Tengely kritikus fordulatszáma

Modell függőleges tengely esetén

Tegyük fel, hogy a végein csapágyazott tengelyen *m* tömegű járókerék helyezkedik el, melynek tömegközéppontja nem esik a forgástengelybe, hanem *e* excentricitással eltér attól. Ennek hatására az ω szögsebességgel forgó tengelyen lévő tömeg saját szelvényében a tengely *y* kihajlását okozza.

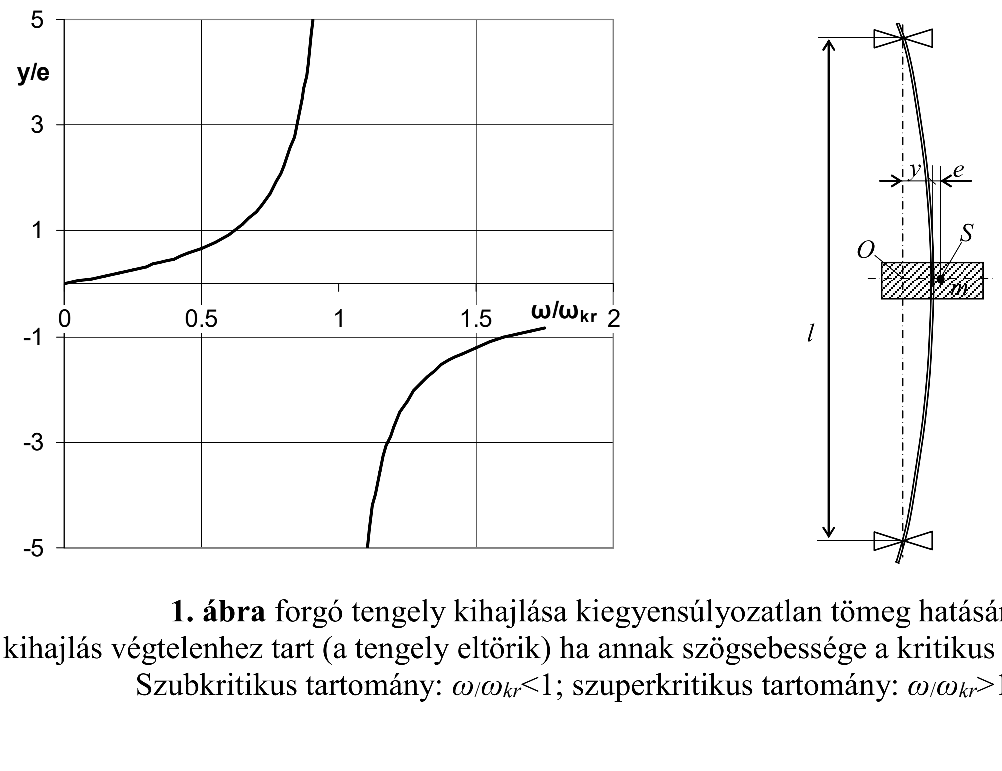
Emiatt az ω szögsebességgel forgó *m* tömegre $F_{cf} = m\left(y+e\right)\omega^2$ centrifugális erő hat. A tengely *y* kihajlását okozó erő – rugóerő $F_t = s \cdot y$, ahol az *s* rugómerevség a szilárdságtan alapján határozható meg és erre később még visszatérünk. A fenti két erő egyensúlya $m(y+e)\omega^2 = s \cdot y$.

Innen
$$y = \frac{me\omega^2}{s - m\omega^2}. \qquad (1)$$

A kihajlás a végtelenhez tartana, ha a nevező zérussá válna, az ehhez tartozó szögsebességet jelöljük ω_{kr} –sal. $\omega_{kr} = \sqrt{\frac{s}{m}}$ ami a dinamika ismert képlete tömeg-rugó lengő rendszerek esetére. A (1) képletből a kihajlás és az excentricitás hányadosa kifejezhető és behelyettesíthető az imént kapott kritikus szögsebesség. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$\frac{y}{e} = \frac{m\omega^2}{s - m\omega^2} = \frac{\omega^2}{\frac{s}{m} - \omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega_{kr}^2 - \omega^2} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2}. \qquad (2)$$

Az alábbi ábrán egymás mellé rajzoljuk a (2) képletbeli függvény grafikonját és a forgó függőleges tengelyen *e* excentricitással elhelyezett *m* tömeget, valamint a tengely *y* kihajlását.



1. ábra forgó tengely kihajlása kiegyensúlyozatlan tömeg hatására
A kihajlás végtelenhez tart (a tengely eltörik) ha annak szögsebessége a kritikus szögsebesség
Szubkritikus tartomány: $\omega/\omega_{kr}<1$; szuperkritikus tartomány: $\omega/\omega_{kr}>1$

Modell vízszintes tengely esetén

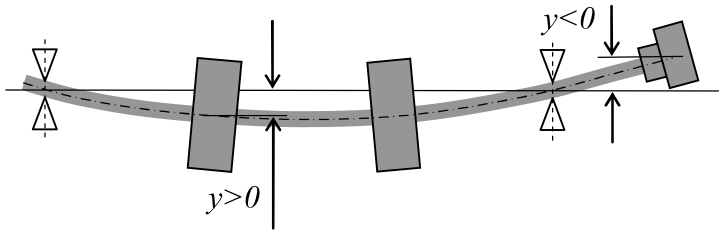
A csapágyakban alátámasztott tengelyen G súlyú járókerék van, mely annak m tömegéből számítható, $m = \frac{G}{g}$. A G súly hatására a tengely a járókerék szelvényében y mélységbe lehajlik, innen a tengely rugómerevsége $s = \frac{G}{y}$. Az y lehajlást ismét a szilárdságtanban tanult módon a rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával határozzuk meg. Az ω szögsebességgel forgó tengelyen lévő tömeg súlypontja a tengelybe esik, e = 0, ezt és m, c imént számolt értékét az (1) képletbe helyettesítve a forgó tengely kritikus szögsebessége

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{s}{m}} = \sqrt{\frac{G}{y} \cdot \frac{g}{G}} = \sqrt{\frac{g}{y}} . \tag{3}$$

Több tömeg, például többfokozatú, vízszintes tengelyű szivattyú esetén G. Kull módszere szerint két lépésben határozható meg a kritikus fordulatszám
1. lépés

$$\omega_{kr} = \sqrt{g \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i y_i^2}} \tag{4}$$

képlettel számítjuk a kritikus fordulatszám első közelítését, ahol az egyes terhelő tömegeket (az egyes járókerekek, továbbá a tengely végén lévő tengelykapcsoló tárcsa, esetleg axiális tehermentesítő tárcsa tömegét) m_i -vel, az egyes tömegek szelvényében ezek $m_i g$ súlyának hatására létrejövő lehajlást y_i -vel jelöltük. Ha egy tömeg a csapágyakon kívül, konzolosan helyezkedik el, akkor a lehajlás esetleg negatív, ilyenkor a (4) képletben ez az y_i negatív, ilyen eset látható az alábbi vázlaton.



2. lépés
A terhelő erőket most nem a tömegek súlyaként, hanem az y_i lehajlásnak megfelelő excentricitással elhelyezett m_i tömegekre ható centrifugális erőkkel vesszük számításba, ezzel a tengely újabb rugalmas szál alakját kapjuk újabb y^*_i lehajlásokkal. Ezeket visszaírva a (4) képletbe kapjuk ω_{kr} jobb, véglegesnek tekinthető közelítését.

Példák lehajlás számítására
Koncentrált F erő hatására az l hosszúságú, I másodrendű nyomatékú E rugalmassági modulusú tengely, mint rugalmas szál lehajlása y. Egy d átmérőjű kör keresztmetszetű tengely másodrendű nyomatéka $I = \frac{d^4 \pi}{64}$.
Ha az F erő az alátámasztásoktól a, illetve b távolságban hat ($a + b = l$), akkor

$$y = \frac{a^2 b^2}{3l \cdot E \cdot I} F . \tag{5}$$

Ha az F erő az alátámasztások között középen hat $a = b = l/2$, akkor

$$y = \frac{l^3}{48 \cdot E \cdot I} F \,. \tag{6}$$

A tengely saját súlyának – mint egyenletesen megoszló terhelésnek – hatására is lehajlik. Ha továbbra is F jelöli a terhelő erőt, most a tengely súlyát, akkor

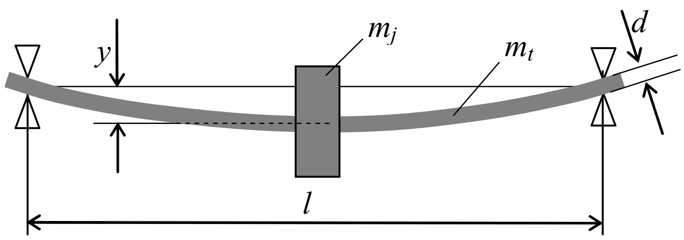
$$y = \frac{5}{8} \frac{l^3}{48 E \cdot I} F \approx \frac{l^3}{77 E \cdot I} F \tag{7}$$

Példa: Az egyes erőkomponensek miatti lehajlások összegezhetőek, így egy m_t tömegű forgó vízszintes tengelyen éppen a csapágyak között középen elhelyezett m_j tömegű járókerék súlyának hatására a tengely legnagyobb lehajlása a járókerék szelvényében

$$y = \frac{5}{8} \frac{l^3}{48 E \cdot I} m_t g + \frac{l^3}{48 E \cdot I} m_j g = \frac{l^3}{48 E \cdot I} g \left(\frac{5}{8} m_t + m_j \right). \tag{8}$$

Innen a kritikus szögsebesség a (3) képlet alkalmazásával

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{g}{y}} = \sqrt{\frac{48 E \cdot I}{l^3 \left(\frac{5}{8} m_t + m_j \right)}} \tag{9}$$



2. ábra *d* átmérőjű, m_t súlyú tengely *y* lehajlása középen elhelyezett m_j tömeg hatására

Mátrix módszer

Az előzőekből látható, hogy kifejlesztettek több tömeggel terhelt esetre is számítási módszereket a kritikus szögsebesség (fordulatszám) meghatározására, de ezek alkalmazásához elég sok intuíció kell.
Tetszőleges tömegeloszlású tengelyek esetén általánosan érvényes módszer a következő. Definiáljuk a tengely *s* rugómerevség, mint a terhelő erő és a lehajlás hányadosát: $s = \frac{F}{y}$.

Jelöljük e mennyiség reciprokát, a rugóállandót *c*-val. $c = \frac{1}{s} = \frac{y}{F}$. Innen

$$y = c \cdot F \tag{10}$$

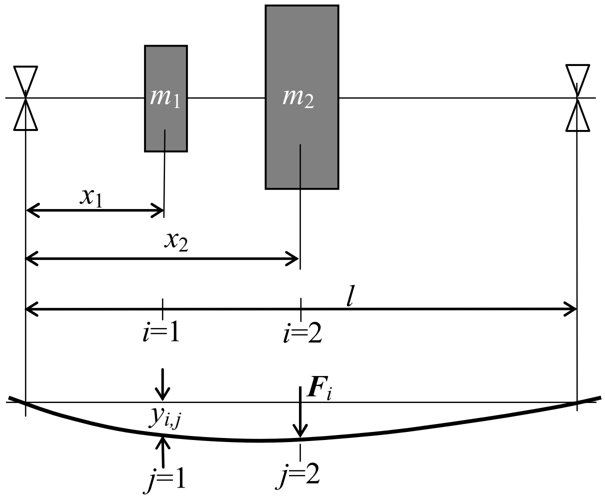
Az *i* jelű szelvényben ható F_i terhelőerő hatására a tengely egy *j* jelű keresztmetszetben y_j –vel hajlik le. Ez meghatározható a rugalmas szál differenciálegyenletének alkalmazásával és szakkönyvekben táblázatosan ezek az eredmények megtalálhatók. Válasszuk az $y_{i,j}$ keresztmetszeteket az egyes F_i terhelő erők hatásának síkjában. A (10) képletből

$$y_{i,j} = s_{ij} \cdot F_i \tag{11}$$

Ha összesen *n* tömeg (például járókerék, tengelykapcsoló-fél, stb.) van a tengelyen, akkor az y_j lehajlás az összes F_i terhelés hatására (i = 1,2,…,n)

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} y_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot F_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot m_i y_i \omega^2 \,, \ (j = 1,2,\ldots,n), \tag{12}$$

hiszen az ω szögsebességgel forgó tengelyt a lehajlás miatti excentrikus elhelyezkedésű m_i tömegekre ható centrifugális erők térítik ki egyenes vonalából. A 3. ábrán megrajzoltunk példaként két terhelő tömeget és ez alá a rajz alá a figyelembe veendő erőket és lehajlásokat.



3. ábra Két terhelő tömeg és a tengely lehajlása a tömegek szelvényeiben

A (12) egyenleteket a 3. ábra jelöléseivel két tömeg példájára felírva kapjuk, hogy

$$y_1 = c_{11} m_1 y_1 \omega^2 + c_{21} m_2 y_2 \omega^2$$

$$y_2 = c_{12} m_1 y_1 \omega^2 + c_{22} m_2 y_2 \omega^2$$

Tömören $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} c_{11} m_1 & c_{21} m_2 \\ c_{12} m_1 & c_{22} m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Az egyenleteket rendezve az y_j ismeretlenekre

$$\begin{aligned} \left(1 - c_{11} m_1 \omega^2\right) y_1 \qquad - c_{21} m_2 \omega^2 y_2 &= 0\,, \\ - c_{12} m_1 \omega^2 y_1 + \left(1 - c_{22} m_2 \omega^2\right) y_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Ennek a homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek **csak akkor van zérustól különböző megoldása** az y_1, y_2 lehajlásra, ha az egyenletrendszer együttható mátrixának D determinánsa zérus.

$$\det(\mathbf{A}) = D = \left(1 - c_{11} m_1 \omega^2\right) \cdot \left(1 - c_{22} m_2 \omega^2\right) - c_{12} m_1 \omega^2 \cdot c_{21} m_2 \omega^2 = 0 \quad . \tag{13}$$

A (13) algebrai egyenlet ismeretlene az ω_{kr}^2 kritikus fordulatszám-négyzet. Ha van két pozitív valós megoldás, akkor azok pozitív gyökei a keresett kritikus fordulatszámok.

$$\underbrace{\left(c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}\right)}_{=\det(\mathbf{A})} m_1 m_2 \left[\omega^2\right]^2 - \underbrace{\left(c_{11} m_1 + c_{22} m_2\right)}_{=\mathrm{trace}(\mathbf{A})} \left[\omega^2\right] + 1 \overset{jel}{=} a \left[\omega^2\right]^2 - b \left[\omega^2\right] + 1 = 0$$

Innen $\omega_{kr\,1,2}^2 = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$ és végül

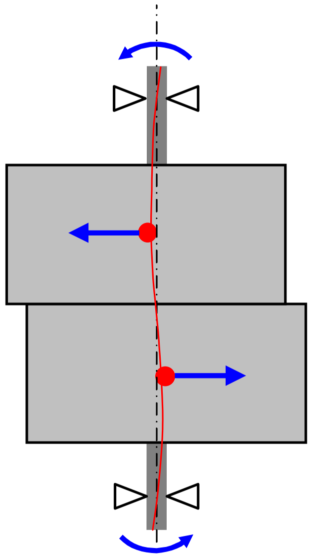
$$\omega_{kr\,1} = +\sqrt{\omega^2_{kr\,1}} \left[\frac{rad}{s}\right], \qquad \text{illetve} \qquad \omega_{kr\,2} = +\sqrt{\omega^2_{kr\,2}} \left[\frac{rad}{s}\right]. \tag{14}$$

A képletekbe az m tömeget [kg], a c rugóállandókat [m/N] mértékegységben kell helyettesíteni.

Járókerekek kiegyensúlyozása

A **statikus kiegyensúlyozás** azt jelenti, hogy a tengely és a rajta lévő összes tömeg közös súlypontja a forgástengelybe kerüljön. A járókereket tengelyével együtt két párhuzamos, vízszintes élű „prizmára" helyezzük. Ha a járókerék elfordul, akkor annak súlypontja nem esik a forgástengelybe, póttömeggel, leköszörüléssel visszaállítható a súlypont a járókerék geometriai tengelyébe.

A **dinamikus kiegyensúlyozatlanság** azt jelenti, hogy bár a kerék súlypontja annak forgástengelyébe esik, a forgó tengelyt megfogó csapágyakra radiális irányú erő hat függőleges tengelyelrendezés esetén is. Ennek oka, hogy a kerék forgástengely irányú tömegeloszlása nem egyenletes, aminek hatására a rugalmas szál S-alakot vesz fel az egyes rész-tömegek forgás közbeni excentrikus elhelyezkedését okozva. Ezt ellensúlyozó körbeforgó nyomaték ébred a csapágyakban. Ennek kiegyensúlyozó padon való mérése alapján meghatározhatók a szükséges póttömegek, illetve a leköszörülendő, fúróval eltávolítandó anyagrészek és azok elhelyezési pontja.



4. ábra

Centrifugál kompresszor hátlapja dinamikus kiegyensúlyozás során készített furatokkal

Excentrikusan összeillesztett tárcsák eredő súlypontja a forgástengelybe esik, de az egyedi súlypontok ● nem esnek a forgástengelybe, a rugalmas szál S alakot vesz fel, a résztárcsákra centrifugális erő → hat, a csapágyakban megmérhető az ezt ellensúlyozó nyomaték

Budapest, 2019. szeptember 11. Kullmann László