha sem tartható be.

Ha csak közelítőleg ismerjük a folyamat leírását (például elhanyagolásokkal modellezünk), akkor a legkisebb négyzetek módszere a “közelítést” (a modellt) közelíti, és eredménye semmit sem mond arról, hogy a modell jó vagy sem.

Ha közelítő függvényre alkalmazzuk a legkisebb négyzetek módszerét, akkor a bevezetésben mutatott szemléletes geometriai háttér következtében mindig a pontok “között” haladó grafikont fogunk eredményként kapni. Elveszett azonban a tétel statisztikai állí-

tása. Így csak “vizuálisan” tudjuk megítélni, hogy a kapott grafikon jó vagy nem jó.

- ⊗ A második feltétel – lásd (6.15) egyenlet – azt mondja ki, hogy az egyik változót pontosan be tudjuk állítani, és mérési hiba csak az  $y$  jelű függő változót terheli. A műszaki gyakorlatban ritkán fordul elő, hogy az egyik mért változó “pontos” legyen, vagyis mérési hibája nagyságrendekkel kisebb legyen mint a másik változó pontatlansága. Ilyen eset például, ha mérésadatgyűjtő kártyával és programmal figyelünk meg egy időben változó folyamatot. Ebben az esetben az alkalmazott eszközök tulajdonságaiból következően azt mondhatjuk, hogy az időmérés (a mintavételi frekvencia) hibája elhanyagolható a megfigyelt változó ingadozásához képest, a második feltétel teljesíthető. A gyakorlati esetek zömében mindkét változót figyelembe veendő hiba terheli, ezekben az esetekben a legkisebb négyzetek módszere csak az egyik változó bizonytalanságát veszi figyelembe.

Összefoglalva a legkisebb négyzetek módszerével kapcsolatos gondokat, meg kell állapítanunk, hogy a tétel matematikai feltételeit műszaki oldalról a legritkább esetben tudjuk betartani. Így az értékes statisztikai állítást is csak ritkán tudjuk kihasználni. Az esetek többségében a legkisebb négyzetek módszerével nyert közelítő függvényt csak “vizuálisan” tudjuk értékelni.

Ha polinomiális közelítő függvényt választunk, akkor a polinom fokszámának megválasztására Ralston **[6.3]** javasolja az alábbi módszert:

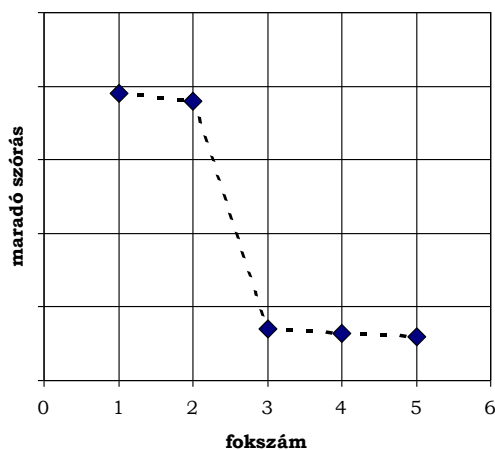
Az adott ponthalmazt közelítsük először elsőfokú polinommal, ennek  $a_{01}$  és  $a_{11}$  együtthatóját határozzuk meg. Ezt követően határozzuk meg az

$$s_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\xi_j - \alpha_{01} - \alpha_{11}x_j)^2$$

“maradó” szórásnégyzet értékét. Vegyünk ezután másodfokú polinomot, ennek  $a_{02}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  együtthatóit határozzuk meg, majd számítsuk ki az  $s_2^2$  maradó szórást:

$$s_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\xi_j - \alpha_{02} - \alpha_{12}x_j - \alpha_{22}x_j^2)^2$$

Ezt az eljárást követve, határozzunk meg néhány, növekvő fokszámhoz tartozó maradó szórásnégyzetet. Ha a vizsgált függvénykapcsolat jól közelíthető polinommal, akkor maradó szórást a fokszám függvényében az 6.5 ábra szerint fog változni.



6. 5 ábra. A “maradó” szórás változása a fokszám függvényében

(A diszkrét pontokat csak azért kötöttük össze szaggatott vonallal, hogy a változási tendenciát érzékeltessük). Az 6.5. ábra azt mutatja, hogy a maradó szórás  $n=1$  és  $n=2$ -höz tartozó értéke kevéssel tér el egymástól, míg  $n=3$ -nál jelentősen csökken, majd  $n$  további növelése ismét csak kevés változást idéz elő. Azt az  $n$  értéket szokták a közelítő polinom fokszámának választani, ahol a jelentős csökkenés tapasztalható (esetünkben  $n=3$ ).

A közelítő polinom fokszámának meghatározására az alábbi 6.4 pontban bemutatott korrelációs index is lehetőséget ad.

## 6.4 Korrelációs index

Az  $(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2) \dots (x_N, \xi_N)$  mérési sorozatot az

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_r)$$

függvénnyel kívánjuk közelíteni. A függvény ismeretlen  $a_0, a_1, \dots, a_r$  együtthatóit a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. A továbbiakban használjuk az

$y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_N = y(x_N)$  jelölést. A

$$H = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \text{ és az } Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

változók közötti korrelációt az  $I(H, Y)$  **korrelációs index** méri (Lásd: Lukács 0.[6.4]):

$$I(H, Y) = \sqrt{1 - \frac{D^2(H - Y)}{D^2(H)}} \quad (6.22)$$

A fenti minta alapján a **tapasztalati korrelációs index**:

$$i(H, Y) = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N (\xi_j - y_j)^2}{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2}} \quad (6.23)$$

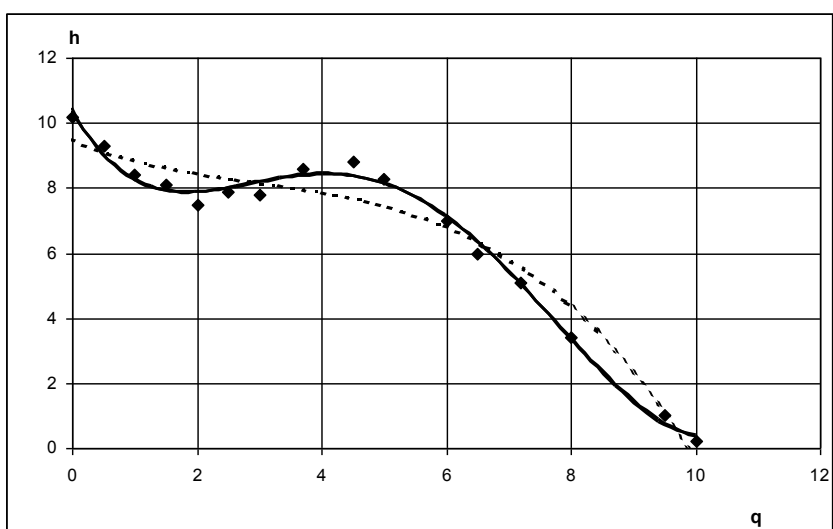
ahol

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j$$

Minél közelebb van a korrelációs index egyhez, annál „jobban” közelíti meg a pontthalmazt az  $y=f(x)$  függvény. Bizonyítás helyett csak utalunk arra, hogy „jó” közelítés esetén  $D^2(H-Y)$  közel van a nullához, így (6.22) szerint  $I(H, Y)$  közel van egyhez. A következő 6.5 pontban látni fogjuk a korrelációs index alkalmazását

## 6.5 Alkalmazás: polinomiális közelítés a legkisebb négyzetek módszerével.

Az 6. 6. ábra és az alatta lévő táblázat mérési eredményeket mutat (szivattyú  $h$  jelű szállítomagassága a  $q$  jelű térfogatáram függvényében, mindkét változó dimenziótlan formában feldolgozva). A pontok grafikonba felrajzolt képe alapján mondhatjuk, hogy sem lineáris, sem másodfokú parabola (amelynek nincs inflexiós pontja) nem adhat elfogadható közelítést. Ezért a harmad, negyed és ötödfokú parabola-közelítéssel próbálkoztunk.



| $N^o$ | $q$ | $h$  |
|-------|-----|------|
| 1     | 0   | 10.2 |
| 2     | 0.5 | 9.3  |
| 3     | 1   | 8.4  |
| 4     | 1.5 | 8.1  |
| 5     | 2   | 7.5  |
| 6     | 2.5 | 7.9  |

| $N^o$ | $q$ | $h$ |
|-------|-----|-----|
| 7     | 3   | 7.8 |
| 8     | 3.7 | 8.6 |
| 9     | 4.5 | 8.8 |
| 10    | 5   | 8.3 |
| 11    | 6   | 7   |
| 12    | 6.5 | 6   |

| $N^o$ | $q$ | $h$ |
|-------|-----|-----|
| 13    | 7.2 | 5.1 |
| 14    | 8   | 3.4 |
| 15    | 9.5 | 1   |
| 16    | 10  | 0.2 |
|       |     |     |
|       |     |     |

6.6. ábra. Különböző fokszámú közelítések összehasonlítása



A 6.6. ábrába berajzoltuk a legkisebb négyzetek módszerével meghatározott, mindhárom polinom grafikonját (a negyed és az ötödfokú polinom grafikonja az ábrázolt síkrészen gyakorlatilag fedik egymást). A közelítő polinom alakja:

$$y_{(5)} = a_5 q^5 + a_4 q^4 + a_3 q^3 + a_2 q^2 + a_1 q + a_0$$

A legkisebb négyzetek módszerével az alábbi polinom együtthatókat kaptuk:

| Közelítés foka | $a_5$   | $a_4$   | $a_3$   | $a_2$   | $a_1$   | $a_0$   | $i$    |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| harmad         |         |         | -0.019  | +0.17   | -0.7796 | +9.454  | 0.975  |
| negyed         |         | +0.0107 | -0.2292 | +1.4575 | -3.3402 | +10.383 | 0.9962 |
| ötöd           | -0.0003 | +0.0171 | -0.2839 | +1.648  | -3.575  | +10.431 | 0.9962 |

6.2. táblázat. A közelítő polinom együtthatói

Meghatározhatjuk a közelítés fokszámát az alábbi módszerrel is. Jelölje a fenti polinomokkal kapott közelítő függvény értékét  $y_{(3)}(x_i)$ ,  $y_{(4)}(x_i)$  és  $y_{(5)}(x_i)$ . Kiszámítottuk és a 6.2. táblázat utolsó oszlopában feltüntettük a különböző fokszámokhoz tartozó  $i(h, y_{(3)})$ ,  $i(h, y_{(4)})$ , és a  $i(h, y_{(5)})$  tapasztalati korrelációs index értékét is. A negyed és ötödfokú közelítés között már nincs (látható) különbség, ezért elfogadjuk a negyedfokú közelítést.

Megjegyezzük, hogy a közhasználatban lévő EXCEL programban a "Trendvonal" menüpont aktivizálásával tudjuk meghatározni a legkisebb négyzetek módszerének együtthatóit. Lehetőségünk van arra is, hogy a program ne csak megrajzolja a trendvonalat, hanem a grafikonon az egyenlet és a tapasztalati korrelációs index négyzetének értékét is (programbeli jele  $R^2$ ) is megjelenjen.

## 6.6 Abraham Wald módszere

A Wald [6.5] kidolgozott egy módszert, amely egyváltozós lineáris függvénykapcsolat esetén **mindkét változót terhelő hibát** kezelni tudja. Bemutatjuk a vonatkozó matematikai tételt és a használatát, a számítási módszert. A bizonyítását tekintve utalunk az irodalomra. (Wald Ábrahám a Kolozsvári Piarista Főgimnáziumban érettségizett 1921-ben, Amerikában dolgozott, a modern matematika statisztika egyik megalapozójaként tartjuk számon.)

Legyen a két változó között lineáris a kapcsolat

$$y = a_0 + a_1x \quad (6.24)$$

Mindkét változóra vonatkozó méréseket normális eloszlású, nulla várható értékű véletlen hiba terheli.

$$\xi_j = x_j + \delta_j \quad \delta_j \in N(0, \sigma_x)$$

$$\eta_j = y_j + \varepsilon_j \quad \varepsilon_j \in N(0, \sigma_y)$$

A rendelkezésünkre álló  $\{\xi_j, \eta_j\}_{j=1}^N$  ponthalmaz alapján, az alább leírt módszerrel  $a_0$  és  $a_1$  torzítatlan becslést határozhatjuk meg:

$$M(\alpha_0) = a_0 \quad \text{és} \quad M(\alpha_1) = a_1.$$

Wald által javasolt számítási módszer egyszerű és a 6.6. ábra alapján könnyen megjegyezhető. Ábrázoljuk a mérési pontokat a  $(\xi, \eta)$  koordináta rendszerben. Rendezzük sorba a pontokat a  $\xi$  változó szerint, legyen a rendezett halmaz jele  $\{\xi_j, \eta_j\}$ . A rendezett  $\{\xi_j\}$  értékek „tartsák meg” a hozzájuk tartozó  $\{\eta_j\}$  értéket:

$$\xi'_1 \leq \xi'_2 \leq \dots \leq \xi'_r \leq \xi'_{r+1} \leq \dots \leq \xi'_N$$

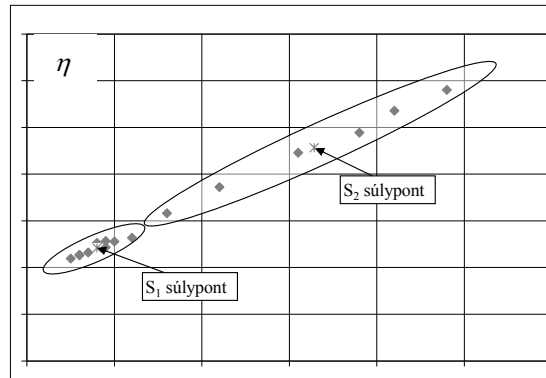
$$\eta'_1 \quad \eta'_2 \quad \dots \quad \eta'_N$$

A sorba rendezett halmazt osszuk ketté egy önkényesen választott  $r$  indexnél. (A  $r$  index megválasztására később visszatérünk). Számítsuk ki az 1-től  $r$ -ig, valamint az  $(r+1)$ -től  $N$ -ig terjedő pontok súlypontját (lásd a 6.7. ábrán az  $S_1$  és  $S_2$  súlypontok). Az  $S_1$  súlypont koordinátái:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \xi'_j, \quad \bar{\eta}_1 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \eta'_j$$

Az  $S_2$  súlypont koordinátái:

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{N-r} \sum_{j=r+1}^N \xi'_j, \quad \bar{\eta}_2 = \frac{1}{N-r} \sum_{j=r+1}^N \eta'_j$$



$\xi$

6. 7 ábra. A. Wald módszerének bemutatása.

Számítsuk ki annak az egyenesnek a meredekségét, amely átmegy a két rész-halmaz súlypontján:

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1}{\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1} \quad (6. 25)$$

Számoljuk ki az egész ponthalmaz súlypontját:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j$$

Végül az egész ponthalmaz  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  súlypontján át húzzunk  $a_1$  meredekségű egyenest, amelyből:

$$\alpha_o = \bar{\eta} - \alpha_1 \bar{\xi} \quad (6.26)$$

A.Wald [6.5] bebizonyította, hogy az (6.25) és (6.26) összefüggéssel meghatározott becslések torzítatlanok:

$$M(\alpha_o) = \alpha_o \quad \text{és} \quad M(\alpha_1) = \alpha_1$$

A módszer ismeretében a korábban önkényesen választott "r" index helyzetéről a következőt mondhatjuk. Az egyenes meredekségének becslése annál "pontosabb" lesz, minél távolabb van egymástól a két rész-halmaz súlypontja. Ezért kell a pontokat sorba rendezni és olyan közepes indexnél húzni meg a két rész-halmaz határát, hogy a két súlypont közötti távolság "viszonylag nagy" legyen. Más oldalról közelítve ugyan ezt a kérdést: ha tudjuk, hogy a két változó közötti kapcsolat lineáris, akkor „felesleges” a tartomány belső pontjaiban mérni, azonos mérés-szám esetén legjobb becslést akkor kapunk, ha az intervallum elején és az intervallum végpontja környezetében koncentráljuk méréseinket.

## 6.7 Alkalmazás: egyenes együtthatóinak becslése

### Wald módszerével

Csóvezetékéből kifolyó víz mennyiségét köbözéssel tudjuk meghatározni. A mérés úgy történik, hogy a vizet egy köböző edénybe vezetjük, amelynek az oldalához szintmutató üvegcső csatlakozik. Ebben szemmel tudjuk követni a vízszint emelkedését az edényben. Méréskor a befolyó víz  $\Delta m$  szintemelkedéséhez  $\Delta t$  időintervallum tartozik. A  $q$  vízáram nagyságát a  $q = \alpha \Delta m / \Delta t$  összefüggéssel tudjuk meghatározni. Itt  $\alpha$  az u. n. tartályállandó (fizikailag az egységnyi magasságú edény térfogata). Ennek meghatározása úgy történik, hogy ismert  $V_i$  térfogatokat töltünk a köböző edénybe, és leolvassuk a hozzájuk tartozó  $h_i$  szintmagasságo-

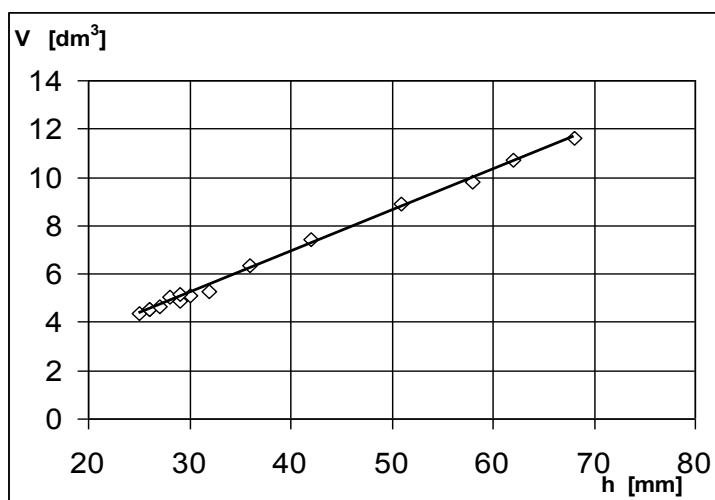
kat. A szintmutató skála nullpontja eltérhet az edény fenékszintjétől, ezért a  $V$  és  $h$  között a

$$V = \alpha h + \alpha_0$$

összefüggés áll fenn. Határozzuk meg az  $\alpha$  tartályállandó értékét Wald módszerével az alábbi értéksor alapján.

| $h$ [mm] | $V$ [dm <sup>3</sup> ] | $h$ [mm] | $V$ [dm <sup>3</sup> ] | $h$ [mm] | $V$ [dm <sup>3</sup> ] | $h$ [mm] | $V$ [dm <sup>3</sup> ] |
|----------|------------------------|----------|------------------------|----------|------------------------|----------|------------------------|
| 25       | 4.39                   | 28       | 5.06                   | 32       | 5.28                   | 58       | 9.78                   |
| 26       | 4.53                   | 29       | 5.14                   | 36       | 6.33                   | 62       | 10.72                  |
| 26       | 4.55                   | 29       | 4.87                   | 42       | 7.45                   | 68       | 11.61                  |
| 27       | 4.65                   | 30       | 5.12                   | 51       | 8.92                   |          |                        |

A két ponthalmaz határát a  $h=32$  mm és a  $h=36$  mm értékek között húztuk meg, a két rész-súlypont rendezői: (28, 4.84) és (52.83, 9.14). Az egyenes meredekségére 0.173 dm<sup>3</sup>/mm értéket kapunk.



6.8. ábra

#### Wald módszerének alkalmazása.

Ugyan ezt a meredekséget a legkisebb négyzetek módszerével meghatározva 0.170 dm<sup>3</sup>/mm érték adódik. A két módszer között adódó kb. 1.5% eltérés jelentős lehet, hiszen a rosszul meghatározott tartályállandó ennyi rendszeres hibát okoz a vízáram mérésben. A két módszer közül a kiértékelést végző mérnöknek kell választani, neki kell mérlegelnie, hogy melyik matematikai módszer melyik feltételét sikerült betartania.

## 6.8 Konfidencia sávval jellemzett simító spline

E fejezetben leírt módszert Kullmann és Halász [6.6] tanulmány alapján ismertetjük. A gyakorlatban előforduló méréskiértékelési problémák közös jellemzője, hogy a vizsgált (az egyszerűség kedvéért) két változó között az  $y(x)$  determinisztikus összefüggés áll fenn, mindkét változó mért értékeit mérési hiba terheli, és az  $y(x)$  összefüggés matematikai felépítése nem ismert. Méréseink célja az  $y(x)$  elméleti függvénykapcsolat feltárása, de ehhez a mérések nem nyújtanak elegendő információt. Így meg kell elégednünk a  $g(x)$  jelű közelítő függvénykapcsolat meghatározásával. A  $g(x)$ -et tartalmazó függvényosztály kiválasztása önkényes, de figyelembe vehetjük mindazokat az ismereteket, amelyeket a vizsgált folyamat elméleti háttere és műszeres vizsgálata nyújt, továbbá célszerűségi és praktikus szempontokra is tekintettel lehetünk. Mindezen tulajdonságok nem egyértelműsítik sem a függvényosztályt sem magát a  $g(x)$  függvényt.

A különféle függvényosztályból választott, eltérő módszerekkel meghatározott függvények összehasonlításának alapja leggyakrabban a tapasztalati korrelációs index. E kritérium alapján hozott döntést kellő óvatossággal kell fogadnunk, hiszen pl. megfelelő fokszámú interpolációs polinommal elérhető, hogy a tapasztalati korrelációs index értéke pontosan egységnyi legyen.

Ezért a közelítő függvények minősítésének más szempontját javasoljuk. Az összehasonlítás természetes támpontja az  $y(x)$  elméleti kapcsolat, és az a  $g(x)$  nyújt jó közelítést, amelynek grafikonja a mérési tartományban "közel jár" az  $y(x)$  grafikonjához. A következőkben ismertetett módszer alkalmas arra, hogy adott  $g(x)$  közelítő regresszió körül meghatározzunk egy konfidencia sávot, amely kiszámítható valószínűséggel tartalmazza az ismeretlen  $y(x)$  grafikonját. A sáv méretét ismerve eldönthető, hogy az adott műszaki feladat megoldásához a  $g(x)$  megfelelő

vagy sem. A  $g(x)$  függvény meghatározására alkalmas eljárásnak bizonyult a harmadfokú simító spline előállításának módszere [6.10].

A  $g(x)$  simító spline harmadfokú parabolaívекből áll, amely ívek az  $x_i$  csatlakozási helyeken másodrendben folytonosan kapcsolódnak. Harmadik deriváltjuk azonban a csatlakozási hely két oldalán különböző. Ez az  $r_i$  különbség pedig arányos a csatlakozási helyhez tartozó  $\xi_i$  spline alappont ordináta és a  $g_i$  spline ordináta különbségével [6.10]:

$$r_i = p_i(\xi_i - g_i)$$

ahol  $p_i$  a simító paraméter, a spline-szakaszok csatlakozási pontjaiban lehet különböző, de lehet minden pontban azonos is. Adottak az  $(x_i, \xi_i)$  alappontok, a  $p_i$  paraméterértékek és a spline végein peremelőírások. Keressük a spline-szakaszokat leíró harmadfokú polinomok együtthatóit.

Egy harmadfokú polinomot négy konstans határoz meg. Sokféleképpen lehet definiálni ezeket a konstansokat, célunknak a következő választás felel meg. Legyen a négy konstans az  $i$ -edik spline-szakasz  $x_i$  kezdőpontbeli  $g_i$  és az  $x_{i+1}$  végpontbeli  $g_{i+1}$  ordinátája, valamint  $g''_i$ , ill.  $g''_{i+1}$  második deriváltak számértéke a kezdő és végpontban. Ha az  $i$ -edik spline-szakasz az

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

szakaszon van értelmezve, akkor

$$\begin{aligned} g(x) = & g_i \frac{\Delta x_i - (x - x_i)}{\Delta x_i} + g_{i+1} \frac{x - x_i}{\Delta x_i} + \\ & + g''_i \frac{-(x - x_i)^3 + 3(x - x_i)^2 \Delta x_i - 2(x - x_i) \Delta x_i^2}{6 \Delta x_i} + \\ & + g''_{i+1} \frac{(x - x_i)^3 - (x - x_i) \Delta x_i^2}{6 \Delta x_i} \end{aligned} \quad (6.27)$$

a spline-szakasz egyenlete,  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ .

Belátható, hogy az első differenciálhányados  $x_i$  pontbeli folytonosságát a

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{i-1}}{6} g''_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{3} g''_i + \frac{\Delta x_i}{6} g''_{i+1} - \\ - \frac{1}{\Delta x_{i-1}} g_{i-1} + \left( \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) g_i - \frac{1}{\Delta x_i} g_{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

egyenlet biztosítja.

Peremfeltétel lehet az, hogy a spline görbülete a végpontban zérus, vagy, hogy ott az első differenciálhányados adott értékű, pl.  $g_1'$  az első,  $g_n'$  az utolsó spline-pontban. A megfelelő egyenletek a spline konstansait meghatározó egyenletrendszerben

$$\frac{\Delta x_1}{3} g''_1 + \frac{\Delta x_1}{6} g''_2 + \frac{1}{\Delta x_1} g_1 - \frac{1}{\Delta x_1} g_2 = -g'_1 \quad (6.30)$$

illetve

$$\frac{\Delta x_{n-1}}{6} g''_{n-1} + \frac{\Delta x_{n-1}}{3} g''_n - \frac{1}{\Delta x_{n-1}} g_{n-1} + \frac{1}{\Delta x_{n-1}} g_n = g'_n \quad (6.31)$$

A perem- és csatlakozási feltételeket összefoglalva az

$$A \underline{g}'' + B \underline{g} = \underline{b} \quad (6.32)$$

egyenletrendszer adódik, ahol mind  $A$ , mind  $B$  tridiagonálmátrix,  $B$  szimmetrikus, az együtthatóik a (6.28), (6.29) és (6.30) képletekből adódnak, és

$$\begin{aligned} \underline{g}'' &= (g''_1, g''_2, \dots, g''_n) \\ \underline{g} &= (g_1, g_2, \dots, g_n) \\ \underline{b} &= (-g_1^{\circledast}, 0, \dots, g_n^{\circledast}). \end{aligned}$$

A következő lépés a harmadik deriváltak csatlakozási pontbeli  $r_i$  különbségének kiszámítása. A (6.27)-ből

$$g'''(x) = g'''(x_i) = -\frac{1}{\Delta x_i} g''_i + \frac{1}{\Delta x_i} g''_{i+1}$$

a teljes  $i$ -edik szakaszon állandó. Ezzel



$$r_i = g'''(x_i) - g'''(x_{i-1}) = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} g''_{i-1} - \left( \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) g''_i + \frac{1}{\Delta x_i} g''_{i+1}$$

azaz  $\underline{r} = -B\underline{g}''$

Jelölje  $D$  a  $p_1, \dots, p_n$  simító paraméterekből felépített diagonálmátrixot,  $\underline{\xi}$  pedig az adott spline-alappont ordinátákból álló vektort  $\underline{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Ekkor a simítási feltétel a

$$-B\underline{g}'' = D(\underline{\xi} - \underline{g})$$

egyenlettel fogalmazható meg, azaz

$$-B\underline{g}'' + D\underline{g} = D\underline{\xi}. \quad (6.33)$$

A (6.32), (6.33) egyenletrendszer  $\underline{g}, \underline{g}''$  megoldását adott  $\underline{\xi}, D, A, B, \underline{b}$  esetén két lépésben határozzuk meg.

A (6.33) egyenletrendszerből  $D$  inverzével szorozva

$$\underline{g} = D^{-1}D\underline{\xi} + D^{-1}B\underline{g}'' = \underline{\xi} + D^{-1}B\underline{g}'' \quad (6.34)$$

ezt behelyettesítve (6.32) -be

$$A\underline{g}'' + B\underline{\xi} + BD^{-1}B\underline{g}'' = \underline{b}$$

azaz

$$(A + BD^{-1}B)\underline{g}'' = \underline{b} - B\underline{\xi},$$

ahol az  $A + BD^{-1}B$  pentadiagonálmátrix, így  $\underline{g}''$  igen gyorsan meghatározható. Végül (6.34) alapján  $\underline{g}$  is számítható.

A közelítő spline meghatározása után foglalkozzunk a konfidencia sáv becslésével és a keresett elméleti regresszió az  $y(x)$ ,  $g(x)$  pedig az imént meghatározott közelítő regresszió. Feltesszük, hogy az  $[a, b]$  mérési intervallumban  $y(x)$  differenciálható. Ugyanebben az intervallumban értelmezzük az  $\eta$  valószínűségi változót; e változó realizációi a független változó méréskor beállítandó értékei. Az elméleti regresszió az  $\eta$ -hoz a  $\zeta = y(\eta)$  változót rendeli, így hibamentes mérés esetén az  $(\eta, y(\eta))$  valószínűségi vektorváltozóra vonatkozó minta lenne a mérés eredménye. A független és a függő változó mérési eredményeit azonban a  $\mu$  és  $\nu$  nor-

mális eloszlású, nulla várható értékű mérési hiba terheli. Tegyük fel, hogy  $\mu$  és  $\nu$  valamint  $\mu$  és  $\eta$  egymástól függetlenek. Ezekkel a jelölésekkel egy mérési pont koordinátái a  $\kappa=\eta+\mu$  és  $\xi=\zeta+\nu$  változókkal jelöltük.

Végül vezessük be a  $\delta$  valószínűségi változót és az  $s(x)$  különbségfüggvényt az alábbiak szerint:

$$\delta + g(\eta + \mu) = y(\eta) + \nu \quad (6.35)$$

$$s(x) = y(x) - g(x) \quad (6.36)$$

Az  $s(x)$  különbségfüggvényről feltesszük hogy az  $[a, b]$  intervallumban véges sok, invertálható szakaszra bontható. A (6.35) egyenletből  $\delta$ -t kifejezve és a  $g(\eta+\mu)$ -t a Taylor formula első két tagjával közelítve, azt kapjuk, hogy

$$\delta \cong s(\eta) + \nu - \mu g'(\eta).$$

Határozzuk meg  $\delta$  feltételes várható értékét a  $G = \{s(\eta) = m\}$  feltételre vonatkozóan. A  $\mu$ ,  $\nu$  és  $\eta$  változókra tett kikötéseink eredményeképpen:

$$M(\delta|G) = m. \quad (6.37)$$

A (6.37) egyenlőség mutatja számunkra a  $\delta$  változó jelentőségét: feltételes várható értéke egyenlő az  $s(x)$  különbségfüggvény  $m$  ordinátájával. Célunk éppen az, hogy becslést nyerjünk a (6.37) feltételes várható érték (tehát  $s(x)$ ) maximumára és minimumára, midőn az  $x$  befutja az  $[a, b]$  intervallumot. E cél érdekében :

- meghatározzuk a  $\delta$  változónak a  $G$  feltételre vonatkozó sűrűségfüggvényét, melyet  $f(w/m)$  jelöl. A [6.6] dolgozatban láttuk, hogy  $f(w/m)$  az  $m$  várható értékű normális sűrűségfüggvények súlyozott összege;
- meghatározzuk az  $s(\eta)$  változó  $k(m)$  sűrűségfüggvényét [6.7] alapján;
- felírjuk a feltételes sűrűségfüggvények között fennálló kapcsolatot Rényi nyomán [3.1]:

$$f(w|m) = \frac{f(w)k(m|w)}{k(m)} \quad (6.38)$$

amiből rendezés és integrálás után nyerjük a célként megjelölt sűrűségfüggvényt:

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w|m)k(m)dm.$$

Ebből azt látjuk, hogy a  $\delta$  változó  $f(w)$  sűrűségfüggvénye az  $f(w/m)$  normális sűrűségfüggvények  $k(m)$  súllyal vett keveréke.

Az  $f(w/m)$  komponens sűrűségfüggvény  $m$  várható értéke éppen az  $s(x)$  különbségfüggvény  $m$  ordinátája. Az  $f(w)$  keverék összetevőkre bontásával, ezekből a maximális és minimális várható értékű komponens várható értékének ( $T_1$  és  $T_2$ ) kiválasztásával a konfidencia sáv méretét határoztuk meg, mert ha

$$T_1 \leq s(x) \leq T_2$$

akkor

$$g(x) + T_1 \leq y(x) \leq g(x) + T_2$$

A  $p$  szignifikancia szint kiszámításának alapja a

$$p = P(T_1 \leq s(\eta) < T_2) = \int_{T_1}^{T_2} k(m)dm \quad (6.39)$$

egyenlőség. A  $k(m)$  súlyfüggvény numerikus meghatározásának nincs elvi akadály, de az  $f(w)$  keverék sűrűségfüggvény teljes dekompozícióját kívánja, míg a  $T_1$  és  $T_2$  meghatározása csak a szélső komponensek várható értékének becslését teszi szükségessé. Ezért gyakran megelegszünk az **[6.7]** tanulmányban mutatott közelítéssel:

$$p \approx \int_{T_1}^{T_2} f(w)dw \quad (6.40)$$

amely az  $f(w)$ -t közelítő tapasztalati sűrűségfüggvény alapján becsülhető.

## 6.9 Alkalmazás: kiegyenlítő spline és konfidencia sáv meghatározása

A 6.8 pontban leírt gondolatmenetet követő számítási módszer használata helyenként elmélyedést és sok számítást kíván. Hatékony gyakorlati alkalmazása csak egy interaktív szoftver támogatásával lehetséges. Ezért a BME Vízgépek Tanszékén kidolgoztunk egy programcsomagot, amelynek főbb funkciói a következők:

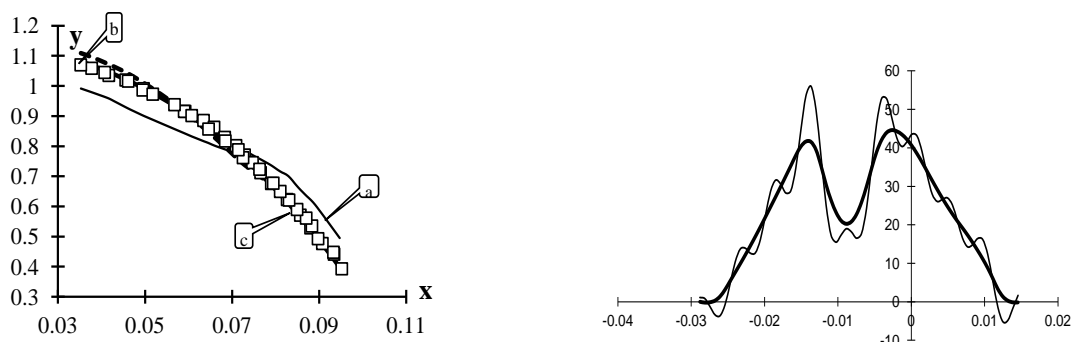
a.) Mérési adatok olvasása adatállományból vagy billentyűzetről, adattárolás, az adatok grafikus megjelenítése.

b.) A közelítő regresszió előállítása a kiegyenlítő spline segítségével. A spline-hoz tartozó súlyfüggvény célszerű választását, módosítását menürendszer és képernyőgrafika segíti.

c.) A változóra vonatkozó minta kiszámítása, ebből a tapasztalati eloszlás és sűrűségfüggvény előállítása: ez az  $f(w)$  becslése. A következő lépés - a sűrűségfüggvény dekompozíció - végrehajtásához nem elegendő, ha a tapasztalati sűrűségfüggvényt a szokásos lépcsős függvényként álltjuk elő, hanem a sűrűségfüggvény folytonos közelítése szükséges. Ezért úgy jártunk el, hogy a tapasztalati eloszlásfüggvény pontjaihoz illesztettünk kiegyenlítő függvényt (célszerűen ismét a simító spline eljárását használtuk) és ennek differenciálásával nyertük az  $f(w)$  sűrűségfüggvény közelítését.

d.) A keverék sűrűségfüggvény felbontására és a szélső komponensek várható értékének becslésére a Medgyessy féle dekompozíciós módszert **[6.11]** használtuk. A tesztfüggvény képernyőn való megjelenítése megkönnyítette a keresett várható értékek közvetlen leolvasását. Végül a (6.40) közelítéssel meghatároztuk a szignifikancia szintet.

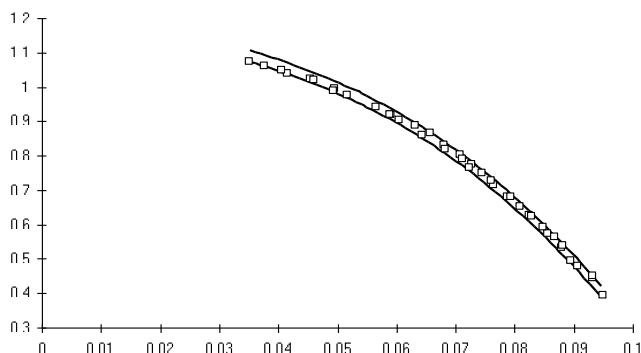
e.) A sávbecslés módszerének egyes lépéseit és végeredményét bemutató grafikonok plotteren vagy sornyomtatón megjeleníthetők.



6.9 ábra. Kiegyenlítő spline, a keverék sűrűségfüggvény és a tesztfüggvény.

A programcsomag használatát az alábbi példán mutatjuk be. A 6.9 ábrán látható a mérési eredmények ponthalmaza, és három simító spline. Az **a** jelű grafikon a súlyfüggvény első közelítésével adódó spline, ez még erősen eltér a mérési pontoktól, de a fokozatos javítás eredményeként a **b** majd a **c** jelű grafikon már jól követi a mérési eredményeket.

Ehhez a közelítő függvényhez szerkesztettük meg a változó tapasztalati sűrűségfüggvényét és a tesztfüggvényét (lásd 6.8 ábra jobboldalán). Végül a 6.10 ábra mutatja a mérési pontokat és a konfidencia sáv grafikonját valamint a becsült szignifikancia szintet.



6.10 ábra. Konfidencia sáv 94.6 %-os szignifikancia szinthez

## **A 6. fejezet irodalma**

- [6.1] Felix-Bláha: Matematikai statisztika a vegyiparban. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964.
- [6.2]. Linnik, Y.V.: Méthode des moindres carrés. Dunod.1963.
- [6.3] Ralston, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969.
- [6.4] Lukács O.: Matematikai statisztika. Műszaki Könyvkiadó 1999.
- [6.5] A. Wald: The Fitting of Straight Lines if both Variables are Subject to Error. Ann. Math. Statistics. vol. 11.no 3. 1940. pp. 284-300.
- [6.6] G. Halász - L. Kullmann: Smoothing spline characterized by confidence band for solving regression problems. Periodica Polytechnica Mech. Eng. Vol.41. pp. 69-78.
- [6.7] Halász,G.: Méréskiértékelési és hibabecslési módszerek áramlástechnikai problémákhoz. Kandidátusi értekezés.1986.
- [6.8] Whittaker E.T., Robinson G.: The Calculus of observations. Blackie&Son Limited London and Glasgow 1932
- [6.9] Nyiri, A.: Módszer tapasztati függvény mindkét változójának simítására. GÉP XLIII: évf., 7-8-9 .(1991) 217-220.
- [6.10] Späth,H.: Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen.Oldenburger, München-Wien, 1978.
- [6.11] Medgyessy,P.-Varga,L.: Gauss függvény keverékek numerikus felbontására szolgáló egyik eljárás javításáról. MTA. III. Osztály Közleményei. 18. (1968). 31-39.

## 7. A DIGITÁLIS MÉRÉSTECHNIKA ALAPJAI

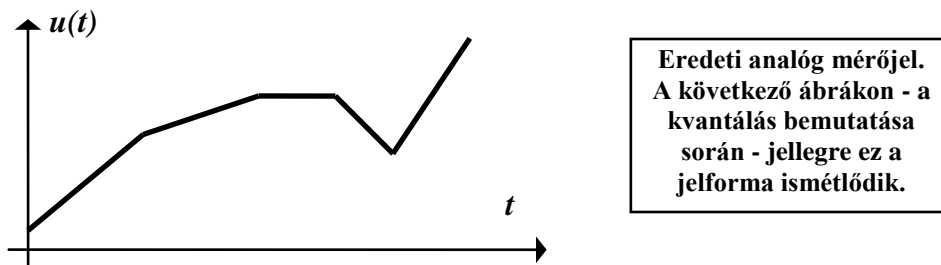
A korszerű gépiparban ma már elterjedten alkalmaznak a digitális mérőeszközöket. Olyanokat, amelyek működési elve digitális, és olyanokat is, amelyek analóg működésűek, de amelyekben a jel-feldolgozás egy bizonyos szakaszában, legkésőbb a kijelzésnél megtörténik az analóg-digitális átalakítás (A/D konverzió).

A mérési adatok digitális megjelenítésénél csak **diszkrét mérési információk** fordulnak elő. Az analóg jelet **mintavételezik**, a mintavételezett jelet **kvantálják**, majd **kódolják**.

A digitális méréstechnika kétségtelen előnye az analóggal szemben, hogy zavarbiztonsága nagyobb, egyszerűen megoldható mért értékek tárolása, matematikai műveletek végzése a mért értékekkel, az adatátvitel - akár nagyobb távolságra is (Internet) - és a galvanikus szétválasztás is (pl.: optocsatoló alkalmazása). A digitális technika erőteljes térhódítását természetesen a jelfeldolgozást szolgáló eszközök árának csökkenése is elősegíti.

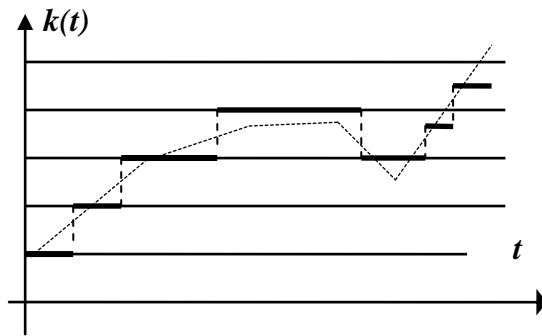
### 7.1 Meghatározások

**Analóg jel:** Adott időpillanatban a jel a minimum és maximum határok között minden tetszőleges értéket felvehet.



7.1. ábra. Az eredeti analóg mérőjel időbeli lefutása

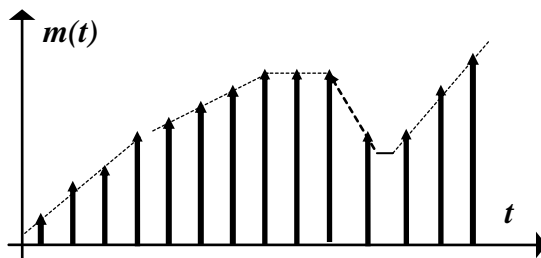
**Amplitúdó-léptékezett folytonos jel:** A jel adott időpillanatban csak meghatározott szintek formájában jelenhet meg.



Példa a kvantálásra, egyenletes szintekkel.  
 Hozzárendelési szabály:  
 $N - 0.5 < A \leq N + 0.5$   
 A : az analóg jel pillanatnyi értéke a megadott tartományban  
 N : az analóg jelhez rendelt diszkrét szint

7.2. ábra. Az analóg mérőjel amplitúdó kvantálása

**Időben mintavételezett analóg jel:** A jel meghatározott időpillanatokban tetszőleges értéket vehet fel a maximális és minimális határ között. Ez az “idő-kvantálás”, vagy mintavételezés.



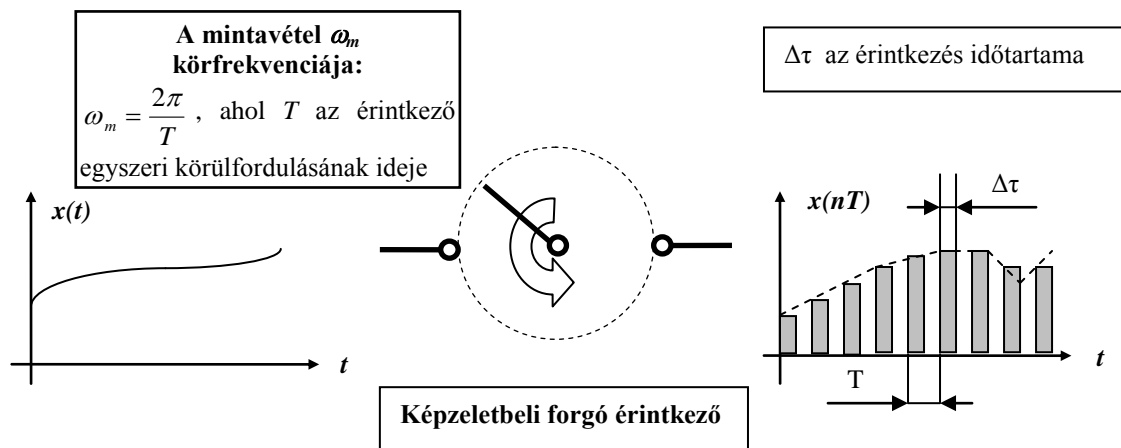
Az analóg jel időben egyenletes mintavételezésének eredménye  
 A nyílvégek a jel pillanatnyi értékével esnek egybe.  
 (Ld.: Mintavételezés modellezése a forgó kapcsoló segítségével)

7.3. ábra. Az analóg mérőjel időbeli kvantálása

**Mintavételezett és amplitúdó-kvantált (léptékezett) jel:** A jel meghatározott időpillanatokban és csak meghatározott szinteken jelenhet meg. Ez tulajdonképpen az analóg jelek digitalizálásának formája. Az amplitúdó legkisebb kvantuma az A/D átalakító felbontásától függ és az amplitúdót az A/D átalakítók többsége már kódolt formában jeleníti meg a kimeneten. Az időbeli “kvantálás”, a mintavételezés a mintavételi frekvenciával történik. A jel analóg/digitális A/D átalakításhoz idő szükséges, és ezért a mintavételezés után a jelet a feldolgozás időtartamára konstans értéken kell tartani. Ezt un. tartó-tagokkal (áramkörökkel) oldják meg. Alkalmaznak nulladrendű és elsőrendű tartótagot, e jegyzetben a nulladrendű tartótag átviteli tulajdonságait ismertetjük.



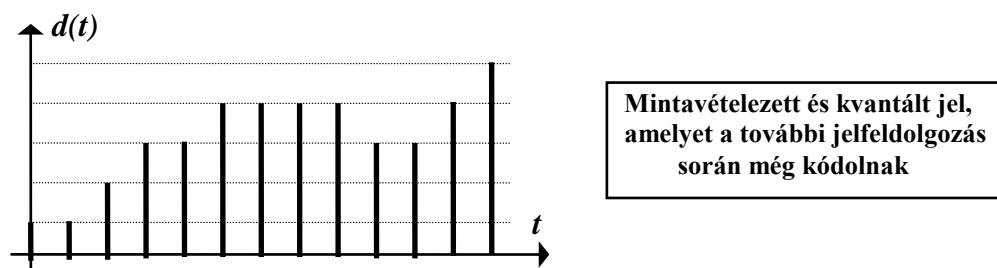
Az analóg villamos jelek digitalizálása tehát az időbeli mintavételen és az így kapott jel-amplitúdó kvantálásán-kódolásán alapszik. A mintavételezés elképzelésében segít az alábbi ábra.



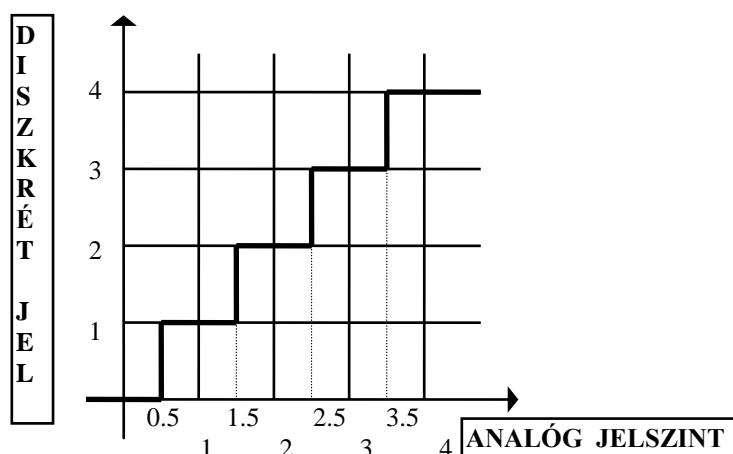
7.4. ábra. A mintavételezés folyamatának modellezése forgó érintkezővel

Képzeld el, hogy az analóg jelet egy olyan körbeforgó érintkezővel ellátott kapcsolóra bocsátjuk, amelyben az érintkezés  $2\pi/\omega = T$  idő elteltével, periodikusan, igen rövid  $\Delta\tau$  időtartamra következik be. A kapcsoló kimenetén így idő-kvantált analóg jelet kapunk. Ezen impulzus-sorozat impulzusait kell azután a tartás ideje alatt kvantálni.

Az amplitúdó **kvantálása közvetlen és közvetett módon** történhet, mindkét módszerre sokféle megvalósítás létezik. A könnyebb megértés érdekében mindkét módszert 2-2 példán szemléltetjük a későbbiekben.



7.5. ábra. Időben mintavételezett és amplitúdó kvantált jel



7.6. ábra. A kvantálás jelleggörbéje

## 7.2 Az egyenletes kvantálás szabályai

Egyenletes kvantálás esetében a kvantálási szint-különbséget úgy állapítják meg, hogy

- a./ ne hozzanak létre indokolatlan (túlzott) pontosságot ("túlkvantálás"),
- b./ ugyanakkor a túl "durva" lépések (szintkülönbség) ne okozhassák a mérőláncban első tagként elhelyezkedő jeltovábbító (szenzor) meglévő érzékenységének lerontását, és
- c./ a kvantum-szint körülbelül a mérőjel megengedhető hibatartományába essen.

A kvantálásnál elkerülhetetlen **az információ-vesztés**. Ezért mindig az alkalmazási eset és az előírt mérési pontosság határozza meg a kvantálás célszerű szintjeit. Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban ezek a szintek nem minden esetben egyenlő közűek. A híradástechnikában alkalmazzák még az ún. logaritmikus kvantálást is, a jel-zaj viszony javítására.

### 7.3 A kódolás és a kvantálási hiba viszonya

Amikor a kvantálás során kapott diszkrét szintekhez (lépcsőkhöz) pozitív egész, n-jegyű, binárisan kódolt számot rendelnek, akkor beszélünk kódolásról.

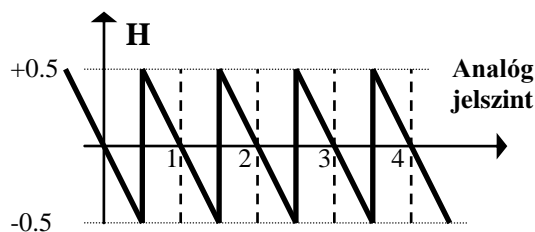
Az n-jegyű, binárisan kódolt számmal a zérustól a  $2^n - 1$  értékig terjedő számokat lehet ábrázolni, azaz összesen  $2^n$  értéket.

A binárisan kódolt mennyiség általános alakját a következőképpen lehet megadni:

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i \quad (7.1)$$

Az " $a_i$ " bináris együtthatók értéke kizárólag zérus, vagy egy lehet.

A kvantálás során elkövetett hiba értéke a mindenkor egységnyi kvantumszint  $\pm 50\%$ -a, azaz  $+0.5$  és  $-0.5$  között változik, amint az a kvantálási jelleggörbe alapján leolvasható.



7.7. ábra. A kvantálási hibagörbe

Konkrét számpéldával élve látható az ábrán, hogy négy tizedes helyértékkel rendelkező analóg szint esetében, mint például 1.5000, már a 2-es diszkrét értéket, míg 1.4999-hez csupán az 1-es diszkrét értéket rendelnénk hozzá. Így tehát két, egymáshoz igen közel fekvő analóg érték esetében - feltéve, hogy a két szint megkülönböztetését a mérés bizonytalansága lehetővé teszi - maximálisan egy kvantum-érték lehet a kvantálás hibája.

Érdemes megvizsgálni a digitális technikára jellemző relatív kvantálási hibát a szintekhez rendelhető bitek számának függvényében. Ha két szomszédos kvantum-szint közötti különbség éppen egy bitet jelent, akkor a relatív kvantálási hiba az összes ( $2^n$ ) kódmennyiségre vonatkoztatva

$$H_{rel} = \frac{1}{2^n} = 2^{-n} \quad (7.2)$$

lesz. Vegyük például, ha egy egyszerűbb digitális multiméter esetében a kijelzőn összesen 4 bináris digit adható meg. Ebben az esetben - az eszközön aktuálisan beállított mérési tartományban - a mérési tartomány maximumára vonatkoztatva a fentiekkel  $2^{-4} = 0.0625$  adódik, tehát a relatív kvantálási hiba minden mérési tartományban 6.25 %. Ha a digitek számát 10-re növeljük, akkor a relatív kvantálási hiba már látványosan lecsökken:  $2^{-10} = 1/1024$ -re, azaz a hiba már kisebb lesz, mint 0.1 %.

#### **7.4. A közvetlen és a közvetett A/D átalakítás néhány megvalósítási módja**

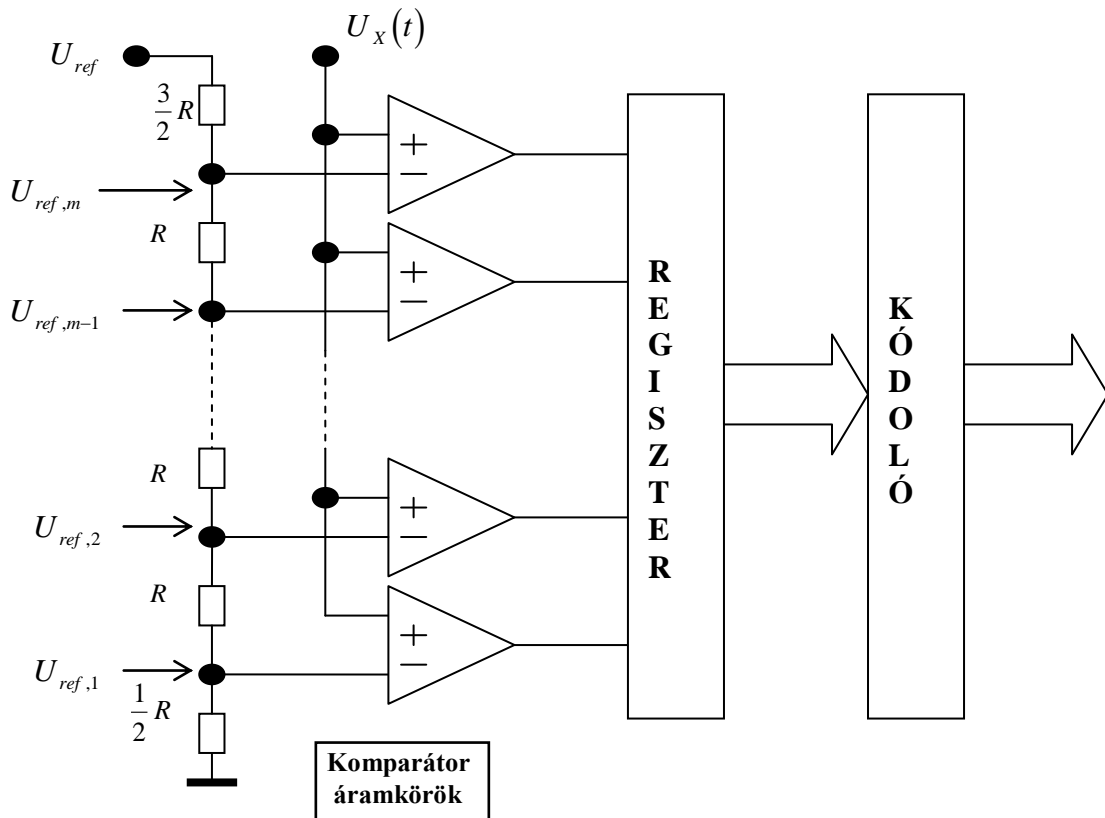
A közvetlen módszer esetében az időalap (generátor) nem vesz részt az átalakításban, csupán a vezérlő órajeleket szolgáltatja. A közvetett módszer a kódolást visszavezeti az "időalapra", az átalakító órajelére [7.1].

Az átalakítási eljárások közötti eligazodást segítik a következő, A/D átalakítókról közölt ábrák.

##### **Közvetlen módszerek**

**a./ A "párhuzamos (szimultán)"** eljárásban közvetlen módszerrel történik az átalakítás, ahol minden lehetséges jelszintnek egy külön összehasonlító, komparátor áramkör felel meg.

Az  $n$ -bites A/D konverternek így  $m = 2^n - 1$  "kvantuma", felbontás-lépcsője van, óriási előnye, hogy az átalakítás "real-time", azaz csaknem egyidejűleg történik. Az átalakítás sebességét csupán a komparátor áramkör "belső" sebessége korlátozza.



7.8. ábra. Szimultán A/D átalakító elvi vázlata

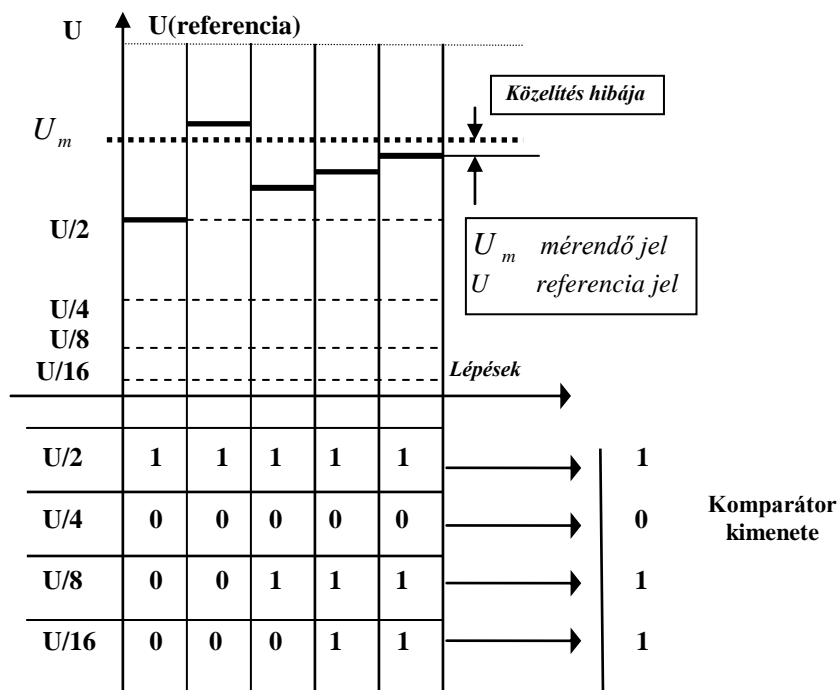
**b./ A "lépésenkénti közelítéssel (szukcesszív approximáció)"**

dolgozó közvetlen A/D konverter a tartott jel-minta aktuális értékéhez hasonlítja a stabil referencia-feszültség kettő hatványaival osztott értékeit, mindig úgy, hogy a közelítés alulról történik.

Ha a jel-minta nagyobb, mint az "oda-próbált" referencia-jel hányados, akkor a logika elfogadja a próbát, és az adott szinthez egy "L" értéket rendel. Ha az egymásra szuperponált referencia-jel hányadosok összege túllépi a jel-minta értékét, akkor a logika "O" értékkel jelzi a

túllépést. Az egyes próbálkozások eredménye így egyben már a jel kódolását is jelenti. Ez utóbbi módszer igen gyakori a digitális műszerekben. Az átalakító természetesen igényli a mintavétel utáni tartó áramkört.

A következő ábrán a közelítés lépéseit mutatjuk be egy 5 bites A/D átalakító segítségével.



7.9. ábra. A/D konverzó a lépésenkénti közelítés módszerével

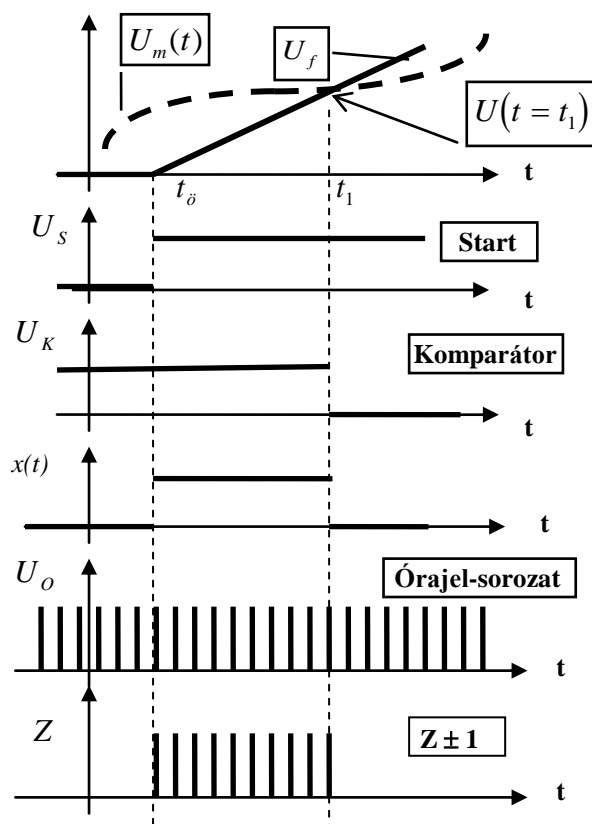
### **Közvetett módszerek**

Közvetett módszer például a “fűrészgenerátoros” és a “kettős integrálással (dual slope)” történő konverzió. Mindkét eljárás esetében időalapra vezetik vissza a villamos feszültség mérését.

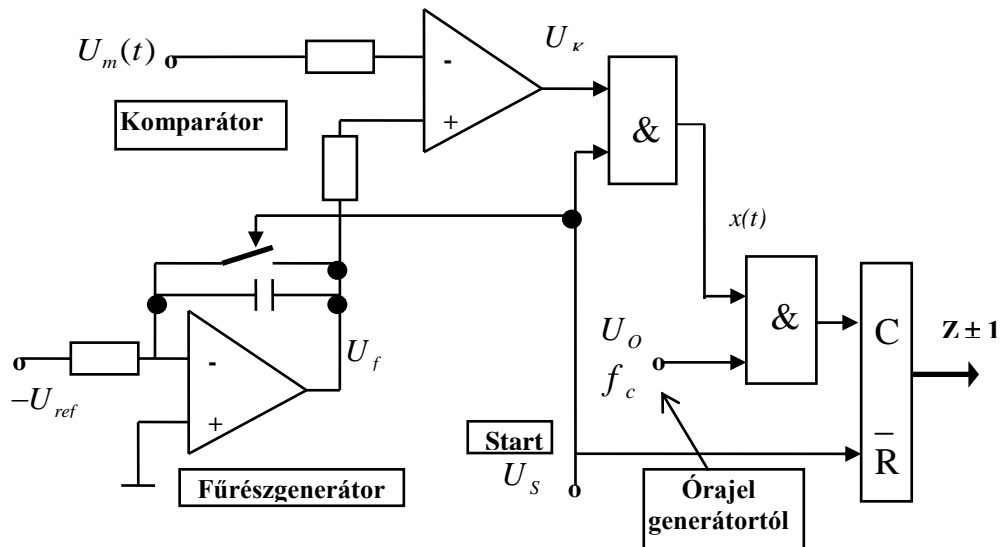
**a./ A fűrészgenerátoros módszer** a jel egy pillanatértékét, nevezetesen azon időpillanatbeli értékét méri, amikor a fűrészgenerátor jele eléri a mérendő jel szintjét.

Az idő diagramból látható a fűrészgenerátoros A/D konverzió hátránya, nevezetesen az, hogy a kijelzett érték függ az időalap - generátor és az integrátor pontosságától. Ezeken túlmenően további bizonytalanságot jelent a "kapuzás".

Az időkapu már két egymást követő számlálás esetében is eredményezhet  $\pm 1$  digit un. digitális maradék hibát.



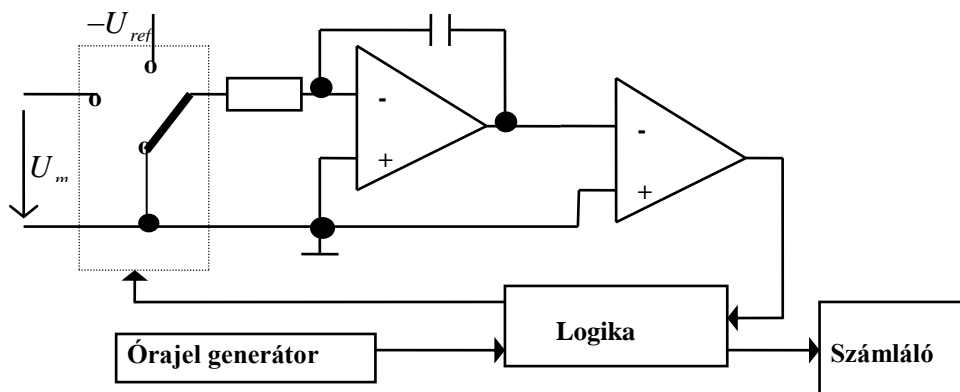
7.10. ábra. A fűrészgenerátoros A/D konverzió idő diagramja



7.11. ábra. A fűrészgenerátoros A/D átalakító tömbvázlata

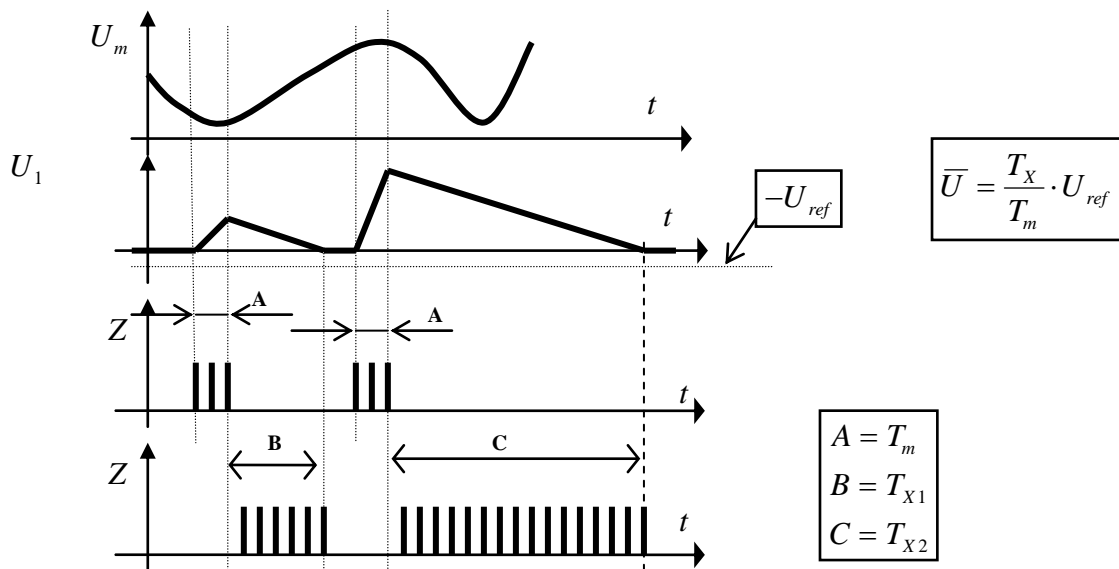
**b./ A dual-slope módszer** egy  $T_m$  mérési idő alatt a jel átlag értékét méri, és előnye a kettős integrálás miatt, hogy a kijelzett érték független az órajel hibájától. Ennek feltétele, hogy az integrálások alatt az órajel frekvenciája nem ingadozhat.

A “dual-slope”, azaz kettős integrálás esetében a berendezés integrálja a bemenő jelet (A időszakasz) és a referencia feszültséget is (B, és C időszakaszok).



7.12. ábra. A "dual-slope" A/D konverzió tömbvázlata





7.13. ábra. A "dual-slope" (kettős integrálás) A/D konverzió idő diagramja

A diagramok rajzolásakor feltételezzük, hogy a mérendő feszültség pozitív. A referencia feszültség a mérendő feszültséggel mindig ellentétes előjelű, ebben az esetben tehát negatív.

Nyugalmi állapotban a háromállású kapcsoló az integrátor bemenetét a "földre" kapcsolja és a kondenzátort rövidre zárja, így az integrátor kimenete 0 lesz.

A mérés kezdetén a kapcsoló az integrátor bemenetére kapcsolja a mérendő jelet, és megkezdődik a rögzített idejű integrálás. Ezen idő alatt a komparátor engedélyezi az órajel generátor jelét. A mérési időtartam - ami általában a hálózati frekvencia periódus ideje (nálunk 20 ms, az USA-ban 16.6 ms) - akkor ér véget, amikor a számláló "túlcsordul". A diagramon ezt az időt  $T_m$  jelöli, az ezen időhöz tartozó szám  $Z_{max}$ .

Ezt követően a kapcsoló vált, és az integrátor a referencia feszültséget kezdi integrálni, miközben az "eredmény számláló" működik. Az integrátor kimenő feszültsége csökken, és amikor elérkezik a null-átmenethez, a vezérlő leállítja a számlálót, amely  $Z$  értéket mutat. A

referencia feszültség integrálási ideje (“visszaintegrálás”) függ az integrátor előző állapotától, azaz minél nagyobb volt a mérendő jel, annál hosszabb lesz a visszaintegráláshoz szükséges  $T_x$  idő.

A mérés eredménye a két integrálási idő, illetve a két szám hányadosa lesz:

$$\bar{U}_m = \frac{T_x}{T_m} \cdot U_{ref} = \frac{Z}{Z_{max}} \cdot U_{ref} \quad (7.3)$$

Végezetül a kijelzett számérték tehát a kapuzás digitális maradék-hibájának figyelembe vételével az alábbi lesz:

$$Z = \frac{\bar{U}_m}{U_{ref}} (Z_{max} + 1) \quad (7.4)$$

## 7. 5 Jellegzetes gépipari digitális működésű eszközök

Digitális működési elvvel találkozhatunk például az **optoelektronikus abszolút és inkrementális** (növekményes) **hosszúság-és szögmérők** esetében.

Ismeretesek **transzmissziós** és **reflexiós** elrendezésű rendszerek, azaz az optikai tengely egyenes, vagy szögben meg van törve. A reflexiós eszközök esetében többnyire fém hordozón vannak az egyes kódolt osztások, vagy az inkrementumok (sötét-világos csíkozás), és a kibocsátott, valamint visszavert fény intenzitásának arányát detektálják. A transzmissziós rendszer esetében a jeleket üveg hordozóra viszik fel, ahol az egyes osztások, illetve bitek fény-áteresztő, illetve fényt át nem engedő felületekként jelentkeznek.

Az **abszolút mérőrendszer kódolása** minden esetben “egylépéses”, tehát a szomszédos osztások kódja csupán egy bitben különbözik (pl.: Gray-kód). Ez a hibás dekódolás elkerülése érdekében van így.

Az **inkrementális eszköznél** a letapogatás folyamata nem más, mint egy un. referencia-jeltől elkezdődő **impulzus számlálás**. A sötét-világos csíkozást hordozó mérőléc osztásait egy rövidebb, de azonos osztásközű letapogató léccel segítségével alakítják át az lécek két oldalán elhelyezett optokapuk segítségével szinuszos villamos feszültség-ingadozássá. Ezt a szabályos szinusz jelet a jobb felbontás érdekében előbb analóg, majd digitális **interpolációnak** vetik alá. Így jutunk el pl. a mérőléc  $2 \times 20 \mu\text{m}$  szélességű sötét-világos csík-rendszerétől (“hullámhosszától”) a 5-szörös analóg és 4-szeres digitális interpoláció után  $1 \mu\text{m}$ -es felbontásig, ahogy ezzel pl. a Mitutoyo gyártmányú “Linear Scale” mérőléceknél találkozhatunk.

Az inkrementális hossz-és szögmérő eszközökben megjelenik az időben változó analóg jelek digitalizálásának feladata.

Ez természetesen nem csupán a fent említett inkrementális eszközök esetében van így, hanem minden olyan eszköznél, ahol a mért fizikai mennyiséget villamos jellé alakítjuk, majd digitális eszközök segítségével megjelenítjük (digitális oszcilloszkóp), regisztráljuk (plotter), vagy pusztán kijelezzük (digitális multiméter).

## **7. 6 A mintavételezés modellje, a tartótag szerepe**

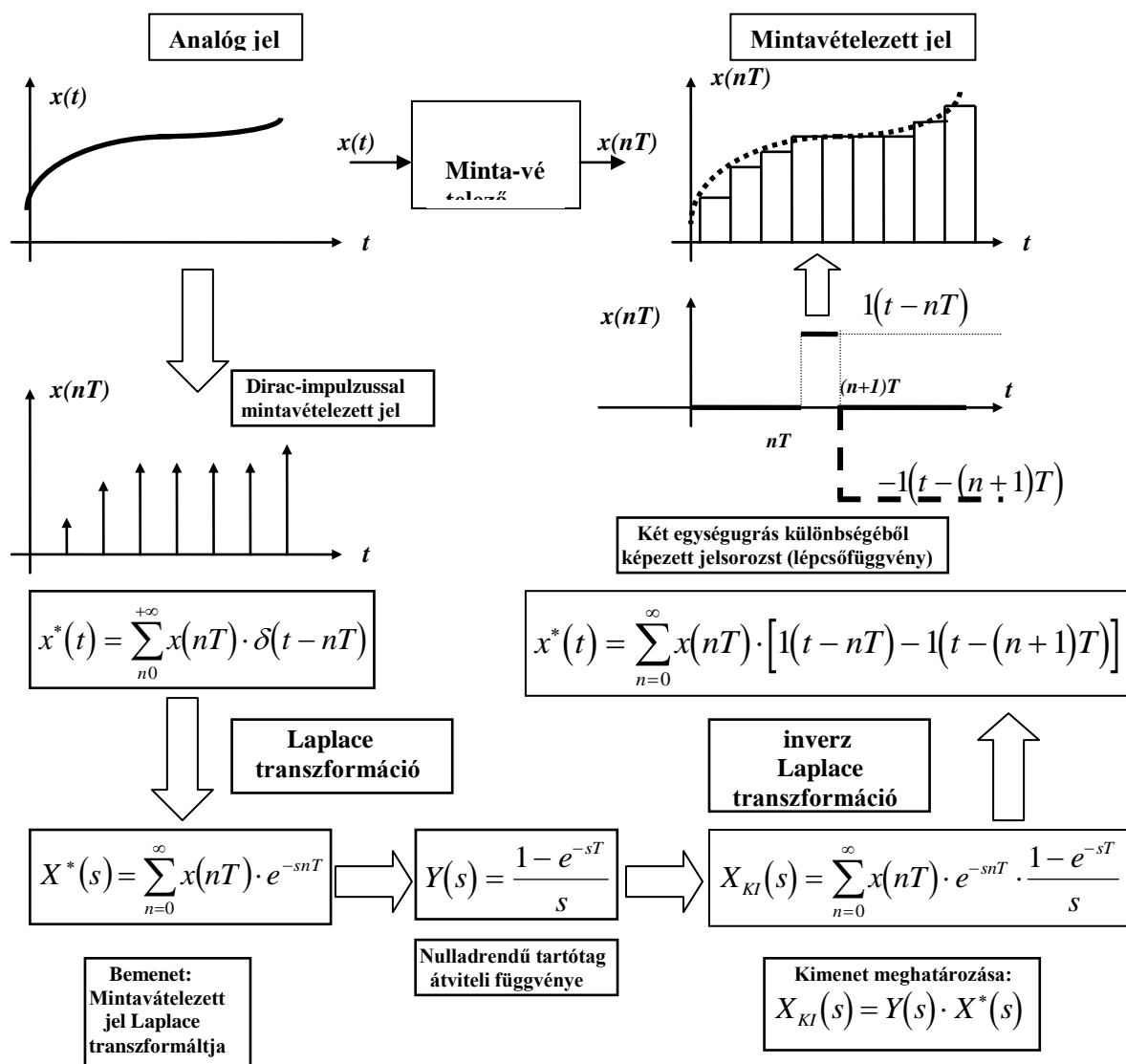
Az előbbieken láttuk, hogy az A/D konverzió elvégzése a mintavétel után bizonyos időt igényel. Ezért érdemes megvizsgálni, hogy a mintavételezett és tartott jel miként “tükrözi” az eredeti analóg jelet, és milyen átviteli tulajdonságokkal kell rendelkeznie egy tartótagnak?

A folyamatot a következő ábra segítségével lehet követni, de a teljes átlátáshoz bizonyos rendszertechnikai ismeretek nélkülözhetetlenek [7.2].

Az ábra felső részének bal és jobb oldalán **az eredeti analóg jel, illetve a mintavételező után kapcsolt tartótag kimenő jele** (közelítés

**lépcsős függvényel)** látható. A bemutatás célja az, hogy igazoljuk, az A/D átalakítás után kapott jel és az eredeti analóg jel között valóban szoros kapcsolat. Bizonyos feltételekkel, műszaki szempontból csaknem “teljes azonosság” áll fenn. Ezzel a mintavételezés “jogosságát” szemléletes módon igyekszünk alátámasztani.

**A mintavételezőben lejátszódó folyamatok matematikai modellezése a nyilak irányában nyomon követhető.**



7.14. ábra. A mintavételezés folyamat ábrája

## 7.7 Mintavételezés nullad rendű tartótaggal

Az **analóg bemenő jel mintavételezését** a korábbiakban egy “forgó kapcsoló” segítségével igyekeztünk megmagyarázni.

A mintavételezés matematikai modellezése viszont úgy történik, hogy az analóg jelet a Dirac-impulzus függvények  $nT$  időpillanatban megjelenő sorozatával (impulzus sorozat) szorozzuk meg. “ $T$ ” a már bemutatott forgó-kapcsoló érintkezési periódus ideje, “ $n$ ” pozitív egész szám.

A Dirac-impulzus definiált matematikai tulajdonságai közé tartozik, hogy területének értéke egy ( $\text{Area}=1$ ), és ezt az értéket csak a  $t=0$  időpillanatban, pontosabban  $t(0^-) \times t(0^+)$  veheti fel. Azt, hogy ez folyamatosan, “ $n$ -szer” következik be, az impulzus  $n$ -szer alkalmazott időbeli eltolásával fejezzük ki:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (7.5)$$

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az általa megszorzott “ $x(t)$ ” bemenő függvényből “ $t=nT$ ” időpillanatokban elméletileg zérus ideig (valóságban  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ) tartó “jel-szeleteket” hasít ki, ahol a függvény értéke  $x(nT)$ . A mintavételező kimenetén ezután egy időben kvantált jelsorozat jelenik meg.

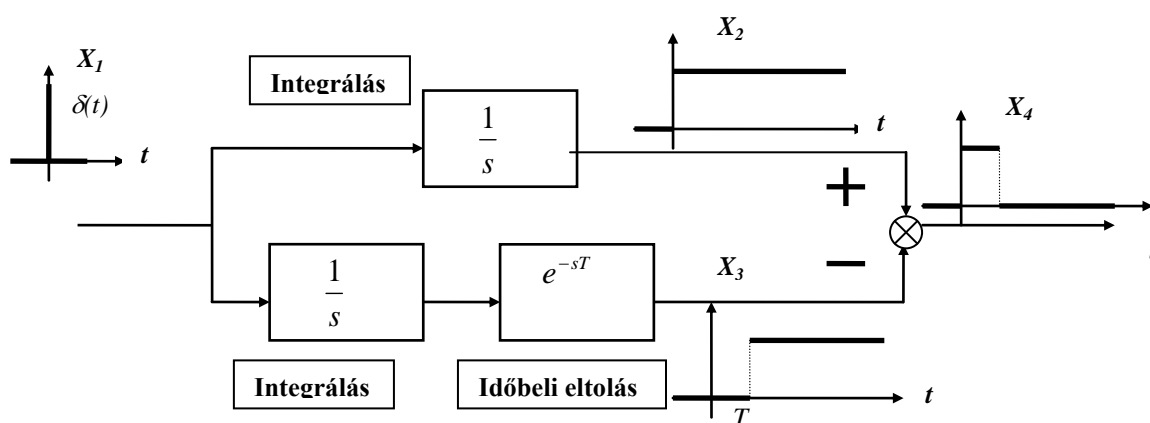
Természetes, hogy ez a jel már nem azonos a bemenő analóg jellel, még akkor sem, ha a “ $T$ ” mintavételezési időt a műszaki szempontból realizálható legkisebb értékre is választjuk, más szóval a **mintavételezési frekvenciát** a lehetőségek határáig növeljük.

Tehát  $x(t) \neq x^*(t)$ , hiszen a csillaggal jelölt függvény már nem folytonos, hanem egy un. amplitúdó modulált impulzus-sorozat.

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (7.6)$$

Belátható, hogy a fentiekből  $T \rightarrow 0$  közelítéssel, azaz  $\omega_m = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \infty$   
 - az egyébként “műszakilag” nem elérhető esetre -  $x(t) \approx x^*(t)$  lehetne.

Nézzük meg, mi történik, ha ezt az idő-quantált impulzus sorozatot az ábrán megadott módon a tartótagon bocsátjuk át?



7.15. ábra. Nulladrendű tartótag helyettesítő tömbvázlata

A tartótag átviteli tulajdonságait az idő tartományban úgy kell elképzelni, mintha két párhuzamos ág eredőjét képeznénk.

Az egyik ágon a bemenő jelet integráljuk, ekkor lesz a Dirac-impulzusból egységugrás függvény, a másik ágon az integrálás után a keletkező egységugrás jelet “T” időtartammal késleltetjük.

Az egyes átviteli tagok “dobozáiban” a rendszertechnikában szokásos módon az átviteli függvényeket tüntettük fel. Így az integrálás “ $1/s$ ”, az időbeni késleltetés pedig a Laplace-transzformációs tétel alapján “ $e^{-sT}$ ” operációként jelentkezik. Ezek a matematikai műveletek természetesen csak az un. operátor térben érvényesek. Mindenesetre az időbeli folyamatok elképzelhetősége érdekében az egyes átviteli tagok kimenetén az időbeli jeleket tüntettük fel.

A továbbiakban a két ág jelének összegzése úgy megy végbe, hogy a késleltetett jel negatív előjelet kap. Az összegzés után jól látszik, hogy a kimeneten egy "T" ideig tartó, egységnyi értékű jel lesz. Ha képzeletben ezt a folyamatot "n-szer" megismételjük, miközben a Dirac-impulzus segítségével, a "t=nT" időpontokban az analóg jelből vett "x(nT)" értékeket súlyozásként figyelembe vesszük, akkor az eredeti analóg jelet az ábra-folyam végén látható módon egy lépcső-függvénnyel közelítettük. A közelítés eredménye annál pontosabb, minél kisebb a "T" mintavételezési periódus idő, azaz minél nagyobb a mintavételezés frekvenciája.

A rendszertechnikában az "idő tartomány" helyett az operátor tartományban szokásos az átviteli tagokkal műveleteket végezni, hiszen így a bonyolult konvolúciós integrálok kiszámítása helyett, algebrai műveletekkel jutunk eredményhez. Ha szükség van az eredmény idő tartománybeli alakjára is, akkor elvégezzük az inverz Laplace transzformációt az eredmény transzformált alakjára.

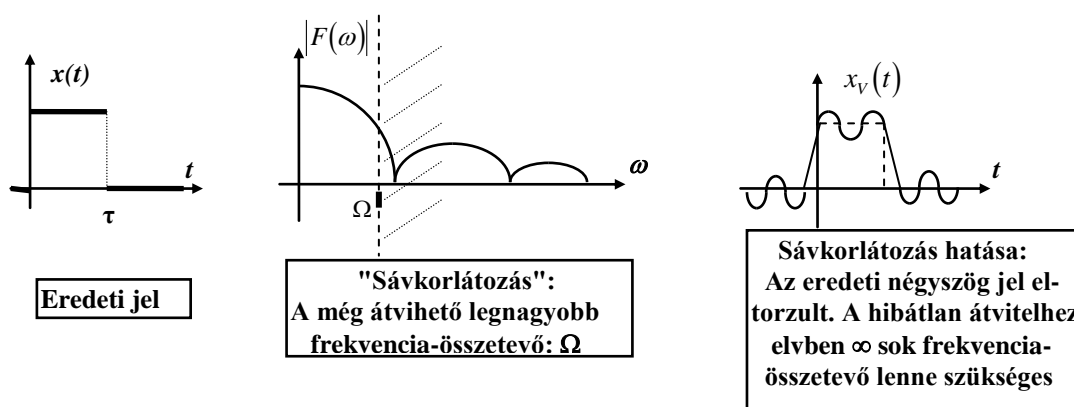
## 7.8 A mintavételezés feltételei

Az előző fejezetben láttuk, hogy az időben mintavételezett "kvantált" jel csak akkor egyezhetne meg az eredeti "x(t)" függvénnyel, ha a mintavételezés frekvenciája "végtelen" nagy lehetne.

Olyan műszaki eszközt, amely ezt biztosítani tudná, már csupán ésszerűségi okok miatt sem lenne célszerű építeni, nem beszélve a megvalósítás nehézségeiről. Egy jel visszaállításához bizonyos hibahatárokon belül ugyanis nem szükséges minden frekvencia-összetevő jelenléte. Ezért az egyes jelátviteli tagok átviteli frekvencia-tartományában **frekvencia korlátozást** vezetnek be. Ezzel jelentősen egyszerűbbé válnak az eszközök, de ennek a korlátozásnak

vannak következményei is, amelyeket az A/D konverziónál figyelembe kell venni.

Bemutattuk, hogy mintavételezés során az eredeti jelet idő-kvantált impulzus-sorozattal helyettesítjük. A jelelmélet szerint azonban, már egyetlen impulzus hibamentes átviteléhez is végtelen sok frekvencia összetevő lenne szükséges, mert a következő ábrán látható, hogy az impulzus spektruma  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$  jellegű függvény.



7.16. ábra. A sávkorlátozás és hatása a jelalakra

"Korlátozzuk" le ezt a spektrumot példaképpen az első nulla helyének környékén - amely a valóságos impulzus időtartamával van összefüggésben. Így az impulzus visszaállításához szükséges összetevők egy része hiányozni fog, a **sávkorlátozás** eredménye az ábrán látható, impulzushoz hasonló, de a rajzon szándékosan felnagyított hullámosságú jel-alak lesz. A továbbiakban ennek ellenére azonban a sávkorlátozott impulzus-spektrummal számolunk, hiszen ez felel meg a technikai eszközeinkben fellépő valós folyamatoknak.

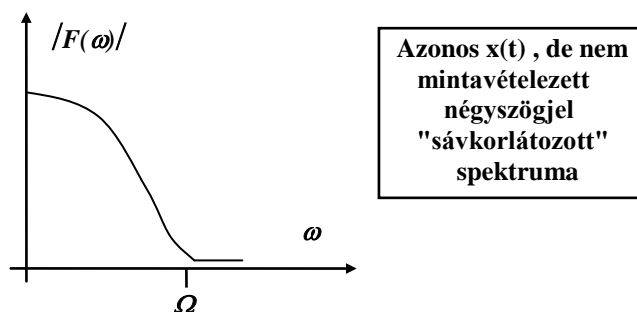
Fentebb említettük, hogy a sávkorlátozásnak műszaki és ésszerűségi okai vannak. Legyen tehát egyetlen impulzus-szerű jel



spektruma az első zérushely környékén lekorlátozva. A szöveg melletti ábrán látható egyetlen impulzus  $\Omega$  körfrekvenciánál

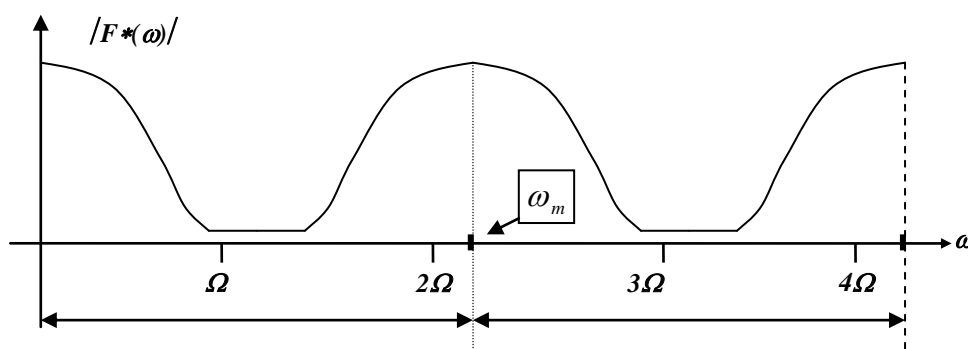
lekorlátozott spektruma látható, amelyben a  $\sin x / x$  jellegből csak az első maximum környezete maradt meg.

Láttuk, hogy egy tetszőleges analóg jel mintavételezése eredményeként impulzus-sorozatot kapunk. Levezetés nélkül álljon itt, hogy az impulzus-sorozat spektruma jellegét tekintve hasonlít egyetlen impulzus itt bemutatott alakjához, de az impulzus-sorozat spektruma már **periodikus** lesz.



7.17. ábra. Négyzetjel spektruma sávkorlátozás után

Az impulzus sorozat, és így tehát egy mintavételezett jel spektruma is, a mintavételi frekvencia szerint periodikus.



7.18. ábra. A Shannon-szabály betartásával mintavételezett, impulzus alakú  $x(t)$  jel helyes spektruma

Kérdés, hogy mekkora lehet egy adott analóg jel esetében az a mintavételi periódusidő, illetve mintavételi frekvencia, ami műszaki szempontból még megengedhető hibát okoz [7.2]?

A választ az informatika egyik “atyja” **Shannon** dolgozta ki. Röviden fogalmazva Shannon **mintavételi törvénye** az alábbiak szerint interpretálható:

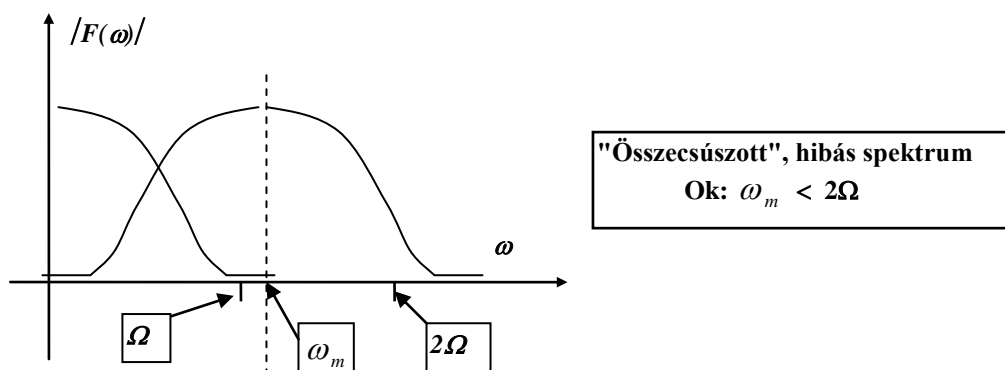
**A mintavétel frekvenciája legyen nagyobb, mint az átvendő jelben előforduló legnagyobb frekvenciájú összetevő frekvenciájának kétszerese:**

$$\omega_m > 2\Omega \quad \text{ahol} \quad \omega_m = \frac{2\pi}{T}, \quad (7.7)$$

és “T” a mintavételi periódusidő,  $\Omega$  pedig a jelben található, még átvendő legmagasabb frekvenciájú összetevő.

Nézzük ezek után, hogy mi történik hibás mintavételezési frekvencia alkalmazása esetében?

A hibát a mintavételezett jel spektrumának “összecsúsása” idegen kifejezéssel az **“aliasing”** okozza. A mintavételezett jel spektruma ugyanis periodikus, méghozzá a mintavétel frekvenciája egyben a spektrumkép ismétlődésének “frekvenciája”. Az ábrán látszik, hogy a jeltorzulást a periodikus spektrum összecsúsása okozza.

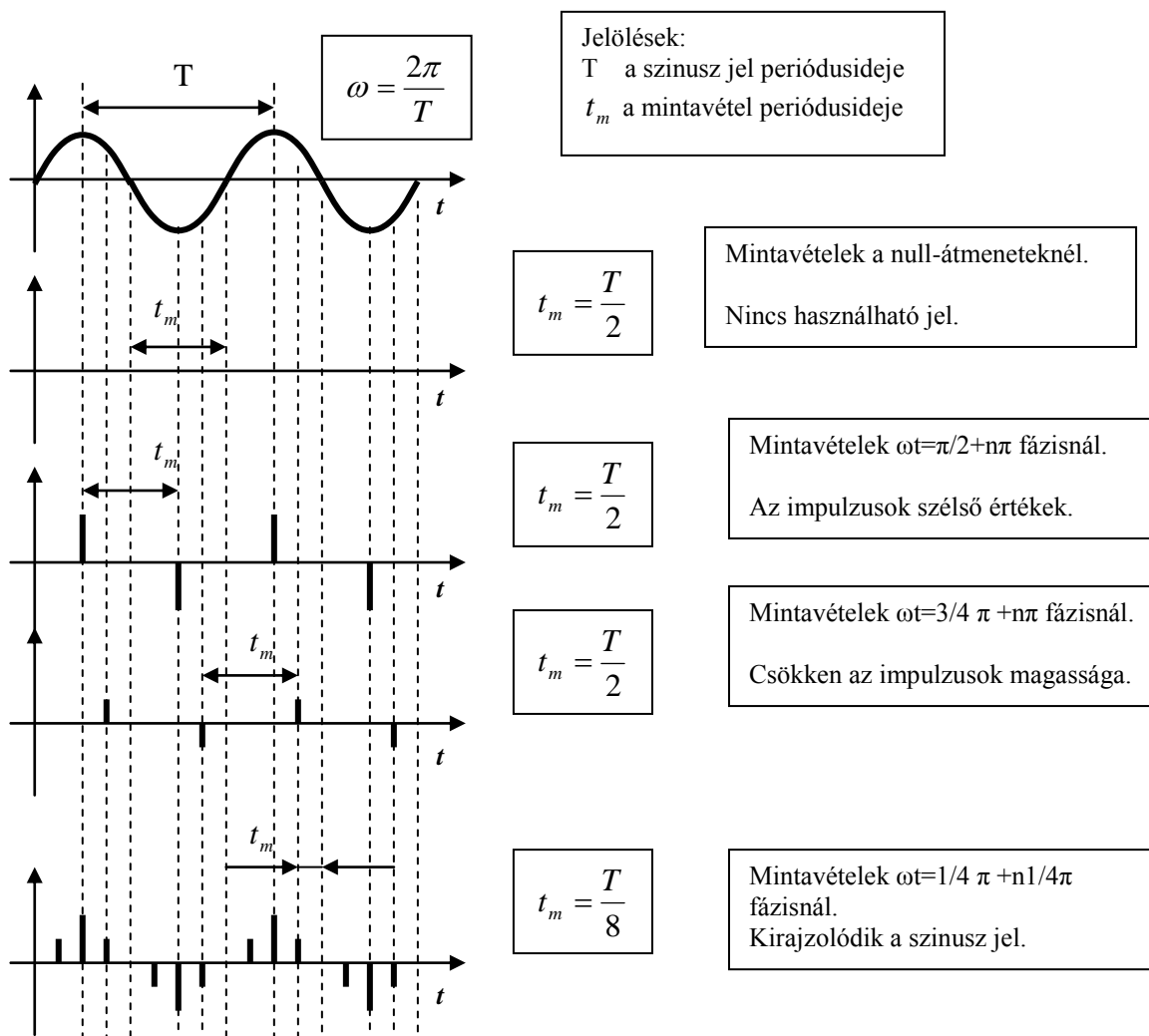


7.19. ábra. A hibás mintavételi frekvencia a spektrumot eltorzítja

A következő ábrason egy szinuszos analóg jel mintavételezését mutatjuk be. Az első három diagramon azt szemléltetjük, hogy a hibás mintavételi frekvencia milyen impulzus-sorozatot eredményez.

Ezekben az esetekben ugyanis a Shannon-féle szabály nem érvényesül, mert a mintavétel frekvenciája éppen kétszerese a szinusz jel frekvenciájának. Külön figyelmet érdemel, hogy abban az esetben, ha a mintavétel frekvenciája kétszeres, és a mintavétel pont a null-átmeneteknél történik, akkor nem kapunk értékelhető jeleket.

A negyedik ábrán az látható, hogy a szinuszos jel már körvonalazódik az impulzus-sorozatban, ha a mintavételi frekvencia a szinuszos jel frekvenciájának nyolcszorosa.



7.20. ábra. A mintavételi frekvencia hatása szinuszos jel esetében

Így tehát érthetővé válik, hogy a mintavételezett jelből az eredeti analóg jel visszaállíthatatlan, ha a jelben előforduló legnagyobb, még szignifikáns szinuszos frekvencia-összetevő kétszeresénél kisebb frekvenciával történik a mintavételezés

Befejezésül és ismétlésként álljon itt a mintavételi szabály olyan formában, ahogy az előzőeken kívül a mérés technikában használatos: A mintavételi idő és a jelben található maximális, még átvindó, "felső" határfrekvencia  $\omega_F$  közötti kapcsolat:

$$T \left\langle \frac{\pi}{\omega_F} = \frac{1}{2f_{\max}} \right. \quad (7.8)$$

A gyakorlatban a probléma megoldására a mintavevő és tartó tagok elé egy alul-áteresztő (antialiasing) szűrőt iktatnak be, amely a  $f \geq \frac{f_m}{2}$  frekvenciákat a jelből kiszűri.

Meg kell még jegyezni, hogy a mintavételezett jel spektrumát befolyásolja a tartótag által biztosított tartási idő is. Ha a jel változásának gyorsasága két szomszédos minta között nem jelentős, akkor az ebből származó jeltorzítás nem számottevő.

Frekvencia tartományban vizsgálva a folyamatot nyilvánvaló, hogy a tartótag átvitele is frekvenciafüggő. Az átvindó jel spektrumát maga a tartótag is "súlyozza" és az integrálás miatt egy negatív előjelű frekvenciafüggő fázistolás is fellép. A feltételek részletezése azonban e jegyzet kereteit meghaladja, ezzel kapcsolatban a szakirodalom ad bővebb felvilágosítást.

### ***Irodalom a 7. fejezethez***

- [7.1] Schnell L. (szerk.): Jelek és rendszerek mérés technikája  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [7.2] Bening, F.: Z-Transformation für Ingenieure  
B.G.Teubner Verlag, Stuttgart, 1995.