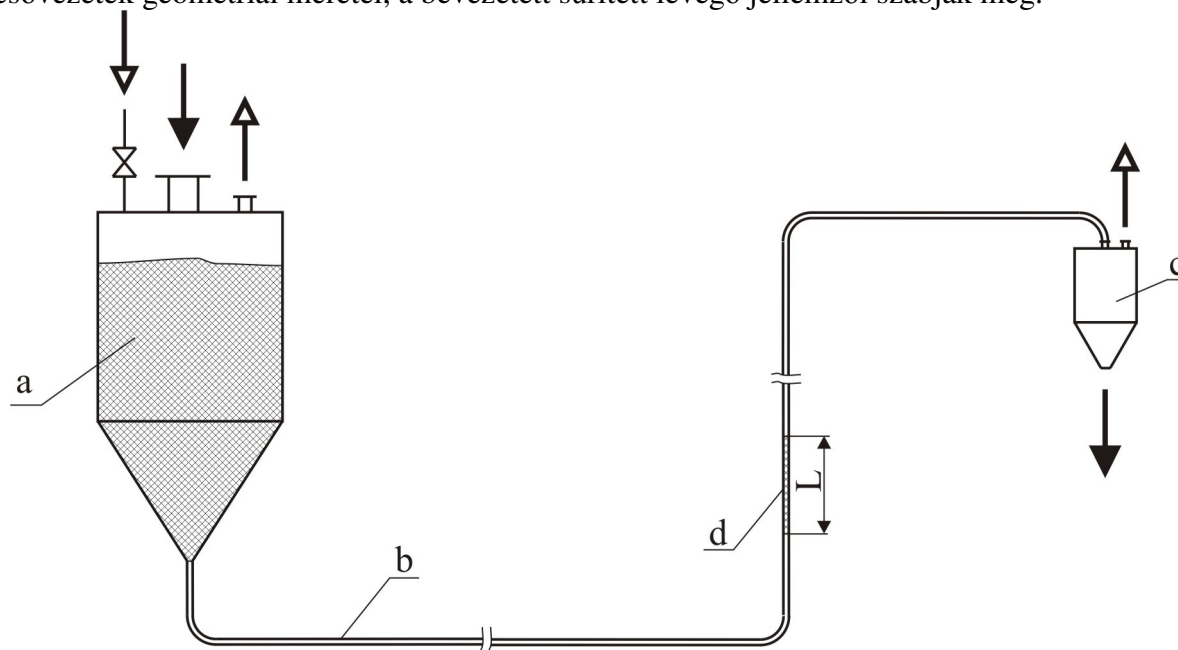


6. Dugós pneumatikus szállítás matematikai-fizikai modellje [93]

A dugós szállítási mód a sűrűáramú szállítás legújabb, még fejlődésben lévő változata. A 6.1. ábrában bemutatott elrendezési vázlat szerint a nyomótartályból a tartályban lévő anyag fölé vezetett sűrített levegő hatására kijövő anyagdugó méretét a tartályban lévő anyag tömege, a csővezeték geometriai méretei, a bevezetett sűrített levegő jellemzői szabják meg.



6.1. ábra. Dugós szállítóberendezés

a.) Nyomótartály

b.) Szállítóvezeték

c.) Fogadótartály

d.) A függőleges szakaszban mozgó dugó

A nyomótartályból kijövő anyagdugó a csatlakozó csővezetékben a ráható erők eredményeként változó sebességgel halad előre. A dugót előrehajtó erőt az anyagdugón átáramló sűrített levegő nyomásesése szolgáltatja. A fogadótartályba kerülő anyagdugó elválik a szállító levegőtől és innen a felhasználási helyre adagolható.

A dugós szállítás kis sebességű szállítási mód, így az anyag aprózódása és a koptató hatás nem számottevő. Ez a szállítási mód alkalmas mind a vízszintes, mind pedig a függőleges szállításra, nyomásigénye nem túl nagy. A szállítás fajlagos energiaigénye kicsi, így az üzeme gazdaságos.

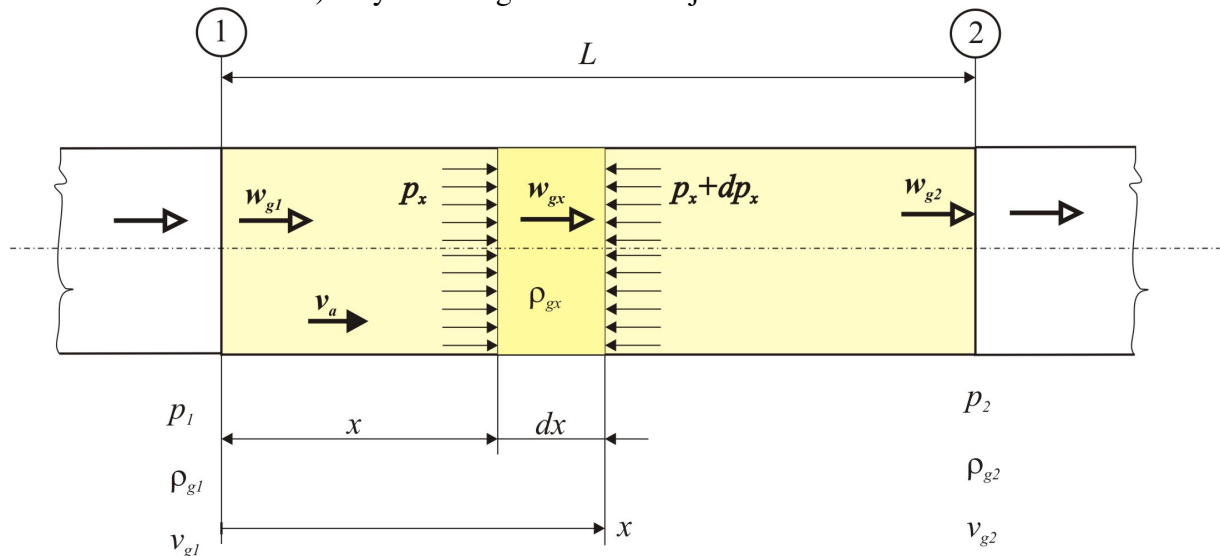
A következő fejezetekben az anyagdugóra ható erők figyelembe vételével meghatározzuk a csővezetékben mozgó anyagdugó kinematikai jellemzőit. Ezek birtokában a szállításra jellemző olyan fő paraméterek, mint a nyomás, a sűrített levegőfogyasztás, energiaigény stb. meghatározhatók.

6.1. A vízszintes és függőleges egyenes szakaszban mozgó anyagdugó mozgásegyenlete

Az anyagdugó matematikai-fizikai modelljének felírásánál elhanyagolásokkal élünk. Ez azt jelenti, hogy a levezetendő egyenleteinket csak közelítő jellegűeknek kell tekinteni. A közelítés megengedhető mértékét a kísérlet hivatott igazolni. A kísérleti eredmények birtokában kell döntenie a közelítés mértékéről és kell esetlegesen újra fogalmazni azokat.

A modell felírásánál az alábbi megkötéseket tesszük:

- A szállítóvezetékben egyidejűleg csak egyetlen anyagdugó tartózkodik
- Az együttmozgó gömbszemcséből álló anyagdugó mozgása közben az „ L ” hosszmeretét nem változtatja meg. Ez azt is jelenti, hogy az „ ε ” hézagterefogat hányad állandó
- A szállító gáz csőfal menti súrlódását a csővezetékben nem vesszük figyelembe. Ez azt is jelenti, hogy a csővezetékben mozgó anyagdugó (lásd a 6.2. ábrában ②-vel jelölt homlokl felületén) a nyomást légkörinek tekintjük



6.2. ábra. Vízszintes egyenes szakaszban mozgó anyagdugó. Jelölések a dugó ① hátlapján, a ② homlokl felületén és az „ x ”-el jelölt keresztmetszetében

- A dugón átáramló gáz tömegének felgyorsításához szükséges nyomáscsökkenéstől eltekintünk
- Az anyagra ható súrlódási erőt a dugó súlyával arányosnak tekintjük mind a vízszintes, mind pedig a függőleges csőszakaszban
- A dugón átáramló gáz sűrűségének változását izotermikusnak tekintjük
- Az anyagdugó „ k ”-val jelölt ellenállástényezőjét állandónak tekintjük, azaz a „ k ” tényező Reynolds-számtól való függésétől eltekintünk
- A dugó mozgása során a csővezeték teljes keresztmetszetét kitölti, a dugó homlokl felülete és hátlapja a mozgás irányára merőleges marad

6.1.1. A légáteresztő dugóra ható előrehajtó erő

A szállító gázáram a légáteresztő dugó hézagain átáramolva nyomáscsökkenést szenved. E nyomáscsökkenés – amely a dugó eleje és vége között keletkezik – képezi azt az erőt, amely a dugót előre mozgatja.

A 6.2. ábrában látható dugó tetszőleges helyén kimetszett elemi csőszakaszra Welschof [7] gondolatmenetét követve az alábbi egyenlet írható fel:

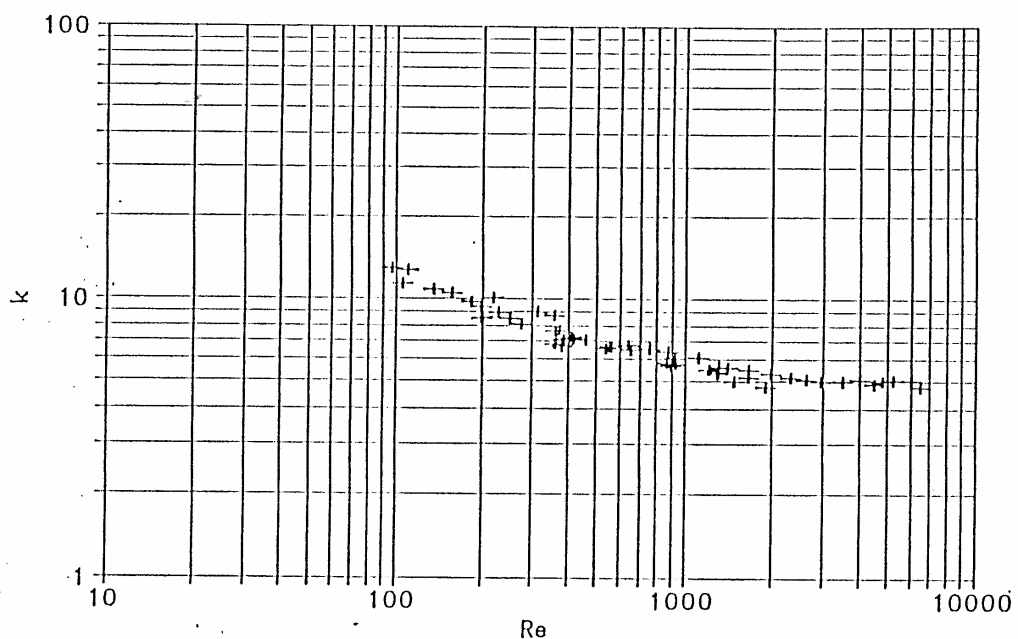
$$p_x - (p_x - dp_x) = k \frac{dx}{d_{hs}} \frac{\rho_{gx}}{2} w_x^2 \quad (6.1)$$

Az egyenletben „ w_x ” a dugó „ x ” helyén kimetszett elemi térfogat szabad keresztmetszetében a relatív sebességet jelöli. A 6.1. összefüggésben a hidraulikai átmérő Barth [94] szerint a következő összefüggéssel adott:

$$d_{hs} = 4 \frac{V - V_{ad}}{A_{ad}} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} d \quad (6.2)$$

Az összefüggésben a vizsgált „ V ” térfogatban „ V_{ad} ” az anyagdugó által elfoglalt térfogat és „ A_{ad} ” az anyagdugó felülete és „ d ” a gömbszemcse átmérője.

A „ k ” ellenállástényező kísérlettel határozható meg és ábrázolható a Reynolds-szám függvényében. A 6.3. ábrában „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyóréteg ellenállástényezőjének változását láthatjuk a Reynolds-szám függvényében.



6.3. ábra. „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyóréteg ellenállástényezője a Reynolds-szám függvényében

A Reynolds-számot az alábbi összefüggéssel definiáljuk:

$$Re = \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{(v_{g2} - v_a) d}{\nu_g} \quad (6.3)$$

ahol „ ν_g ” a szállító gáz (levegő) kinematikai viszkozitása.

Az anyagdugón átfolyó gáz állapotváltozását – mint már definiáltuk – izotermikusnak tételezzük fel. Írható, hogy:

$$\rho_{gx} = \rho_{g1} \frac{p_x}{p_1} = \rho_{g2} \frac{p_x}{p_2} = \rho_{go} \frac{p_x}{p_o} \quad (6.4)$$

A szállító gáz tömegárama a dugó tetszőleges „x” helyén a relatív sebesség szabad keresztmetszetre vonatkozó

$$w_x = v_{gx} - v_a \quad (6.5)$$

Jelölést felhasználva az alábbiak szerint írható:

$$\dot{m}_g = \varepsilon A \rho_{gx} w_x = \varepsilon A \rho_{gx} (v_{gx} - v_a) \quad (6.6)$$

Ez a tömegáram természetesen ugyanakkora, mint a dugó homlokfelületén be- illetve a hátlapján kilépő tömegáram, azaz

$$\dot{m}_g = \varepsilon A \rho_{g1} (v_{g1} - v_a) = \varepsilon A \rho_{g2} (v_{g2} - v_a) \quad (6.7)$$

A fentiek figyelembe vételével a 6.1. egyenlet az alábbi formát ölti:

$$p_x dp_x = \frac{k}{d_{hs}} \frac{\rho_{g2} p_2}{2} (v_{g2} - v_a)^2 dx \quad (6.8)$$

Integrálás után az alábbi egyenletet nyerjük:

$$-\frac{p_x^2}{2} = \frac{k}{d_{hs}} \frac{\rho_{g2} p_2}{2} (v_{g2} - v_a)^2 x + C \quad (6.9)$$

Az $x=L$, $p_x=p_2$ peremfeltételt figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$p_2^2 - p_x^2 = \frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 (v_{g2} - v_a)^2 (x - L) \quad (6.10)$$

A 6.10. egyenlet leírja a dugón belül a nyomás változását az „x” függvényében. Az $x=0$ helyettesítéssel a dugó eleje és vége közötti $\Delta p = p_1 - p_2$ nyomáscsökkenés határozható meg, azaz:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 (v_{g2} - v_a)^2 L \quad (6.11)$$

A dugón átáramló gáz $\Delta p = p_1 - p_2$ nyomáscsökkenése ezek után a $p_1^2 - p_2^2 = \Delta p (\Delta p + 2p_2)$ figyelembe vételével adódó másodfokú egyenlet megoldása után az alábbi:

$$\Delta p = -p_2 + \left[p_2^2 + \frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 (v_{g2} - v_a)^2 L \right]^{1/2} \quad (6.12)$$

Az egyenlet dimenziótlan formája pedig:

$$\Delta p^* = -p_2^* + \left[p_2^{*2} + \frac{k}{d_{hs}^*} \pi_1 \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*)^2 \right]^{1/2} \quad (6.13)$$

ahol az összevont dimenziótlan állandó:
$$\pi_1 = \frac{\rho_{g2} v_o^2}{p_2} = \frac{\rho_{go} 2gL}{p_o}$$

6.1.2. A mozgó dugó kinematikai jellemzői

Az egyenes csőben mozgó dugóra ható eredő erő az „ $A\Delta p$ ” előrehajtó erőből, a „ ρ_h ” halmazsűrűséggel számítható „ $AL\rho_h g\mu$ ” súrlódási erőből illetve – függőleges cső esetén – az „ $AL\rho_h g$ ” súlyerőből tevődik össze. Függőleges csőszakasz esetén a mozgásegyenlet ezek után:

$$AL\rho_h \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - AL\rho_h g(1 + \mu) \quad (6.14)$$

Vízszintes csőszakasznál pedig:

$$AL\rho_h \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - AL\rho_h g\mu \quad (6.15)$$

Függőleges csőnél a 6.14. egyenlet a dimenziótlanítás és a változók szétválasztása után a következő alakban írható:

$$dt^* = \frac{2}{\pi_2 \Delta p^* - (1 + \mu)} dv_a^* \quad (6.16)$$

ahol az összevont dimenziótlan állandó:
$$\pi_2 = \frac{p_o}{\rho_h gL}$$

A 6.16. egyenlet – figyelembe véve a 6.13. egyenletet – integrálása után az integrálási állandót a $t^* = 0$; $v_a^* = 0$ feltételből meghatározva az alábbi egyenletet nyerjük:

$$t^* = -K_o [K_1 \ln(K_2 T_2) + \ln(A_1)] \quad (6.17)$$

A 6.17 összefüggésben az összevont független változót az „ A_1 ” és a „ T_2 ” kifejezés tartalmazza:

$$\begin{aligned} A_o &= \alpha_3^{1/2} v_{g2}^* + (\alpha_3 v_{g2}^{*2} + 1)^{1/2} && - \text{dimenziótlan állandó} \\ A_1 &= \alpha_3^{1/2} (v_{g2}^* - v_a^*) + \left[\alpha_3 (v_{g2}^* - v_a^*)^2 + 1 \right]^{1/2} && - \text{redukált dimenziótlan változó} \\ K_o &= \frac{2}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_3}} && - \text{dimenziótlan állandó} \\ K_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_o} && - \text{dimenziótlan állandó} \\ K_2 &= \frac{T_1}{A_o^{1/K_1}} && - \text{dimenziótlan állandó} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\beta(A_o + 1) - \alpha_o(A_o - 1)}{\beta(A_o + 1) + \alpha_o(A_o - 1)} & - \text{dimenziótlan állandó} \\
T_2 &= \frac{\beta(A_1 + 1) + \alpha_o(A_1 - 1)}{\beta(A_1 + 1) - \alpha_o(A_1 - 1)} & - \text{redukált dimenziótlan változó} \\
\alpha_o &= (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^{1/2} & - \text{dimenziótlan állandó} \\
\alpha_1 &= \alpha_2 + (1 + \mu) & - \text{dimenziótlan állandó} \\
\alpha_2 &= p_2^* \pi_2 = \frac{p_2}{p_o} \pi_2 & - \text{dimenziótlan állandó} \\
\alpha_3 &= \frac{k \pi_1}{d_{hs}^*} = \frac{k \pi_1}{d_{hs} / L} & - \text{dimenziótlan állandó} \\
\beta &= \alpha_2 - \alpha_1 & - \text{dimenziótlan állandó}
\end{aligned}$$

Az anyagdugó gyorsulásához a 6.17. egyenlet deriválása után jutunk, ami az alábbi kifejezéssel adható meg:

$$\frac{dt^*}{dv_a^*} = -K_o \left(\frac{K_1 T_2'}{T_2} + \frac{A_1'}{A_1} \right) \quad (6.18)$$

ahol:

$$\begin{aligned}
A_1' &= -\alpha_3^{1/2} - \frac{\alpha_3(v_{g2}^* - v_a^*)}{\left[\alpha_3(v_{g2}^* - v_a^*)^2 + 1 \right]^{1/2}} & - \text{redukált dimenziótlan változó} \\
T_2' &= \frac{4\alpha_o \beta A_1'}{[\beta(A_1 + 1) - \alpha_o(A_1 - 1)]^2} & - \text{redukált dimenziótlan változó}
\end{aligned}$$

A dugó dimenziótlan gyorsulása, az $a_a^* = f(v_a^*)$ függvénykapcsolat ezek után:

$$a_a^* = \frac{a_a}{2g} = -\frac{A_1 T_2}{K_o (A_1 K_1 T_2' + A_1 T_2)} \quad (6.19)$$

A 6.19. összefüggésben a független változót az „ A_1 ”, „ A_1' ”, valamint a „ T_2 ”, „ T_2' ” kifejezések tartalmazzák. A dugó „ $v_{a\infty}^*$ ” dimenziótlan határsebessége a $t^* \rightarrow \infty$ határátmenettel határozható meg a 6.17. egyenletből, vagy a $\frac{dv_a}{dt} = 0$ feltételt figyelembe véve a 6.14. ill. 6.15. egyenletből. A 6.14. egyenlet dimenziótlanított formájába ez utóbbi feltételt helyettesítve a függőleges csőben mozgó anyagdugó esetében a

$$\pi_2 \Delta p^* = 1 + \mu \quad (6.20)$$

kifejezéshez jutunk, illetve vízszintes csőnél pedig a 6.15. egyenlet dimenziótlanított formájába történő helyettesítés után a

$$\pi_2 \Delta p^* = \mu \quad (6.21)$$

kifejezést kapjuk (ahol $\pi_2 = p_o / \rho_h g L$). A 6.13. egyenletet a $v_a^* = v_{a\infty}^*$ jelölés figyelembe vételével a 6.20. egyenletbe helyettesítve a dimenziótlan határsebesség függőleges csőnél:

$$v_{a\infty}^* = v_{g2}^* - \left[\frac{d_{hs}^* (1 + \mu)}{\pi_1 \pi_2 k p_2^* \rho_{g2}^*} \left(2 p_2^* + \frac{1 + \mu}{\pi_2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.22)$$

Vízszintes cső esetében pedig a 6.21. egyenletet felhasználva:

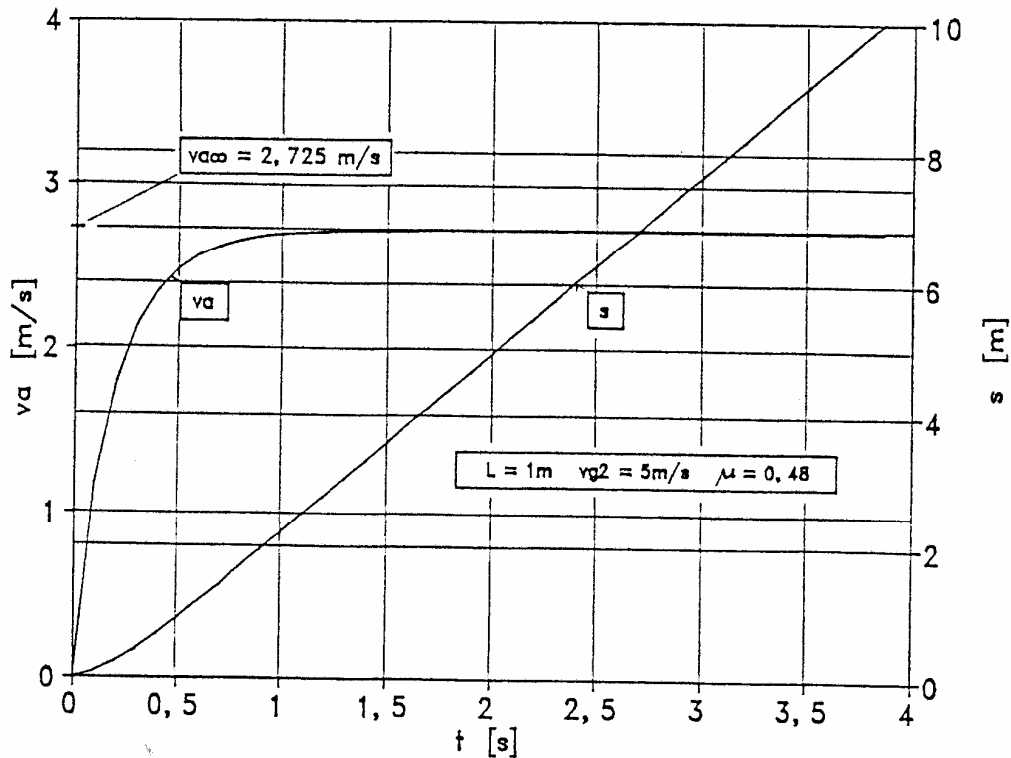
$$v_{a\infty}^* = v_{g2}^* - \left[\frac{d_{hs}^* \mu}{\pi_1 \pi_2 k p_2^* \rho_{g2}^*} \left(2 p_2^* + \frac{\mu}{\pi_2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.23)$$

A dugó által az egyenes csőszakaszban megtett dimenziótlan út a 6.18. egyenlet felhasználásával:

$$s^* = \frac{s}{L} = \int v_a^* dt = - \int K_o \left(\frac{K_1 T_2'}{T_2} + \frac{A_1'}{A_1} \right) v_a^* dv_a^* \quad (6.24)$$

A 6.24. egyenlet jobboldalán álló kifejezés nem integrálható, ezért megoldásához közelítő módszert használtunk.

6.1.3. Számítással meghatározott diagramok



6.4. ábra. A vízszintes egyenes csőben mozgó anyagdugó kinematikai jellemzői

A levezetett összefüggések segítségével meghatároztuk az „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugó kinematikai jellemzőit. A számításhoz felhasznált anyagjellemzők a következők:

$$k = 5; \quad \varepsilon = 0.514 \quad d = 4 \text{ mm} \quad \rho_h = 1128 \text{ kg/m}^3$$

A 6.4. ábrában a $v_a=0$ kezdősebességgel induló, vízszintes csőben mozgó anyagdugó sebessége és az általa megtett út látható az idő függvényében ábrázolva. Az ábrába az anyagdugó határsebességét is berajzoltuk.

A határsebesség a 6.23. egyenletből határozható meg. Az egyenletben szereplő állandók mintapéldabeli értékei az

$$L = 1 \text{ m}; \quad \rho_{go} = 1.188 \text{ kg/m}^3; \quad \mu = 0.48; \quad p_o = 10^5 \text{ Pa}; \quad v_{g2} = 5 \text{ m/s}$$

további adatokkal az alábbiak:

$$\pi_1 = \frac{\rho_{go} v_o^2}{p_o} = \frac{\rho_{go} 2gL}{p_o} = \frac{1.188 * 2 * 9.81 * 1}{10^5} = 2.33 * 10^{-4}$$

$$\pi_2 = \frac{p_o}{\rho_h g L} = \frac{10^5}{1128 * 9.81 * 1} = 9.04$$

$$d_{hs} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} d = \frac{2}{3} * \frac{0.514}{1-0.514} * 0.004 = 0.00282 \text{ m}$$

$$d_{hs}^* = \frac{d_{hs}}{L} = \frac{0.00282}{1} = 0.00282$$

$$v_{g2}^* = \frac{v_{g2}}{\sqrt{2gL}} = \frac{5}{\sqrt{2 * 9.81 * 1}} = 1.129$$

Ezekkel az adatokkal a határsebesség értéke:

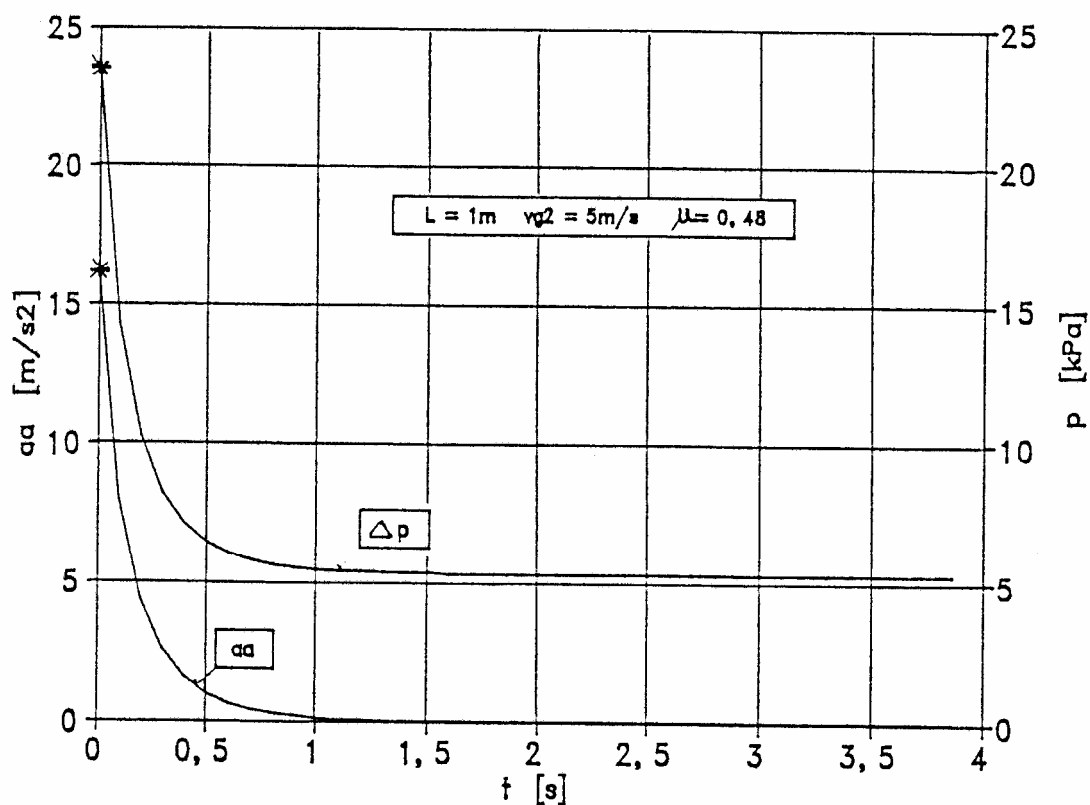
$$v_{a\infty}^* = v_{g2}^* - \left[\frac{d_{hs}^* \mu}{\pi_1 \pi_2 k p_2^* \rho_{g2}^*} \left(2p_2^* + \frac{\mu}{\pi_2} \right) \right]^{1/2} = 1.129 - \left[\frac{0.00282 * 0.48}{2.33 * 10^{-4} * 9.04 * 5 * 1 * 1} * \left(2 * 1 + \frac{0.48}{9.04} \right) \right]^{1/2} =$$

$$= 0.6153$$

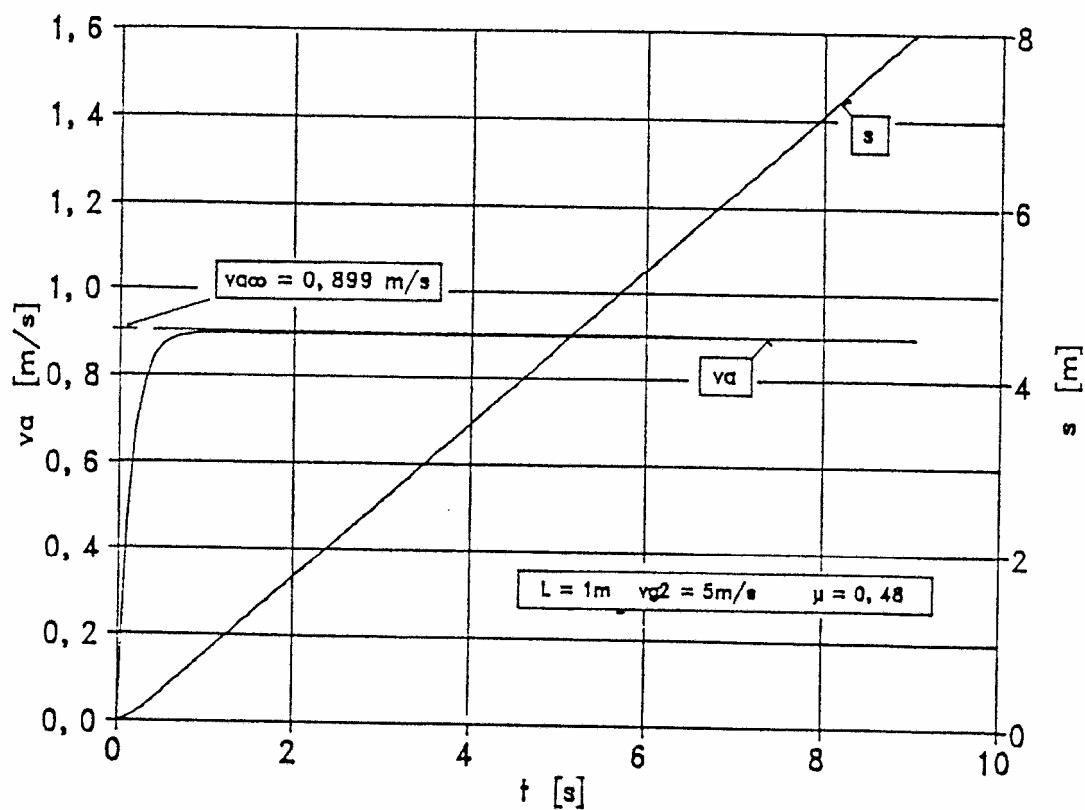
$$v_{a\infty} = \sqrt{2gL} v_{a\infty}^* = \sqrt{2 * 9.81 * 1} * 0.6153 = 2.725 \text{ m/s}$$

A 6.5. ábrában az anyagdugó gyorsulását, valamint az anyagdugón létrejövő nyomásesést láthatjuk az idő függvényében.

A 6.6. ábrában a $v_a = 0$ kezdősebességgel induló, függőleges csőben mozgó anyagdugó sebességét és az általa megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.



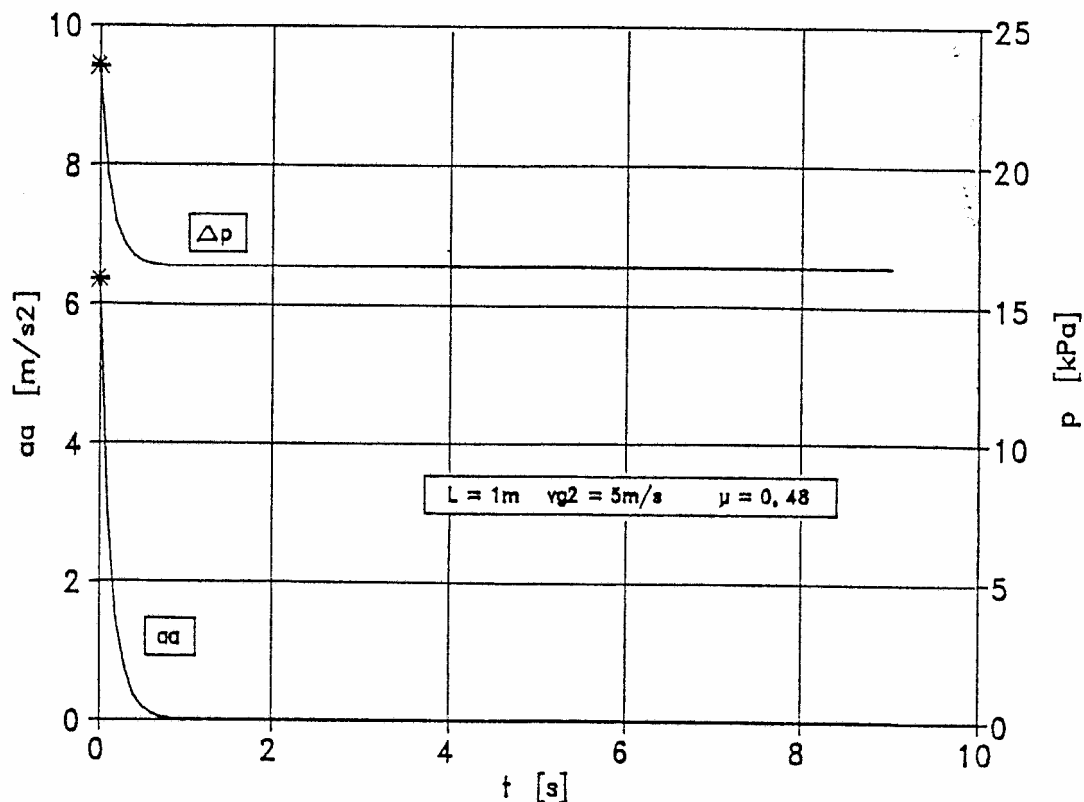
6.5. ábra. A vízszintes egyenes csőben mozgó anyagdugó kinematikai jellemzői



6.6. ábra. A függőleges egyenes csőben mozgó anyagdugó kinematikai jellemzői

A függőleges csőbeli határsebesség értéke a 6.20. egyenletből határozható meg. A határsebesség értéke – a számítást nem részletezve - $v_{a\infty} = 0.899$ m/s.

A 6.7. ábra a függőleges csőben mozgó anyagdugó gyorsulását, valamint az anyagdugón létrejövő nyomásesést mutatja ugyancsak az idő függvényében.



6.7. ábra. A függőleges egyenes csőben mozgó anyagdugó kinematikai jellemzői

A szállítócsőben a $v_a = 0$ sebességről induló anyagdugó $t = 0$ időhöz tartozó kezdeti nagy gyorsulása és nyomásesése abból adódik, hogy az anyagdugóra ható előrehajtó erő akkor a legnagyobb, amikor a „ w_x ” relatív sebesség a legnagyobb. Ez pedig akkor van, amikor $v_a = 0$ -val.

6.2. A vízszintesből függőlegesbe vezető 90°-os ívben mozgó anyagdugó mozgásjellemzői

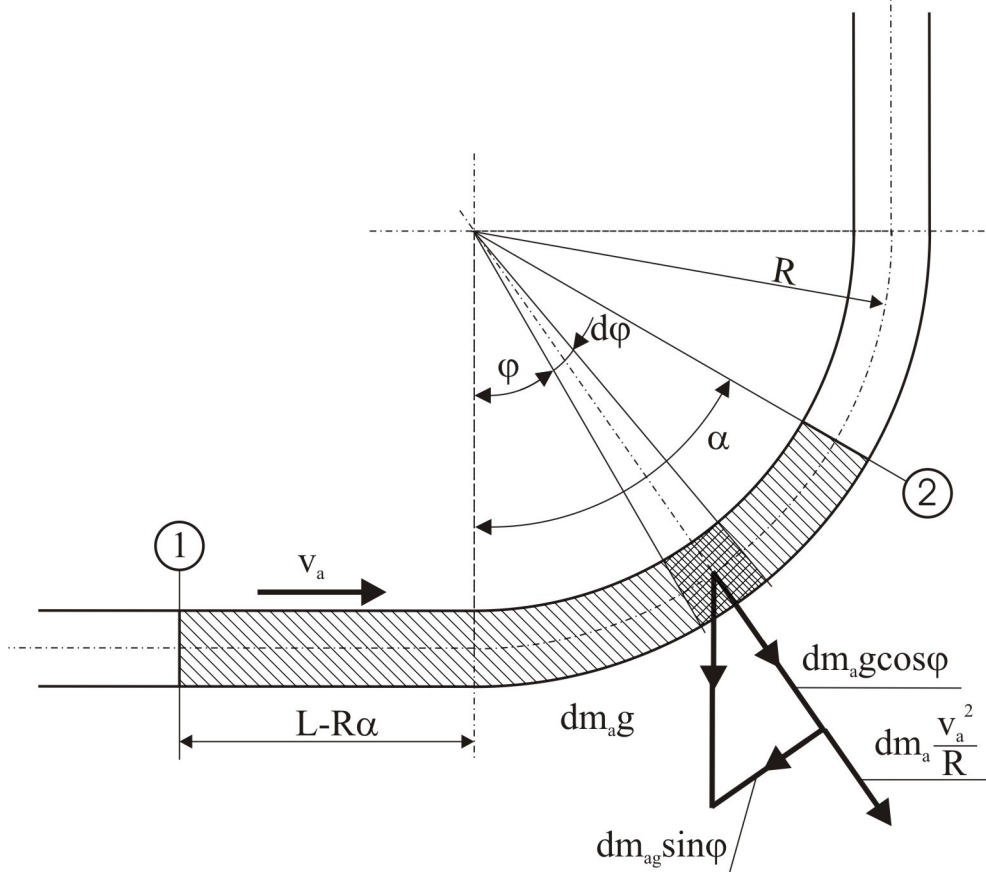
6.2.1. Az anyagdugó hossza: $L > R\pi/2$

Az anyagdugó mozgásegyenletének felírásánál a dugó ívben elfoglalt helyzetétől függően három esetet kell megkülönböztetni:

- Az anyagdugó tölti az ívet
- Az anyagdugó mozog az általa kitöltött ívben
- Az ív ürül

Az anyagdugó mozgását mindhárom esetben más egyenlet írja le, ezért ezeket részletesen az alábbiakban fogjuk tárgyalni.

a. Az anyagdugó tölti az ívet



6.8. ábra. Vízszintesből függőlegesbe vezető függőleges síkú ív töltődése. A részlegesen megtöltött ív „ φ ” szöghelyzetében kimetszett elemi anyagdugóra ható erők.

A dugóhossz: $L > R\pi/2$

Ez a folyamat addig tart, míg az anyagdugó ②-vel jelölt homlokfelülete eléri az $\alpha=90^\circ$ -os középponti szöget. A 6.8. ábrában bemutatott vázlatban az anyagdugó ②-vel jelölt homlokfelülete az „ α ”-val jellemzett szöghelyzetig jutott be az ívbe. Az ívben mozgó dugórészre ható súrlódási erő meghatározásához tetszőleges „ φ ” szöghelyzetben lévő elemi tömegre ható erőket figyelembe véve az elemi súrlódó erőre az alábbi egyenlet írható fel:

$$dF_{s1} = \mu dm_a \left(g \cos \varphi + \frac{v_a^2}{R} \right) \quad (6.25)$$

Az egyenlet felírásánál a kimetszett elemi anyagdugóra az ív menti nyomáseloszlásból származó erőhatást, mint másodrendűen kicsiny tagot elhanyagoltuk.

Az elemi tömeg az alábbi:

$$dm_a = R d\varphi A \rho_h \quad (6.26)$$

Ezzel a 6.25. egyenlet a

$$dF_{s1} = \mu R d\varphi A \rho_h \left(g \cos \varphi + \frac{v_a^2}{R} \right) \quad (6.27)$$

alakot ölti.

Az egyenletet $\varphi=0$ és $\varphi=\alpha$ határok között integrálva az ívben lévő anyagdugóra ható, a dugó mentén egyenletesen eloszló súrlódási erő számítható az

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h g \sin \alpha + \mu A \rho_h v_a^2 \alpha \quad (6.28)$$

egyenletből.

A vízszintes egyenes szakaszban mozgó anyagdugóra ható súrlódási erő:

$$F_{s1} = \mu(L - R\alpha)A\rho_h g \quad (6.29)$$

A két súrlódási erő összege ezek után a következőként írható:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = \mu A \rho_h [Rg \sin \alpha + v_a^2 \alpha + (L - R\alpha)g] \quad (6.30)$$

Az ívben mozgó anyagdugó elemi ellenőrző térfogatára ható erő pálya menti komponense:

$$dF_p = dm_a g \sin \varphi = R A \rho_h g \sin \varphi d\varphi \quad (6.31)$$

A határokat figyelembe véve a 6.31. egyenlet integrálása után kapjuk, hogy:

$$F_p = R A \rho_h g (1 - \cos \alpha) \quad (6.32)$$

A dugó mozgását leíró egyenlet ezek után a következő formában írható:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = F_e = A \Delta p - (F_s + F_p) \quad (6.33)$$

Az egyenlet baloldala átalakítható. Írható, hogy:

$$v_a = \frac{d(R\alpha)}{dt} = R \frac{d\alpha}{dt} \quad (6.34)$$

Ezt figyelembe véve:

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{d}{dt} \left(R \frac{d\alpha}{dt} \right) = R \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \quad (6.35)$$

A 6.12., 6.30. és 6.32. egyenletekkel átalakítás és rendezés után az ív töltődésének szakaszát leíró egyenlet a következő:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = C_1 + \frac{1}{L \rho_h R} \left[\frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 \left(v_{g2} - R \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 L + p_2^2 \right]^{1/2} - \frac{\mu g}{L} \sin \alpha + \frac{g}{L} \cos \alpha - \alpha \left[\frac{\mu R}{L} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \frac{\mu g}{L} \right] \quad (6.36)$$

Az összefüggésben a „ C_I ” összevont állandó értéke:

$$C_I = -\frac{p_2}{L\rho_h R} - \frac{\mu g}{R} - \frac{g}{L}$$

A 6.36. egyenlet a dimenziótlanítás után az alábbi formában írható:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^{*2}} = C_{11} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* \left(v_{g2}^* - R^* \frac{d\alpha}{dt^*} \right)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \alpha \left[\mu R^* \left(\frac{d\alpha}{dt^*} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \right] \quad (6.37)$$

Az összefüggésben a „ C_{11} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

$$C_{11} = -\pi_o \pi_2 p_2^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{R^*} + 1 \right)$$

A 6.37. közönséges másodrendű differenciálegyenlet ekvivalens az alábbi két elsőrendű differenciálegyenlettel:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^{*'} = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{11} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* \left(v_{g2}^* - R^* z^* \right)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \alpha \left[\mu R^* z^{*2} - \frac{\mu}{2} \right] \quad (6.38)$$

A 6.38. egyenletek Runge-Kutta módszerrel megoldhatók. A kezdeti feltételek az ív előtt csatlakozó egyenes csőszakasz csatlakozási pontjában a $t^* = t_a^*$ és az ív belépésénél, azaz $\alpha=0$ helyen a dimenziótlan anyagsebességet „ $\left[v_a^* \right]_a$ ”-val jelölve a következők:

$$\begin{aligned} t^* = t_a^* \text{-nál} \quad \alpha(t_a^*) &= 0 \\ t^* = t_a^* \text{-nál} \quad z^*(t_a^*) &= \frac{\left[v_a^* \right]_a}{R^*} \end{aligned} \quad (6.39)$$

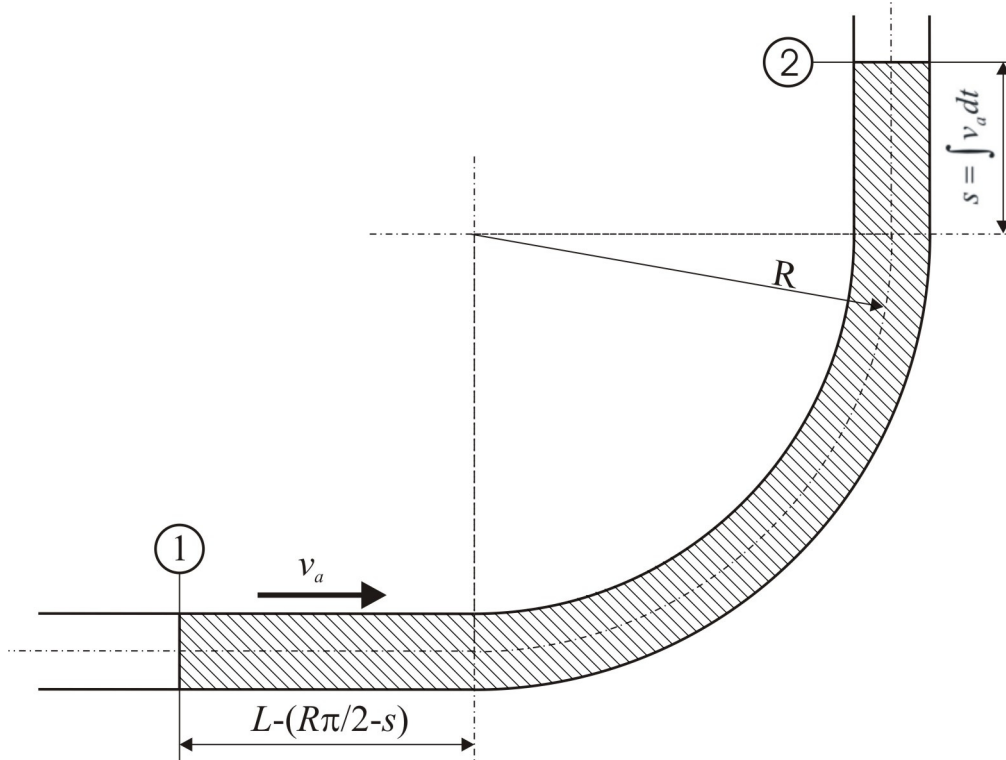
b. Mozgás az ívben

Ez a mozgás addig tart, míg az anyagdugó ①-el jelölt hátlapja el nem éri az ív belépő keresztmetszetét. A 6.9. ábrában bemutatott vázlatnak megfelelően a dugó ②-vel jelölt homlokfelülete a függőleges egyenes csatlakozó szakaszban „s” utat tett meg. Az ívben a súrlódási erő értéke számítható a 6.28. egyenletből az $\alpha=\pi/2$ helyettesítéssel. A súrlódási erő nagysága az ívben ezek után:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h g + \mu A \rho_h \frac{\pi}{2} v_a^2 \quad (6.40)$$

A vízszintes és függőleges egyenes szakaszokban mozgó anyagdugóra ható súrlódási erő:

$$F_{s2} = \left(L - R \frac{\pi}{2} \right) A \rho_h g \mu \quad (6.41)$$



6.9. ábra. Mozcás a függőleges síkú, vízszintesből függőlegesbe vezető ívben. Ez addig tart míg a dugó ① jelű hátlapja az ív belépő keresztmetszetéhez nem ér.

A dugóhossz: $L > R\pi/2$

Az ívben mozgó anyagdugó pályamenti komponense a 6.32. egyenletből ugyancsak az $\alpha = \pi/2$ helyettesítéssel határozható meg. Értéke:

$$F_{p1} = RA\rho_h g \quad (6.42)$$

A függőleges szakaszban a pályamenti komponens értéke:

$$F_{p2} = A\rho_h g s = A\rho_h g \int v_a dt \quad (6.43)$$

Az anyagdugó mozgását leíró egyenlet ezek után:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - (F_{s1} + F_{s2} + F_{p1} + F_{p2}) \quad (6.44)$$

A 6.44. egyenlet a 6.12., 6.40., 6.41., 6.42. és a 6.43. egyenleteket figyelembe véve átalakítás és rendezés után az alábbi módon írható:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = C_2 + \frac{1}{\rho_h L} \left[\frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 (v_{g2} - v_a)^2 L + p_2^2 \right]^{1/2} - \frac{\mu \pi}{2L} v_a^2 - \frac{g}{L} \int v_a dt - \alpha \left[\frac{\mu R}{L} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \frac{\mu g}{L} \right] \quad (6.45)$$

$$\text{ahol } C_2 = -\frac{p_2}{\rho_h L} - \mu g \left(1 + \frac{R}{L}\right) - g \frac{R}{L} \left(1 - \frac{\mu \pi}{2}\right)$$

A 6.45. egyenletet deriválva kapjuk, hogy:

$$\frac{d^2 v_a}{dt^2} = -\frac{k}{\rho_h d_{hs}} \frac{\rho_{g2} p_2 (v_{g2} - v_a)}{\left[\frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 (v_{g2} - v_a)^2 L + p_2^2 \right]^{1/2}} \frac{dv_a}{dt} - \frac{\mu \pi}{L} v_a \frac{dv_a}{dt} - \frac{g}{L} v_a \quad (6.46)$$

A 6.46. egyenlet dimenziótlan formája:

$$\frac{d^2 v_a^*}{dt^{*2}} = -\frac{k}{d_{hs}^*} \frac{\rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*) \frac{dv_a^*}{dt^*} \frac{\rho_{go}}{\rho_h}}{\left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2}} - \mu \pi v_a^* \frac{dv_a^*}{dt^*} - \frac{v_a^*}{2} \quad (6.47)$$

A 6.47. egyenlet ekvivalens az alábbi két elsőrendű differenciálegyenlettel:

$$\begin{aligned} a_a^* &= \frac{dv_a^*}{dt^*} \\ a_a^* &= \frac{da_a^*}{dt^*} = -\frac{\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*) a_a^* \frac{\rho_{go}}{\rho_h}}{\left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2}} - \mu \pi v_a^* a_a^* - \frac{v_a^*}{2} \end{aligned} \quad (6.48)$$

A kezdeti feltételek a 6.2.1.a. alatti részben (az anyagdugó tölti az ívet) tárgyalt 6.38. jelű differenciálegyenlet megoldásának az $\alpha = \pi/2$ szöghelyzetben (ekkor az anyagdugó ②-vel jelölt homlokfala elérte az ív végét; lásd a 6.8. ábrát) felvett értékeiből számíthatók. Ha ezeket „ $[z^*]_b$ ” illetve „ $[z^{*'}]_b$ ”-vel jelöljük, akkor:

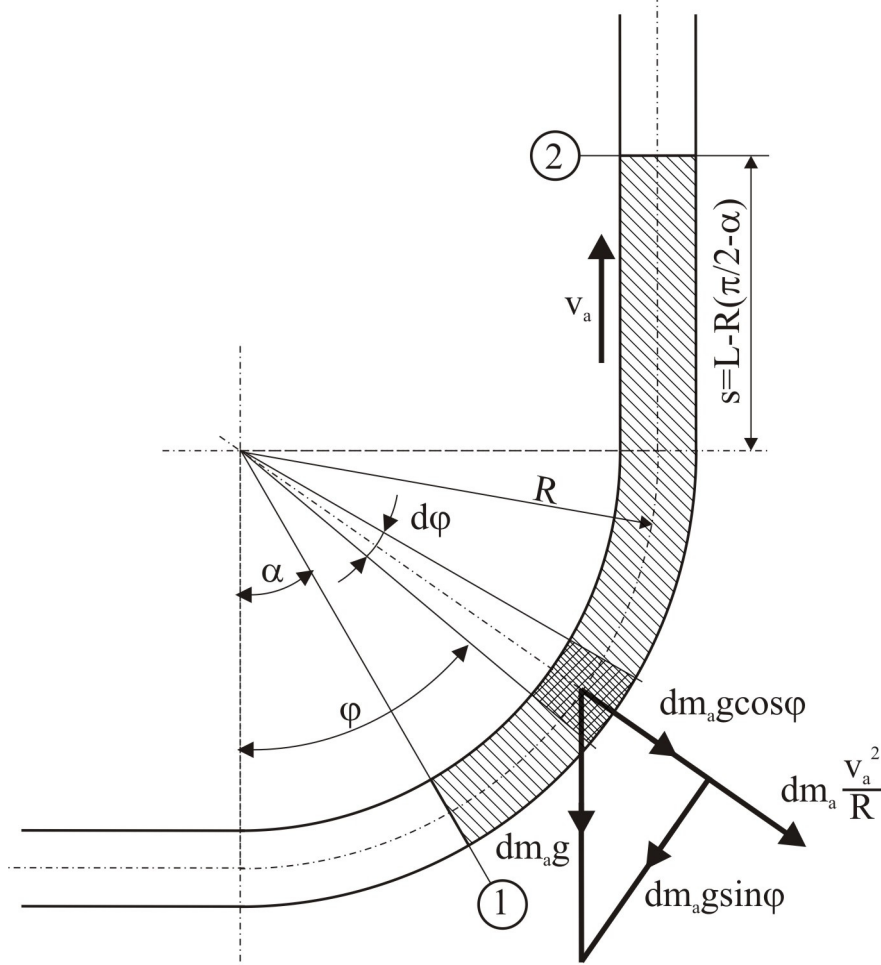
$$\begin{aligned} t^* &= t_b^* \text{-nél} & v_a^*(t_b^*) &= R^* [z^*]_b \\ t^* &= t_b^* \text{-nél} & a^*(t_b^*) &= R^* [z^{*'}]_b \end{aligned} \quad (6.49)$$

c. Az ív ürülése

A mozgásnak ez a fázisa addig tart, amíg a mozgó anyagdugó – a 6.10. ábrában látható vázlatnak megfelelően - ①-el jelölt keresztmetszete az $\alpha = \pi/2$ szöghelyzettel jellemzett helyzetet el nem éri.

A kimetszett elemi részre ható elemi súrlódási erő megegyezik a 6.27. egyenletből számítható értékkel. Az egyenletet „ α' ” és „ $\pi/2$ ” határok között integrálva az ívben mozgó dugóra ható súrlódási erő értékére kapjuk, hogy:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h g [1 - \sin \alpha] + \mu A \rho_h v_a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \alpha \right] \quad (6.50)$$



6.10. ábra. A vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív ürülése. A részlegesen kiürült ív „ φ ” szöghelyzetében kimetszett elemi anyagdugóra ható erők.
A dugóhossz: $L > R\pi/2$

A függőleges szakaszban mozgó anyagdugóra ható súrlódási erő:

$$F_{s2} = \left[L - R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] A \rho_h g \mu \quad (6.51)$$

A pályamenti komponens a 6.31. egyenletből számítható. Az integrálási határ itt is az „ α ” és „ $\pi/2$ ”. A pályamenti komponens értéke az ívben ezzel:

$$F_{p1} = R A \rho_h g \cos \alpha \quad (6.52)$$

A pályamenti komponens a függőleges szakaszban:

$$F_{p2} = \left[L - R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] A \rho_h g \quad (6.53)$$

Az anyagdugó mozgását leíró egyenlet ezek után:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - (F_{s1} + F_{s2} + F_{p1} + F_{p2}) \quad (6.54)$$

A 6.54. egyenlet a 6.12., 6.50., 6.51., 6.52. és 6.53. egyenleteket figyelembe véve átalakítás és rendezés után a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = C_3 + \frac{1}{L\rho_h R} \left[\frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2} p_2 \left(v_{g2} - R \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 L + p_2^2 \right]^{1/2} + \frac{\mu g}{L} \sin \alpha - \frac{g}{L} \cos \alpha + \\ + \alpha \left[\frac{\mu R}{L} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \frac{g}{L} (1 + \mu) \right] - \mu \frac{R\pi}{2L} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Az összefüggésben „ C_3 ” összevont állandó. Értéke:

$$C_3 = -\frac{p_2}{\rho_h R L} + \frac{g}{L} \left[\frac{\pi}{2} (1 + \mu) - \mu \right] - \frac{g}{R} (1 + \mu)$$

A 6.55. egyenlet a dimenziótlanítás után az alábbi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^{*2}} = C_{31} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* \left(v_{g2}^* - R^* \frac{d\alpha}{dt^*} \right)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \\ + \alpha \left[\mu R^* \left(\frac{d\alpha}{dt^*} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 + \mu) \right] - \frac{\mu R^* \pi}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt^*} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.56)$$

Ahol a „ C_{31} ” összevont dimenziótlan állandó:

$$C_{31} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + 1 + \mu) + \frac{1}{2} \left(\pi \frac{1 + \mu}{2} - \mu \right)$$

A 6.56. közöséges másodrendű differenciálegyenlet az alábbi két elsőrendű differenciálegyenlettel ekvivalens:

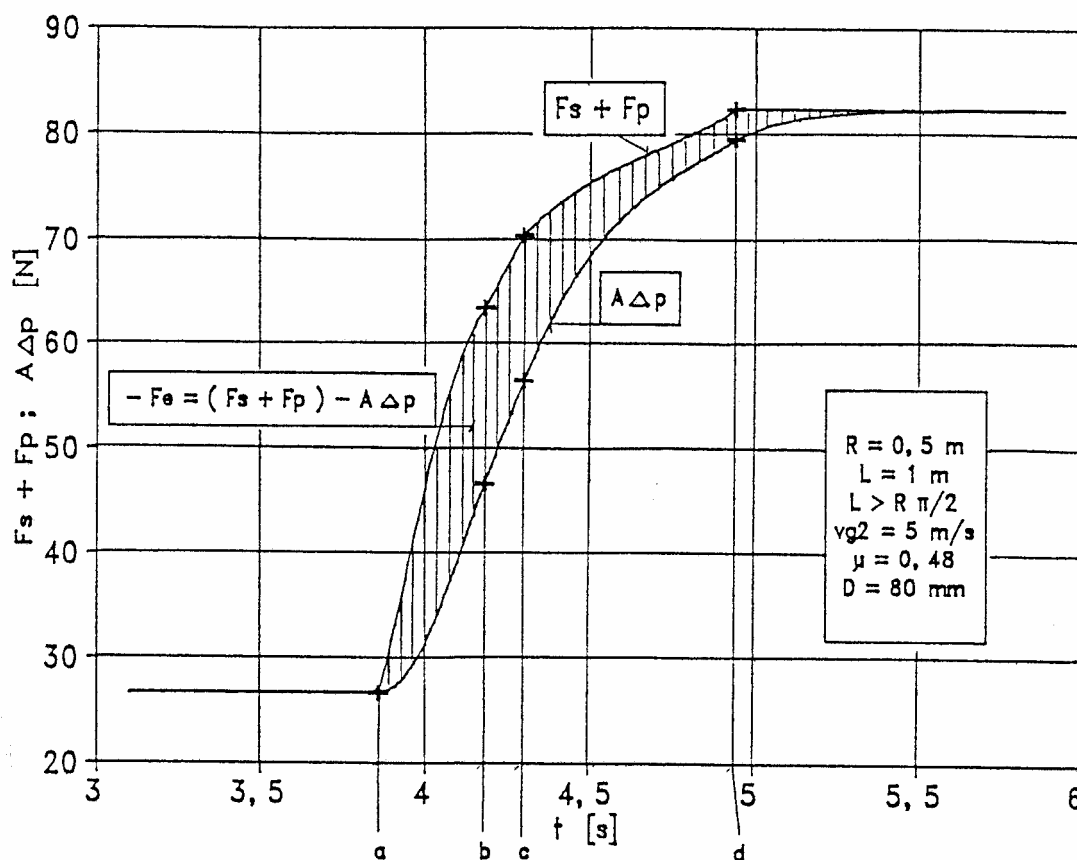
$$\begin{aligned} \alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^{*'} = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{31} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* \left(v_{g2}^* - R^* z^* \right)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \\ + \alpha \left[\mu R^* z^{*2} - \frac{1}{2} (1 + \mu) \right] - \frac{\mu R^* \pi}{2} z^{*2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

A kezdeti feltételek a 6.2.1.b. fejezet rész alatt tárgyalt mozgást leíró 6.48. egyenletrendszer azon megoldásából származnak, amikor a dugó ①-el jelölt keresztmetszete az ív elejét eléri. Ekkor $s=L-R\pi/2$, illetve $\alpha=0$ -val. Ha az ekkor meghatározott „ v_a^* ” értékét „ $[v_a^*]_c$ ”-vel jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned}
 t^* &= t_c^* \text{-nél} & \alpha(t_c^*) &= 0 \\
 t^* &= t_c^* \text{-nél} & z^*(t_c^*) &= \frac{[v_a^*]_c}{R^*}
 \end{aligned}
 \tag{6.58}$$

d. Számítással meghatározott diagramok

A levezetett egyenletek megoldásaiból kapott mozgásjellemzőket mutatunk be a 6.11.-6.17. ábrákban a 6.1.3. részben leírt anyagjellemzőjű „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugóra.

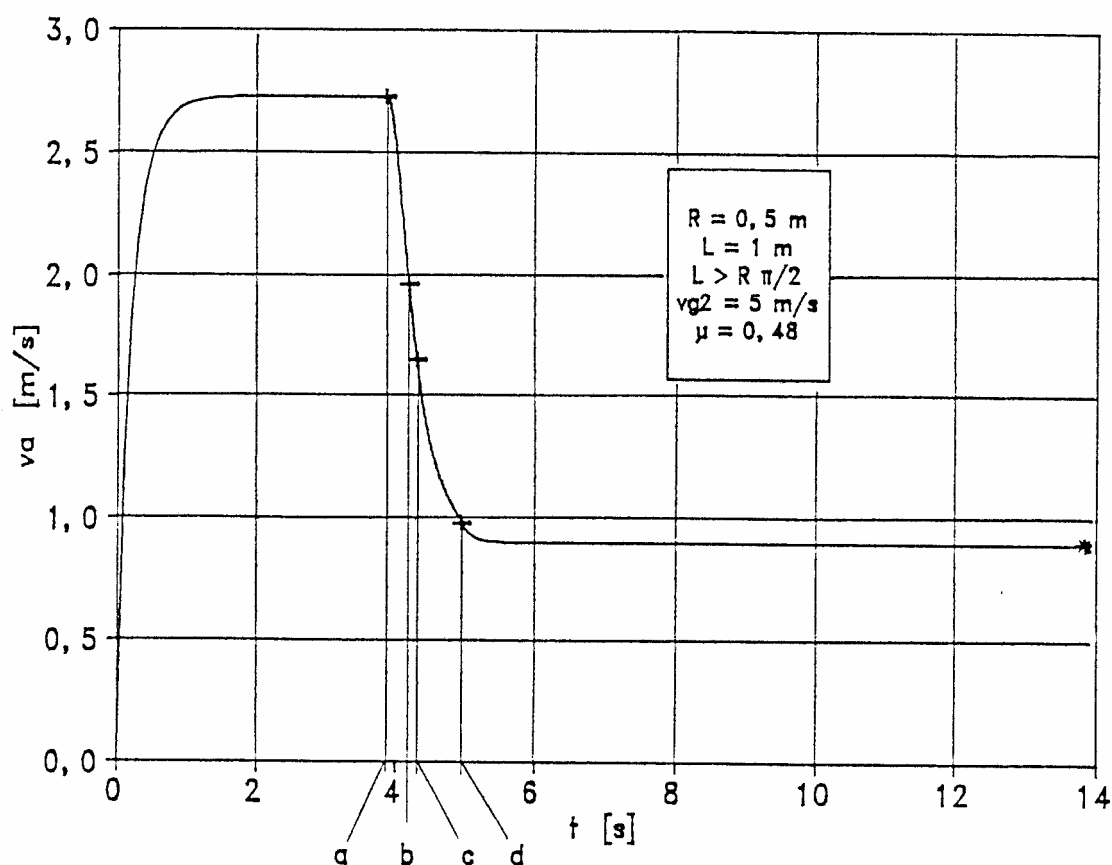


6.11. ábra. Az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása az idő függvényében. Vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív.
a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
b. A dugó homloklapja az ív végénél van
c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.11. ábrában az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása látható az idő függvényében. Anyagdugó a mintapéldában választott $l=10\text{m}$ hosszú vízszintes szakasz elejéről $v_a=0$ sebességgel indul és mire az ív elejéhez érkezik már jó közelítéssel állandó sebességgel mozog, azaz az eredő erő $F_e \approx 0$ -val. Amint elkezdődik az ív töltődése, az eredő erő negatív lesz, azaz az anyagdugó lassulva kezd mozogni. Ez azt eredményezi, hogy megnő a dugón létrejövő nyomásesés, ami az előrehajtó erő növekedését eredményezi.

Az ívből kikerült, a függőleges szakaszban mozgó anyagdugóra ható fékezőerő állandó, így az anyagdugó sebessége a függőleges szakaszban olyan értékű lesz, hogy az eredő erő $F_e \approx 0$ legyen. Ez a példaként választott adatok mellett – az ábrából kiolvashatóan – az indulástól eltelt $t \approx 5.5$ s után következik be.

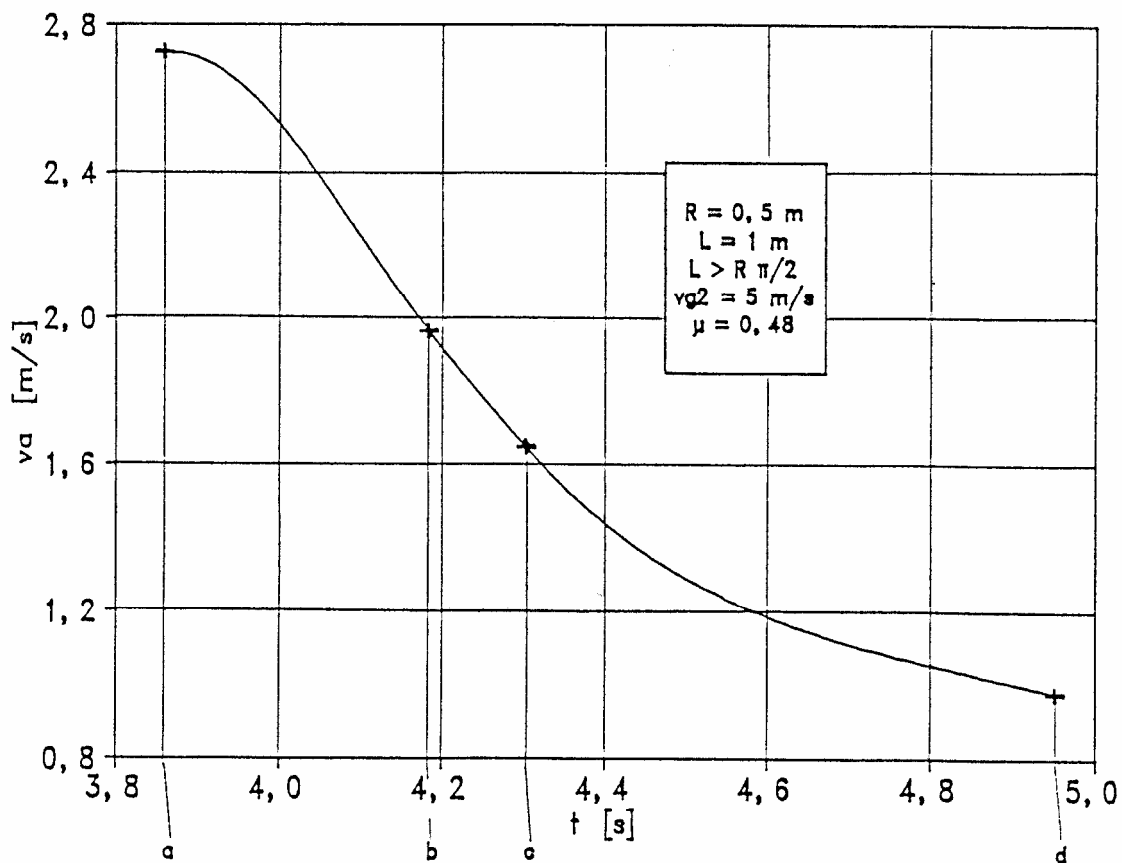
A 6.12. ábrában az anyagdugó „ v_a ” sebessége látható az idő függvényében. A $t=0$ idő az „ L ” hosszúságú anyagdugó szállítócsőbe lépéséhez rendelt időpont, amikor az $s=0$ koordinátájú helyen áll a dugó homloklapja ($v_a=0$). A dugóra ható erők következtében az anyagsebesség igen rövid idő alatt megnő a vízszintes csőben a határsebességhez közeli értékre. Az ábrából kiolvashatóan a „ v_a ” sebesség az ívbe történő belépésnél, valamint a $t \approx 5.5$ s eltelte után közel állandó.



6.12. ábra. Az anyagdugó sebessége az idő függvényében. A vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=10$ m, az ív után $l=8$ m.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

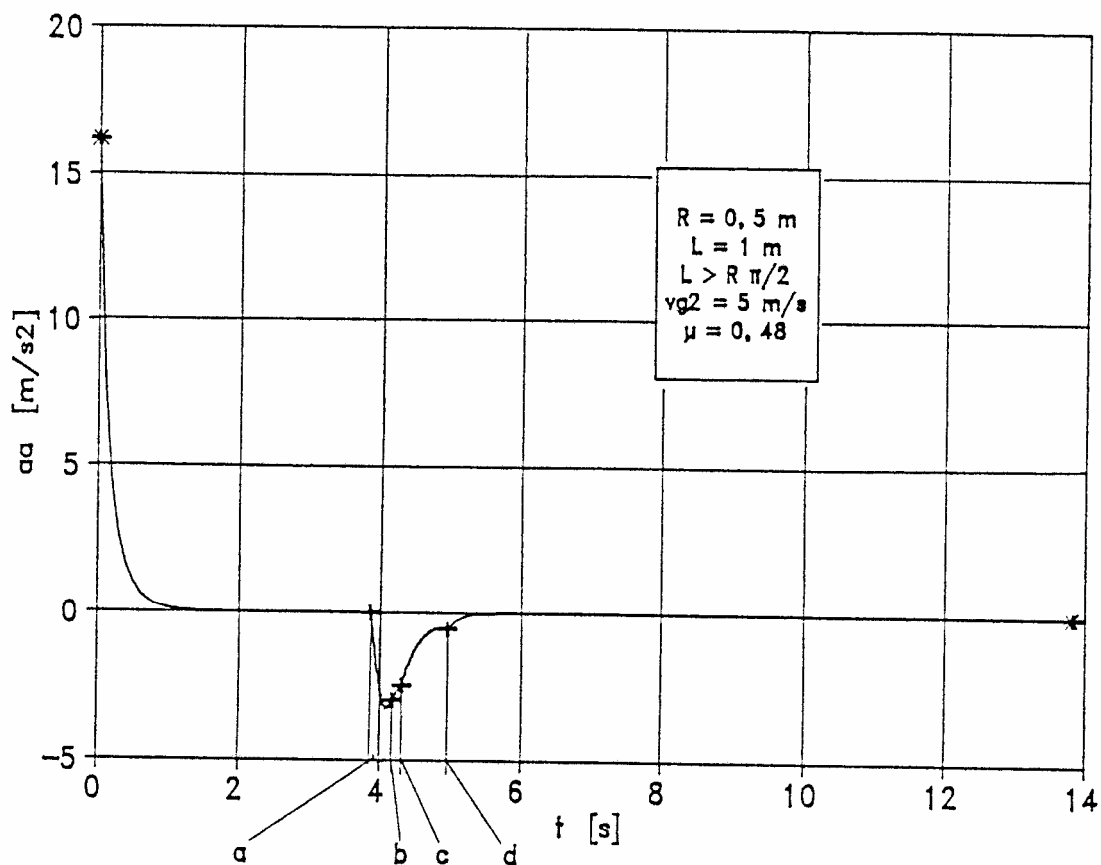
Az ívben a sebesség – a dugóra ható fékezőerő eredményeként – rohamosan csökken. A 6.13. ábrában kinagyítva mutatjuk be az ívben a $v_a=f(t)$ kapcsolatot. Az ábrából jól látható, hogy a kereszttel jelölt helyeken, ahol a mozgást leíró differenciálegyenletek az egyes tartományoknak megfelelően megváltoznak, az anyagsebesség időbeni változása folytonos, törésmentes görbe szerint alakul.



6.13. ábra. Az anyagdugó sebessége a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

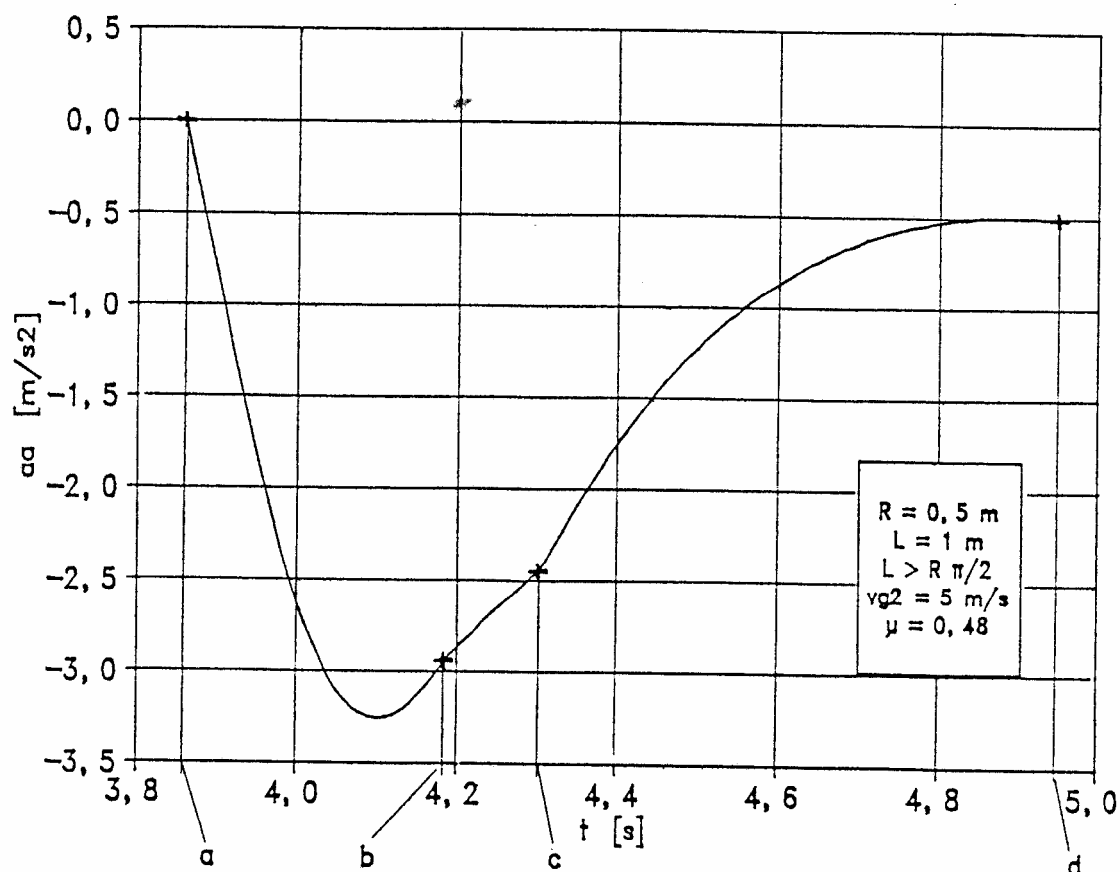
A 6.14. ábra a gyorsulást mutatja az idő függvényében. A $t=0$ időpontbeli nagy gyorsulás érték abból adódik, hogy ekkor a legnagyobb a „ w ” relatív sebesség értéke, hiszen ekkor az álló dugóra a $v_{g2}=\text{áll.}$ gázsebességből adódóan itt hat a legnagyobb előrehajtó erő.



6.14. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=10\text{m}$, az ív után $l=8\text{m}$.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.15. ábrában kinagyítva mutatjuk be az ívben mozgó anyagdugó $a_a=f(t)$ kapcsolatát. Látható, hogy az ívbe érkező anyagdugó gyorsulása közel zérus.

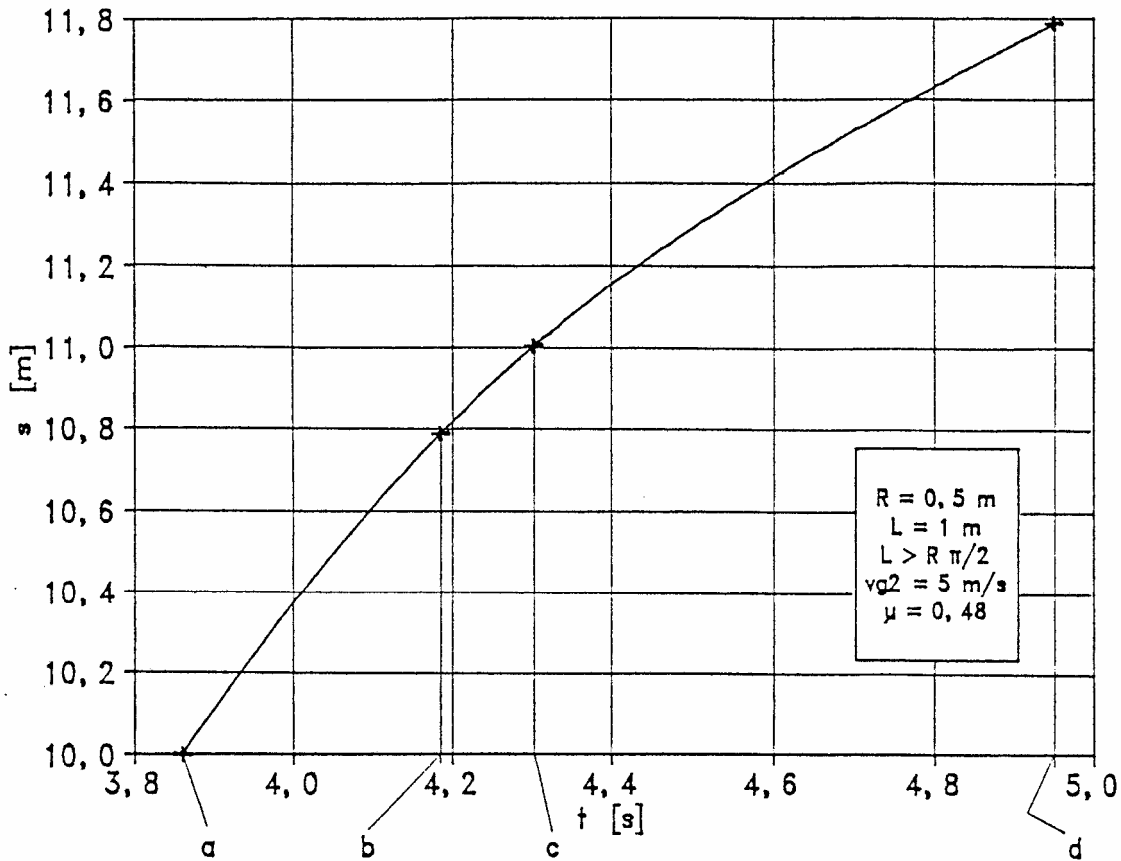


6.15. ábra. Az anyagdugó gyorsulása a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.16. ábrában az anyagdugó által megtett utat láthatjuk az idő függvényében. Az ábrából jól kivehető, hogy az ív előtti egyenes szakaszban mozgó, illetve az ívet elhagyó, csatlakozó függőleges szakaszban mozgó anyagdugó által megtett út-idő kapcsolat (rövid szakaszt leszámítva) közelítőleg lineáris. A görbék meredeksége összhangban van az adott csőhelyzethez tartozó sebességeloszlásokkal, így a vízszintes szakasz meredeksége nagyobb, a függőlegesé pedig kisebb értékű.

A 6.17. ábrában kinagyítva látjuk az ívben mozgó dugó által megtett utat az idő függvényében. Az ábrából jól látható, hogy a kereszttel jelölt helyeken, ahol a mozgást leíró differenciálegyenletek az egyes tartományoknak megfelelően megváltoznak, a dugó által megtett út időbeni változása folytonos, törésmentes görbe szerint alakul.



6.17. ábra. Az anyagdugó által megtett út a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

6.2.2. Az anyagdugó hossza: $L < R\pi/2$

a. Az anyagdugó tölti az ívet

Ez a periódus addig tart, míg az anyagdugó ①-el jelölt hátlapja el nem éri az ív elejét. A mozgást leíró differenciálegyenlet azonos a 6.38. egyenlettel, azaz:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^*$$

$$z^* = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{11} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \alpha \left[\mu R^* z^{*2} - \frac{\mu}{2} \right]$$

(6.59)

Az összefüggésben a „ C_{11} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

$$C_{11} = -\pi_o \pi_2 p_2^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{R^*} + 1 \right)$$

A kezdeti feltételek hasonlóak a 6.38. egyenletnél leírtakhoz. Az egyenes csőszakasz ívhez csatlakozó pontjában a dimenziótlan sebességet „ $[v_a^*]_a$ ”-val jelölve írható, hogy:

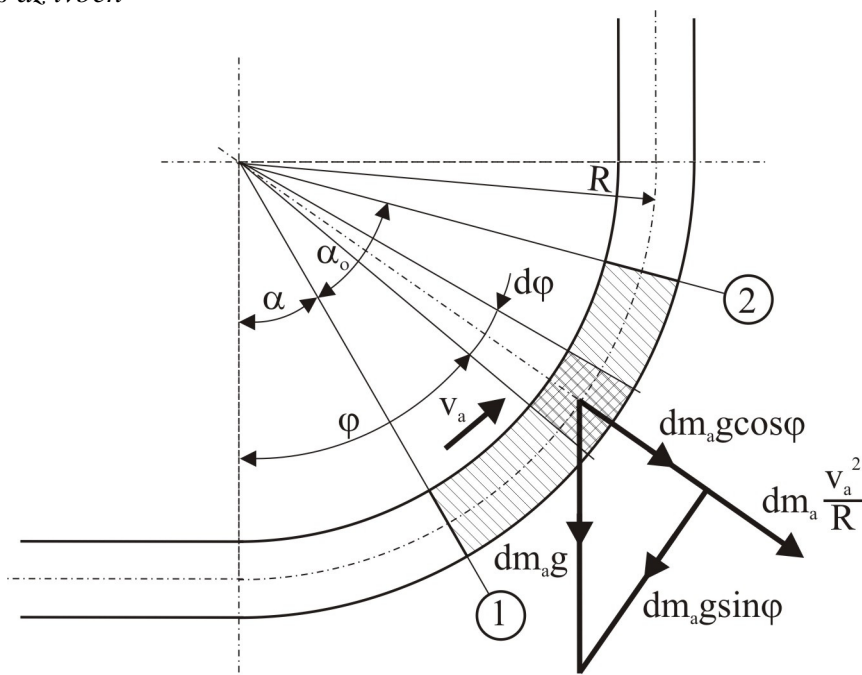
$$t^* = t_a^* \text{-nál}$$

$$\alpha(t_a^*) = 0$$

$$t^* = t_a^* \text{-nál}$$

$$z^*(t_a^*) = \frac{[v_a^*]_a}{R^*}$$

b. Mozgás az ívben



6.18. ábra. Az anyagdugó mozgása a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben. A dugóhossz: $L < R\pi/2$. A „ φ ” szöghelyzetben kimetszett elemi anyagdugóra ható erők

A 6.18. ábrában az ívben mozgó anyagdugó ①-el jelölt keresztmetszetét „ α ” szöghelyzetben rajzoltuk meg. Ez a mozgás addig tart, míg $\alpha \neq \pi/2 - \alpha_o$ értéket el nem éri. A súrlódási erő értéke, figyelembe véve a 6.27. egyenletet, az alábbi egyenletből határozható meg:

$$F_s = \mu R A \rho_h g \left[\int_{\alpha}^{\alpha + \alpha_o} \cos \varphi d\varphi + \frac{v_a^2}{gR} \int_{\alpha}^{\alpha + \alpha_o} d\varphi \right] \quad (6.60)$$

A súrlódási erő ezek után:

$$F_s = \mu R A \rho_h g \left[\sin(\alpha + \alpha_o) - \sin \alpha + \frac{v_a^2}{gR} \alpha_o \right] \quad (6.61)$$

A pályamenti komponens a 6.61. egyenlet felhasználásával az alábbi:

$$F_p = RA\rho_h g \int_{\alpha}^{\alpha+\alpha_o} \sin \varphi d\varphi \quad (6.62)$$

Az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy:

$$F_p = RA\rho_h g [\cos \alpha - \cos(\alpha + \alpha_o)] \quad (6.63)$$

Az anyagdugó mozgását leíró egyenlet ezek után a következő:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - (F_s + F_p) \quad (6.64)$$

A 6.64. egyenlet a 6.12., a 6.61. és 6.62. egyenletekkel összevonás, rendezés és dimenziótlanítás után az alábbi formát ölti:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^* &= \frac{dz^*}{dt^*} = -\pi_o \pi_2 p_2^* + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \sin(\alpha + \alpha_o) + \frac{1}{2} \sin \alpha - \\ &\quad - \mu \alpha_o R^* z^{*2} - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \alpha_o) \end{aligned} \quad (6.65)$$

Ha a 6.2.2.a. alatti fejezet részben tárgyalt mozgás során, azaz az ív töltődésének utolsó szakaszában a „z^{*}” értékét „[z^{*}]_b”-vel jelöljük, akkor a kezdeti feltételek az alábbiak:

$$\begin{aligned} t^* &= t_b^* \text{-nél} & \alpha(t_b^*) &= 0 \\ t^* &= t_b^* \text{-nél} & z^*(t_b^*) &= [z^*]_b \end{aligned} \quad (6.66)$$

c. Az ív ürülése

Ez a periódus akkor kezdődik, amikor a 6.18. ábrában bemutatott vázlatnak megfelelően az anyagdugó ① keresztmetszete az $\alpha = \pi/2 - \alpha_o$ szöghelyzetben van és befejeződik akkor, amikor az $\alpha = \pi/2$. A mozgást leíró differenciálegyenlet azonos a 6.57. egyenlettel, azaz:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^* &= \frac{dz^*}{dt^*} = C_{31} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \\ &\quad + \alpha \left[\mu R^* z^{*2} - \frac{1}{2} (1 + \mu) \right] - \frac{\mu R^* \pi}{2} z^{*2} \end{aligned} \quad (6.67)$$

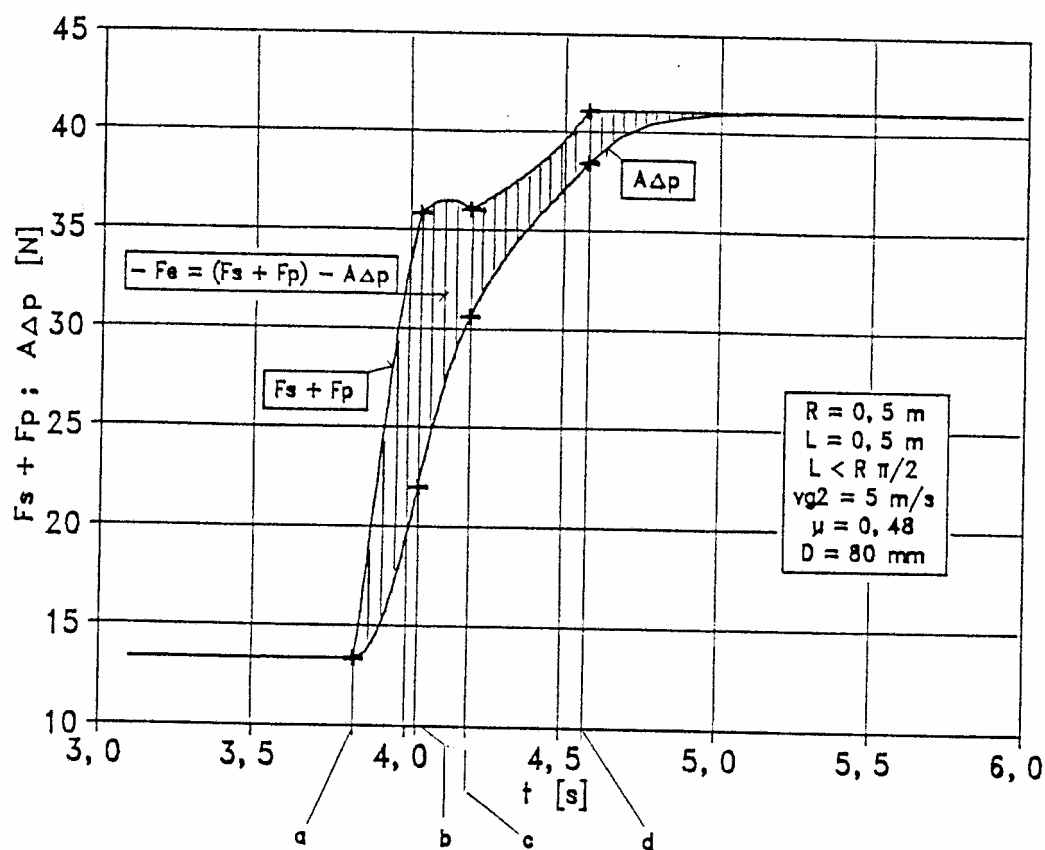
Ahol a „ C_{31} ” összevont dimenziótlán állandó:

$$C_{31} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + 1 + \mu) + \frac{1}{2} \left(\pi \frac{1+\mu}{2} - \mu \right)$$

A kezdeti feltételek a 6.2.2.b. fejezetben leírt – *mozgás az ívben* – azon megoldásából származnak, amely az $\alpha = \pi/2 - \alpha_o$ szöghelyzetben lévő anyagdugó jellemzőit adják. Ha ekkor „ z^* ” értékét „ $[z^*]_c$ ”-vel jelöljük, akkor a kezdeti feltételek a következők:

$$\begin{aligned} t^* = t_c^* \text{-nél} & \quad \alpha(t_c^*) = \pi/2 - \alpha_o \\ t^* = t_c^* \text{-nél} & \quad z^*(t_c^*) = [z^*]_c \end{aligned} \quad (6.68)$$

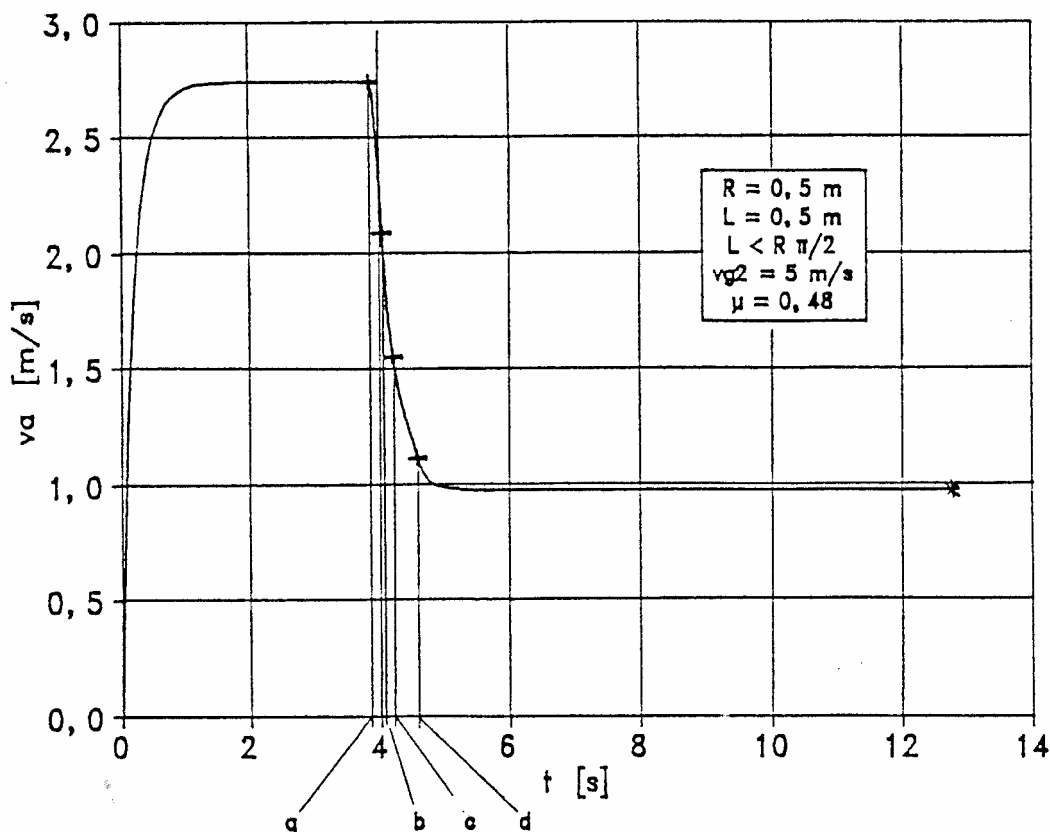
d. Számítással meghatározott diagramok



6.19. ábra. Az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása az idő függvényében. Vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív.
a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
c. A dugó homloklapja az ív végénél van
d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.19.-6.25. ábrákban a 6.1.3. fejezet részben leírt anyagjellemzőjű „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugó kinematikai jellemzőinek időbeli változását mutatjuk be.

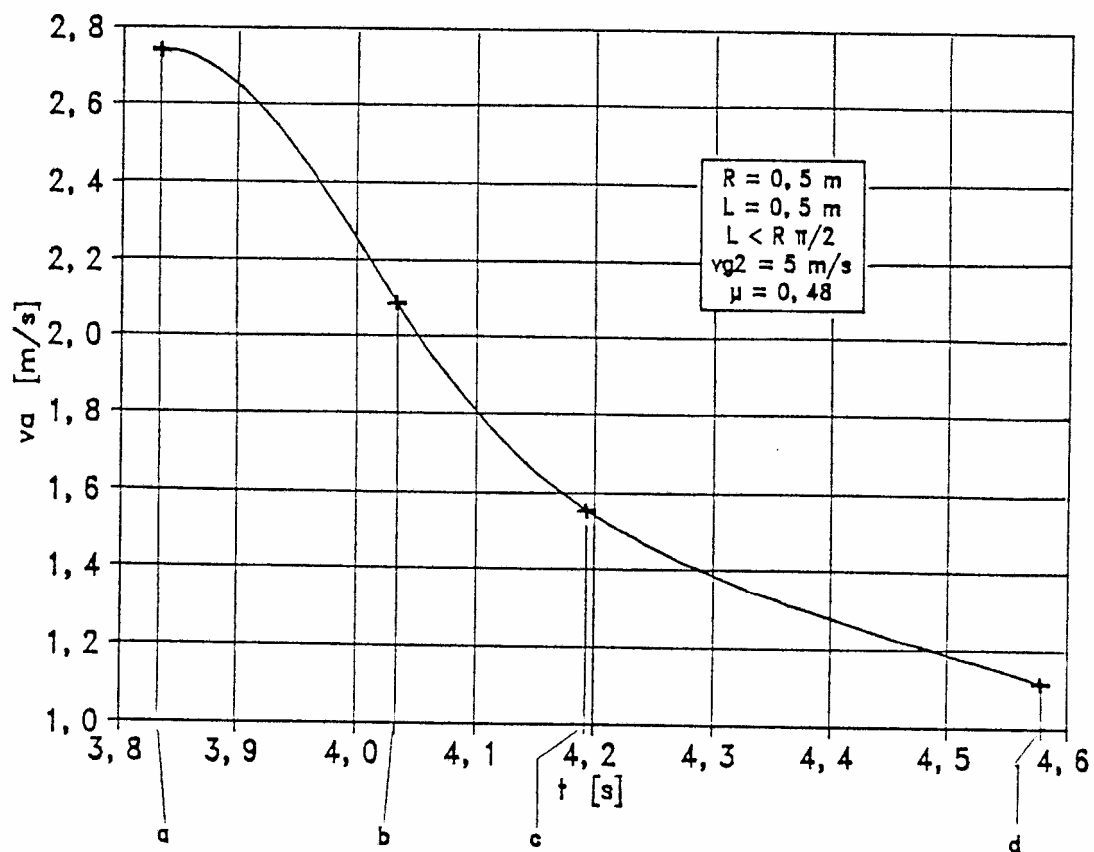
A 6.19. ábrában az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása látható az idő függvényében. Az anyagdugóra ható eredő erő, amint a dugó az ívbe érkezik negatívvá válik és a dugó lassulva kezd mozogni. Az ábrában az „ F_e ” eredő erőt függőleges vonalkázással emeltük ki.



6.20. ábra. Az anyagdugó sebessége az idő függvényében. A vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=10\text{m}$, az ív után $l=8\text{m}$.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

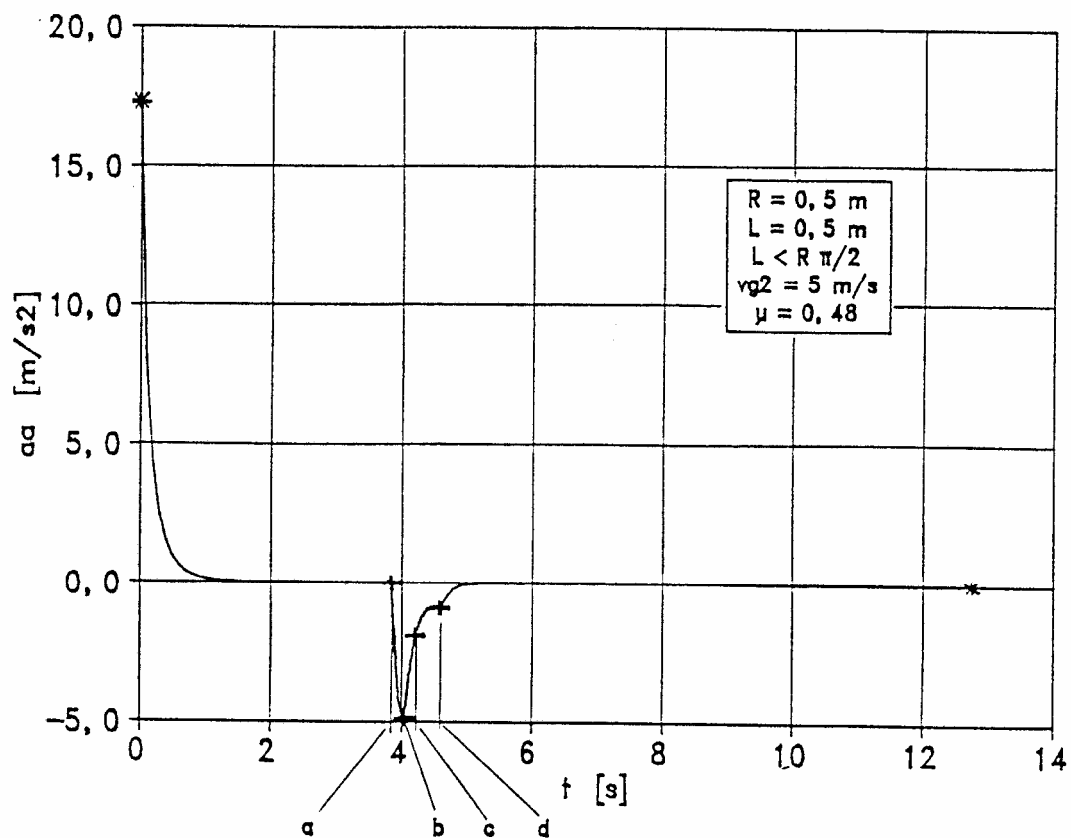
A 6.20. ábra az anyagdugó sebességének a változását mutatja az idő függvényében. Az ábrából kiolvasható, hogy az anyagdugó $v_a \approx 2.75 \text{ m/s}$ sebességgel érkezik az ív elejéhez és elhagyja azt $v_a \approx 1.15 \text{ m/s}$ sebességgel. Az anyagdugó a függőleges szakaszban tovább lassul addig, míg eléri a $v_a \approx 0.95 \text{ m/s}$ sebességet.



6.21. ábra. Az anyagdugó sebessége a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

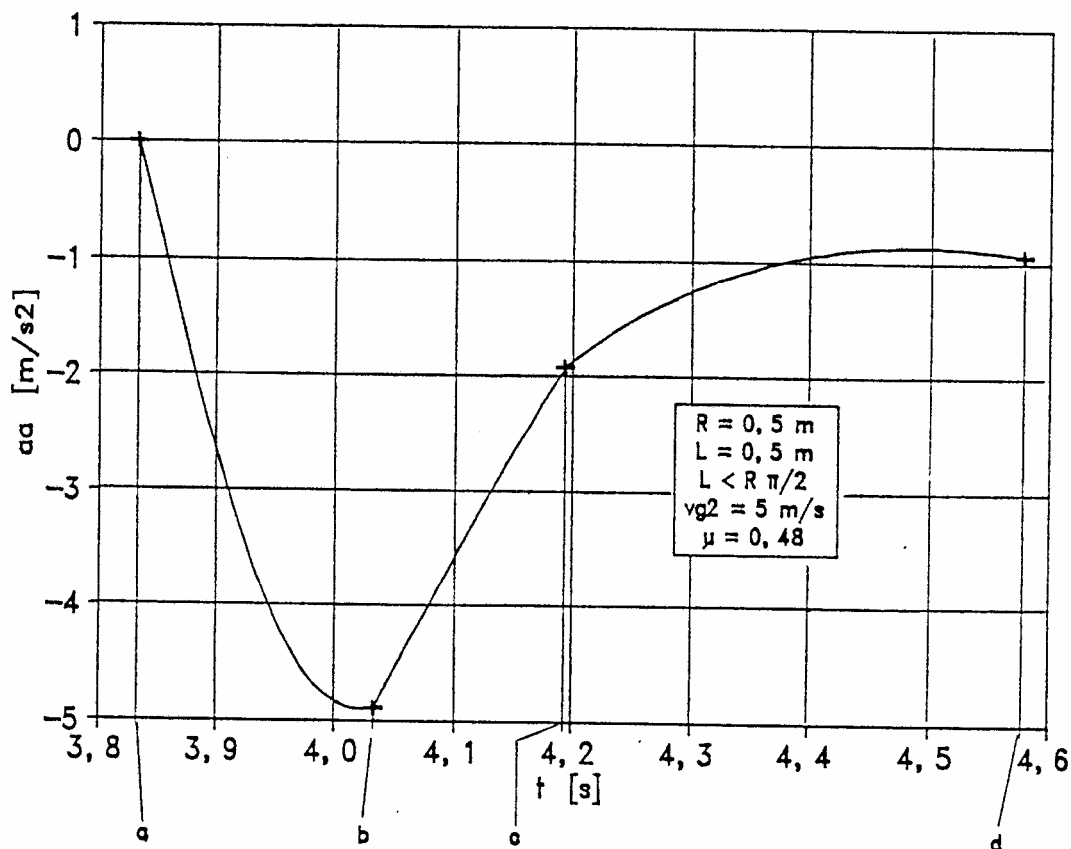
A 6.21. ábra az anyagdugó sebességét mutatja az ívben kinagyított léptékben.



6.22. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=10\text{m}$, az ív után $l=8\text{m}$.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

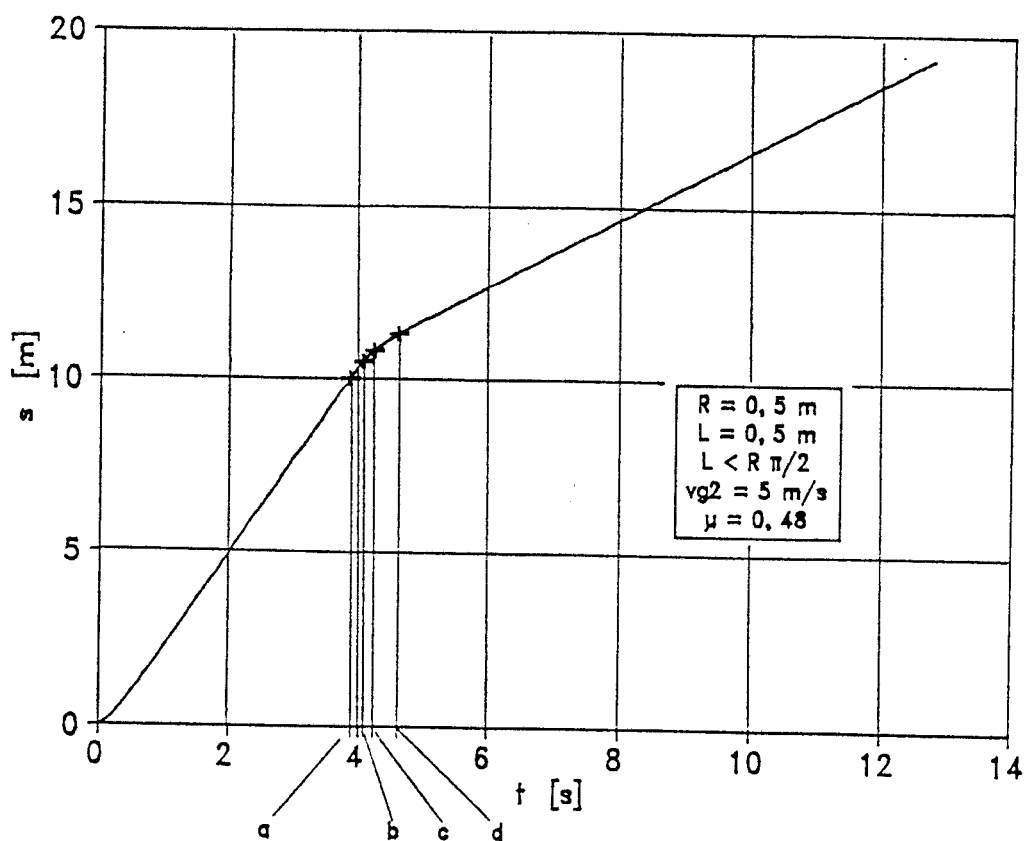
A 6.22. ábrában az anyagdugó gyorsulása (lassulása) látható az idő függvényében, az ív előtti $l=10\text{m}$ hosszú vízszintes egyenes szakaszban, magában az ívben és az ív után csatlakozó $l=8\text{m}$ hosszú függőleges egyenes szakaszban.



6.23. ábra. Az anyagdugó gyorsulása a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

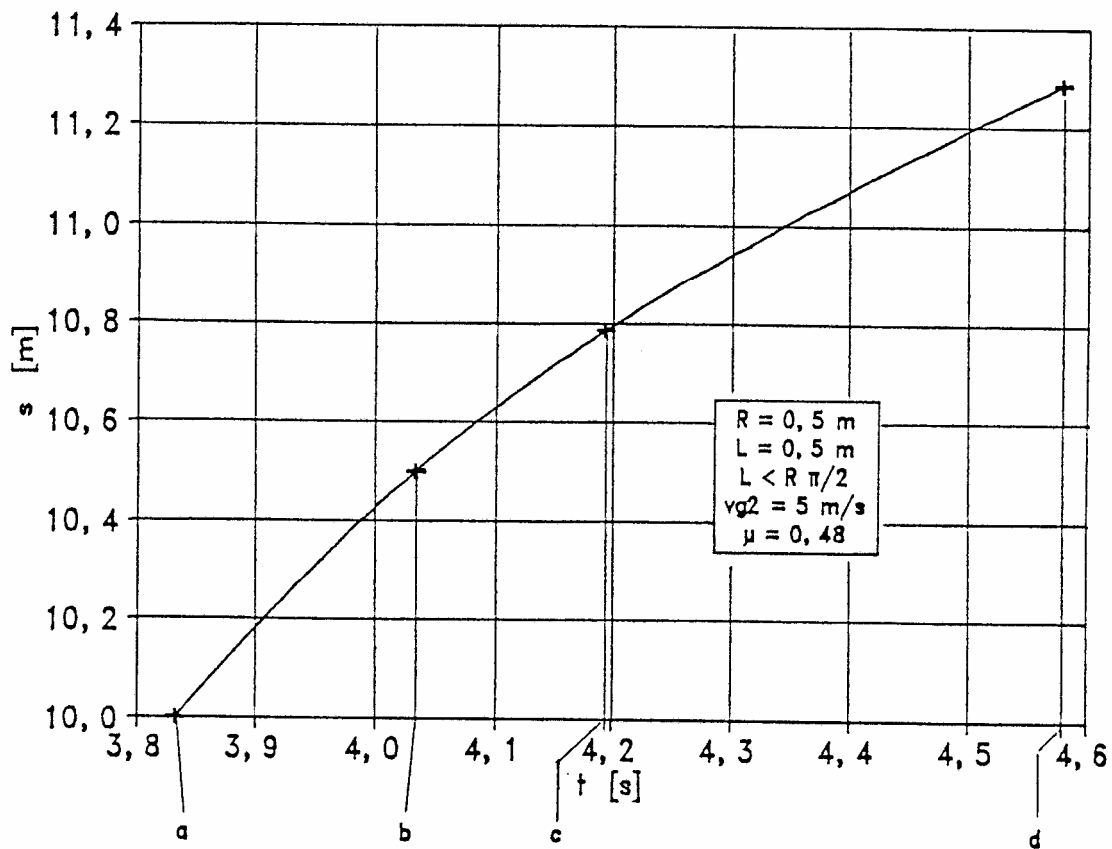
A 6.23. ábra az anyagdugó lassulását mutatja magában az ívben ugyancsak kinagyított léptékben. Az ábrából jól látható, hogy az ív töltődésének fázisában az anyagdugó lassulása (negatív gyorsulása) folyamatosan nő, hiszen egyre nagyobb tömeg kerül az ívbe, azaz egyre nagyobb az emelendő tömeg, másrészt a dugóra ható erők egyensúlyából az is belátható, hogy az ellenállás és az előrehajtó erő különbsége ebben az időszakban szintén folyamatosan növekedik.



6.24. ábra. Az anyagdugó által megtett út az idő függvényében. A vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=10\text{m}$, az ív után $l=8\text{m}$.

- A dugó homloklapja az ív elejénél van
- A dugó hátlapja az ív elejénél van
- A dugó homloklapja az ív végénél van
- A dugó hátlapja az ív végénél van

Végül a 6.24. ábra a megtett utat mutatja a vízszintes egyenes csőszakaszban, az ahhoz csatlakozó ívben, illetve az ívhez csatlakozó függőleges egyenes csőszakaszban. Az ábrából jól kivehető, hogy az ív előtti egyenes szakaszban mozgó, illetve az ívet elhagyó, csatlakozó függőleges szakaszban mozgó anyagdugó által megtett út-idő kapcsolat (a rövid indítószakaszt leszámítva) közelítőleg lineáris.



6.25. ábra. Az anyagdugó által megtett út a vízszintesből függőlegesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

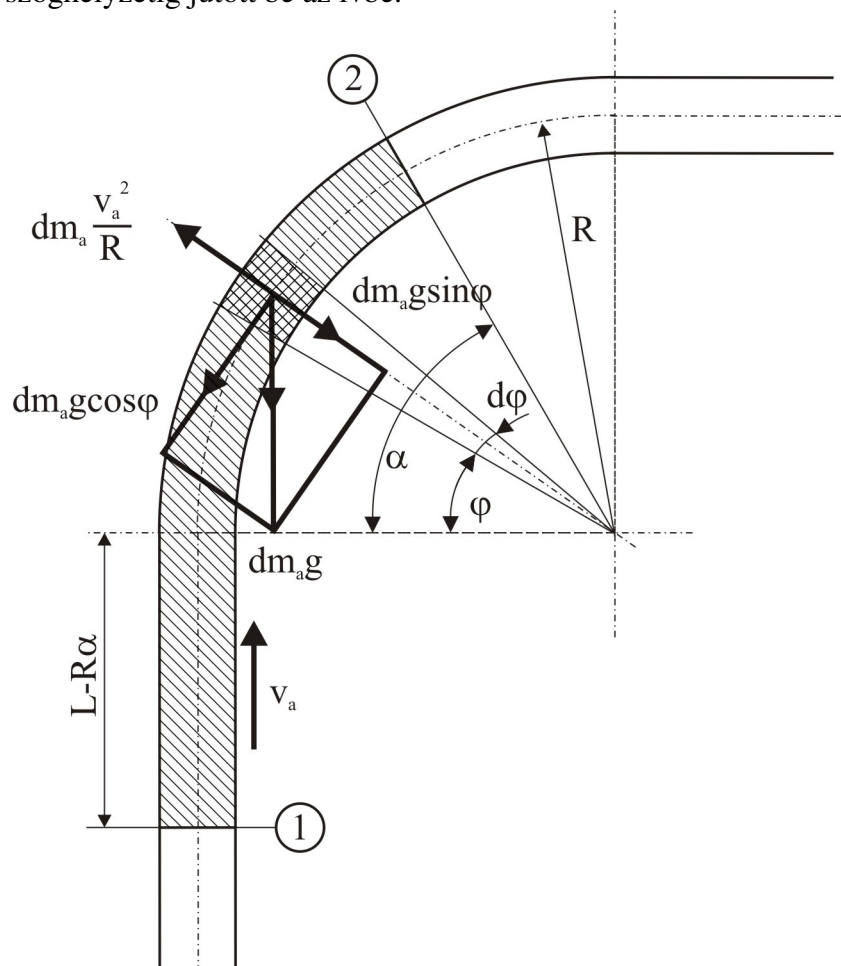
- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

6.3. Függőlegesből vízszintesbe vezető 90°-os ívben mozgó anyagdugó mozgásjellemzői

6.3.1. Az anyagdugó hossza: $L > R\pi/2$

a. Az anyagdugó tölti az ívet

A 6.26. ábrában bemutatott vázlatnak megfelelően az anyagdugó ②-vel jelölt homloklapja „ α ”-val jelölt szöghelyzetig jutott be az ívbe.



6.26. ábra. Függőleges síkú, függőlegesből vízszintesbe vezető ív töltődése. A részlegesen megtöltött ív „ φ ” szöghelyzetében kimetszett elemi anyagdugóra ható erők.

A dugóhossz: $L > R\pi/2$

A „ φ ” szöghelyzetben kimetszett elemi tömegre ható súrlódási erő az alábbi módon határozható meg:

$$dF_{s1} = \mu dm_a \left(g \sin \varphi + \frac{v_a^2}{R} \right) \quad (6.69)$$

A fenti egyenletet $\varphi=0$ és $\varphi=\alpha$ határok között integrálva a súrlódási erő értékére kapjuk, hogy:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h g \left(\cos \alpha - 1 + \frac{v_a^2}{gR} \alpha \right) \quad (6.70)$$

A 6.69. egyenlet felírásánál feltételeztük, hogy a mozgás során az egész ív mentén

$$g \sin \alpha < \frac{v_a^2}{R} \quad (6.71)$$

Előfordulhat a konkrét adatoktól függően, hogy az $\alpha = \alpha_{l1}$ helyen az egyenlőtlenség megfordul. Ebben az esetben az anyagdugó mozgását az ívben a súrlódási erő megváltozása miatt két differenciálegyenlet írja le. Az egyik egyenlet $0 < \alpha < \alpha_{l1}$ határok, a másik pedig $\alpha_{l1} < \alpha < \pi/2$ határok között írja le a mozgást.

A továbbiakban csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor a 6.71. egyenlőtlenség szerinti feltétel az egész ív mentén fennáll.

A súrlódási erő értéke a függőleges szakaszban:

$$F_{s2} = \mu(L - R\alpha)A\rho_h g \quad (6.72)$$

A fékező súrlódási erő a kettő összege, azaz:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = \mu A \rho_h g \left[L - R(1 - \cos \alpha) + \alpha \left(\frac{v_a^2}{g} - R \right) \right] \quad (6.73)$$

A pályamenti komponens értéke az ívben:

$$F_{p1} = R A \rho_h g \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi = R A \rho_h g \sin \alpha \quad (6.74)$$

A függőleges szakaszban pedig:

$$F_{p2} = (L - R\alpha)A\rho_h g \quad (6.75)$$

A pályamenti komponensek összege:

$$F_p = F_{p1} + F_{p2} \quad (6.76)$$

A dugó mozgását leíró egyenlet ezek után a következő:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A \Delta p - (F_s + F_p) \quad (6.77)$$

A 6.12., valamint 6.73. illetve a 6.76. egyenleteket figyelembe véve átalakítás és rendezés után jutunk az alábbi dimenziótlan egyenletekhez:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^*$$

$$z^* = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{41} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \cos \alpha - \alpha \mu R^* z^{*2} + \frac{\mu}{2} \alpha - \frac{1}{2} (\sin \alpha - \alpha)$$

(6.78)

Az összefüggésben a „ C_{41} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

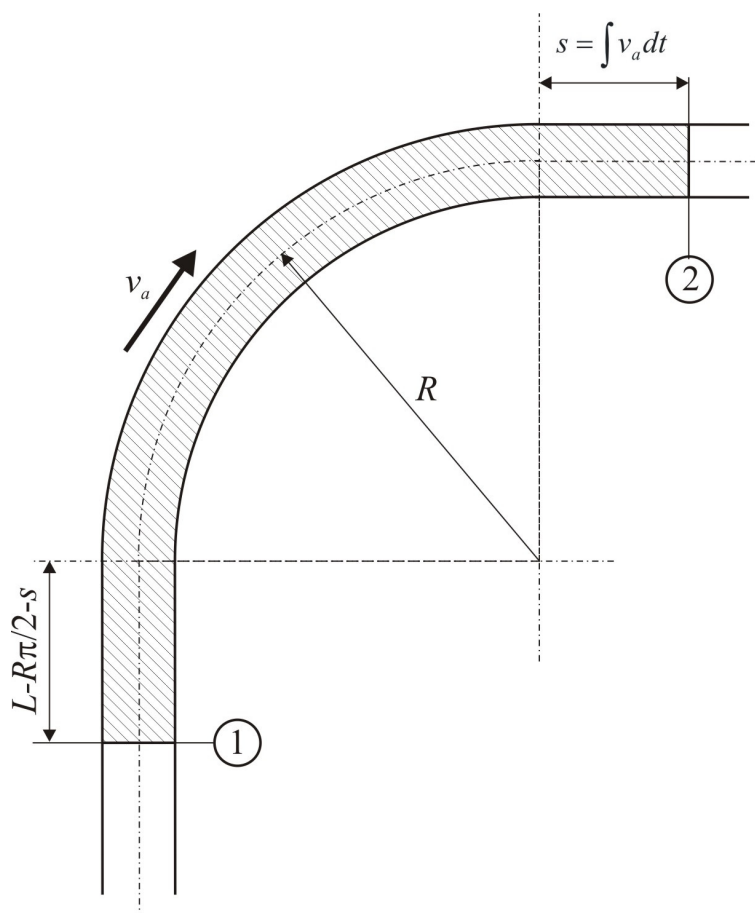
$$C_{41} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + 1 + \mu) + \frac{\mu}{2}$$

A kezdeti feltételek, ha az ív előtti csatlakozó függőleges egyenes szakaszban az anyagdugó sebességét a $t^* = t_a^*$, $\alpha=0$ helyen (az ívbe történő belépésnél) „ $[v_a^*]_a$ ”-val jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} t^* = t_a^* \text{-nál} \quad & \alpha(t_a^*) = 0 \\ t^* = t_a^* \text{-nál} \quad & z^*(t_a^*) = \frac{[v_a^*]_a}{R^*} \end{aligned}$$

(6.79)

b. Mozgás az ívben



6.27. ábra. Mozgás a függőleges síkú, függőlegeseből vízszintesbe vezető ívben. Ez addig tart, míg a dugó ① hátlapja az ív elejéhez nem ér.

A dugóhossz: $L > R\pi/2$

Ez a mozgás addig tart, míg az anyagdugó ①-el jelölt vége az ív elejét el nem éri. A 6.27. ábrában látható vázlatban a dugó ②-vel jelölt homloklapfelülete a vízszintes egyenes csatlakozó szakaszban „s” utat tett meg. Az ívben a súrlódási erő értéke számítható a 6.70. egyenletből az $\alpha = \pi/2$ helyettesítéssel. Az egyenletből kapjuk, hogy:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h g \left(\frac{v_a^2}{gR} \frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (6.80)$$

A súrlódási erő a vízszintes és a függőleges egyenes szakaszokban:

$$F_{s2} = \mu \left(L - R \frac{\pi}{2} \right) A \rho_h g \quad (6.81)$$

A fékező súrlódási erő a kettő összege:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = \mu A \rho_h g \left[L - R + \frac{\pi}{2} \left(\frac{v_a^2}{g} - R \right) \right] \quad (6.82)$$

A pályamenti komponens az ívben a 6.74. egyenletből számítható az $\alpha = \pi/2$ helyettesítéssel. Ennek értéke:

$$F_{p1} = R A \rho_h g \quad (6.83)$$

A pályamenti komponens a függőleges szakaszban:

$$F_{p1} = \left[L - \left(R \frac{\pi}{2} + s \right) \right] A \rho_h g \quad (6.84)$$

A pályamenti komponensek összege:

$$F_p = F_{p1} + F_{p2} = \left[R + L - \left(R \frac{\pi}{2} + s \right) \right] A \rho_h g = \left[R + L - \left(R \frac{\pi}{2} + \int v_a dt \right) \right] A \rho_h g \quad (6.85)$$

Az anyagdugó mozgását leíró egyenlet ezek után a következő:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A \Delta p - (F_s + F_p) \quad (6.86)$$

A 6.86. egyenlet, figyelembe véve a 6.12., a 6.82. valamint a 6.86. egyenleteket deriválás, majd átalakítás és dimenziótlanítás után a következő:

$$a_a^* = \frac{dv_a^*}{dt^*}$$

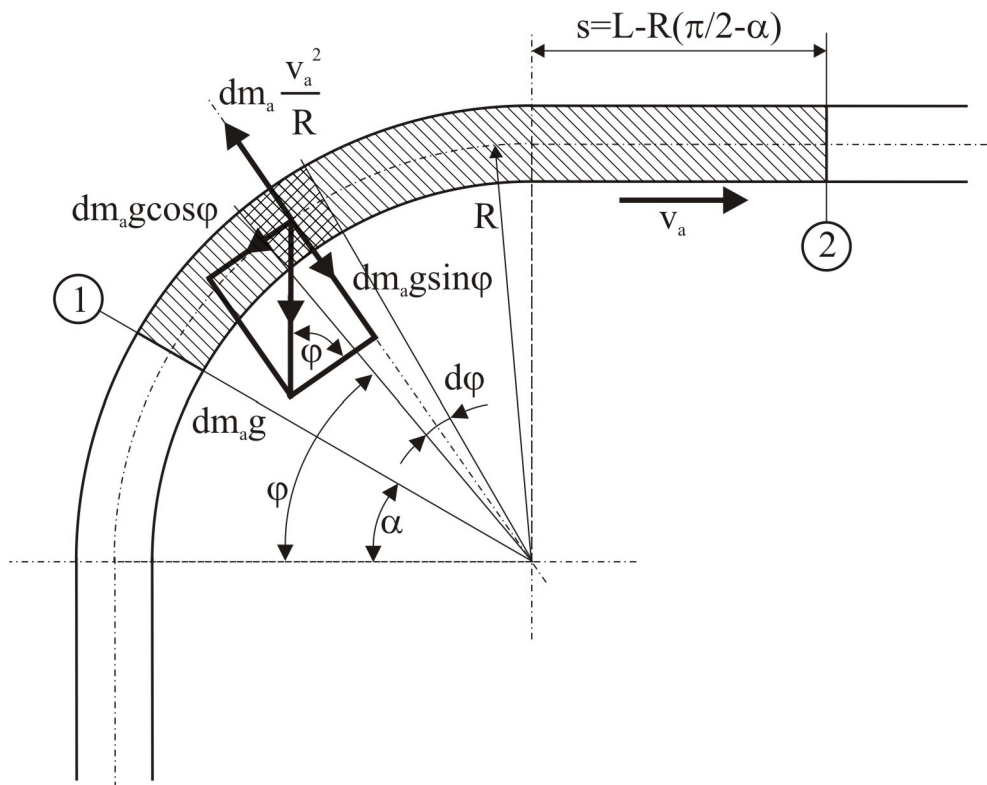
$$a_a^* = \frac{da_a^*}{dt^*} = - \frac{\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*) a_a^* \frac{\rho_{go}}{\rho_h}}{\left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2}} - \mu \pi v_a^* a_a^* + \frac{v_a^*}{2} \quad (6.87)$$

A kezdeti feltételek a 2.3.1.a. alatti részben (az anyagdugó tölti az ívet) tárgyalt 6.78. differenciálegyenlet megoldásából az $\alpha = \pi/2$ szöghelyzetben felvett értékekből számíthatók. Ha ezeket „ $[z^*]_b$ ” illetve „ $[z^*]_b$ ”-vel jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} t^* = t_b^* \text{-nél} \quad v_a^*(t_b^*) &= R \left[z^* \right]_b \\ t^* = t_b^* \text{-nél} \quad a^*(t_b^*) &= R \left[z^* \right]_b \end{aligned} \quad (6.88)$$

c. Az ív ürülése

Az ív ürülése akkor kezdődik el, amikor az anyagdugó ①-el jelölt hátlapja az ív kezdeténél van és befejeződik akkor, amikor a hátlap az ív végénél van.



6.28. ábra. Függőleges síkú, függőlegesből vízszintesbe vezető ív ürülése. A részlegesen kiürült ív „ φ ” szöghelyzetében kimetszett elemi anyagdugóra ható erők.

A dugóhossz: $L > R\pi/2$

A 6.28. ábrában egy közbülső helyzetben rajzoltuk meg az anyagdugót. A tetszőlegesen felvett „ φ ” szöghelyzetben lévő elemi anyagtömegekre ható súrlódási erő megegyezik a 6.69. egyenletből számítható értékkel. Írható, hogy:

$$dF_{s1} = \mu dm_a \left(\frac{v_a^2}{R} - g \sin \varphi \right) \quad (6.89)$$

A fenti egyenletet $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \pi/2$ határok között integrálva kapjuk az alábbi kifejezést:

$$F_{s1} = \mu A \rho_h \left[v_a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - R g \cos \alpha \right] \quad (6.90)$$

A vízszintes egyenes szakaszban a súrlódási erő értéke az

$$F_{s2} = \mu A \rho_h g \left[L - R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (6.91)$$

kifejezéssel adott. A két súrlódási erő összege:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} \quad (6.92)$$

Figyelembe véve a 6.90. valamint a 6.91. egyenleteket kapjuk, hogy:

$$F_s = \mu A \rho_h \left[v_a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - R g \cos \alpha \right] + \mu A \rho_h g \left[L - R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (6.93)$$

A pályamenti komponens értéke az ívben:

$$F_p = A R \rho_h g \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \quad (6.94)$$

Az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy:

$$F_p = A R \rho_h g (1 - \sin \alpha) \quad (6.95)$$

Az anyagdugó mozgását leíró egyenlet ezek után a következő:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A \Delta p - (F_s + F_p) \quad (6.96)$$

A 2.96. egyenlet, figyelembe véve a 6.12. valamint a 6.93. és 6.95. egyenleteket, átalakítás és rendezés, valamint dimenziótlanítás után a következő:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^* = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{61} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \cos \alpha - \pi_o \frac{\pi}{2} (R^* z^*)^2 +$$

$$+ \pi_o (R^* z^*)^2 \alpha - \frac{1}{2} (\alpha - \sin \alpha) \quad (6.97)$$

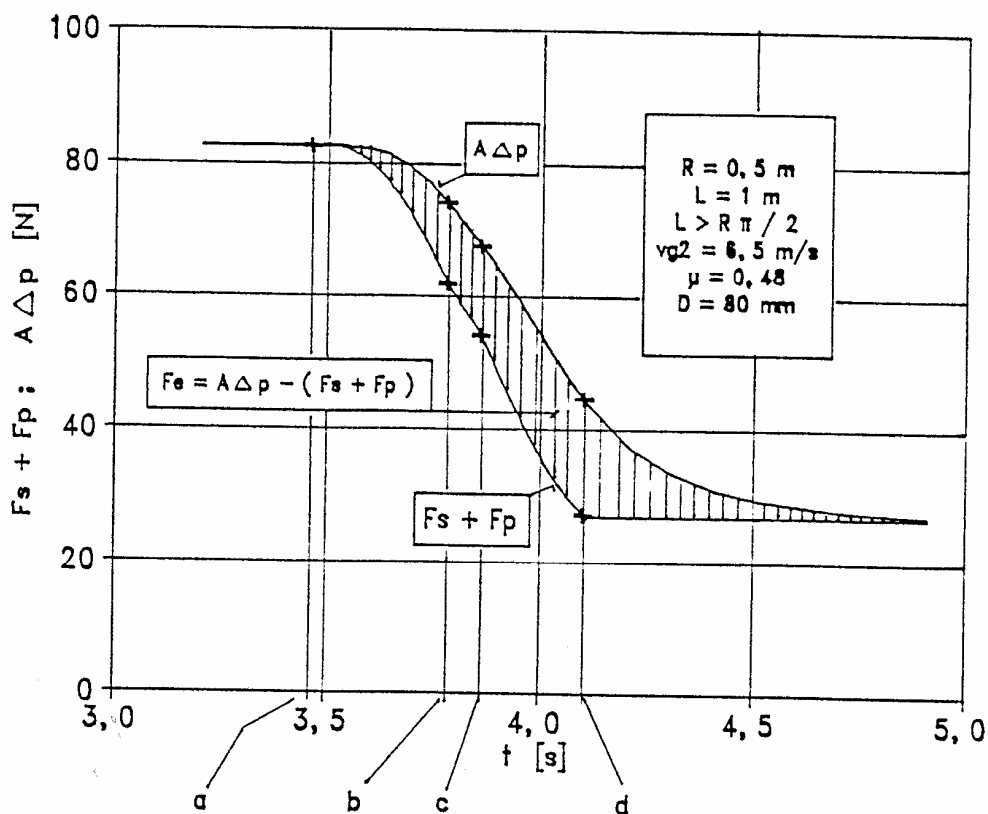
Ahol a „ C_{61} ” összevont dimenziótlan állandó:

$$C_{61} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + \mu) + \mu \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

A kezdeti feltételek a 6.3.1.b. fejezet részben tárgyalt mozgást leíró 6.87. egyenletrendszer azon megoldásából származnak, amikor a dugó ①-el jelölt keresztmetszete az ív elejét eléri (lásd a 6.27. ábrát). Ha az ekkor adódó „ v_a^* ” értékét „ $[v_a^*]_c$ ”-vel jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} t^* = t_c^* \text{-nél} \quad \alpha(t_c^*) &= 0 \\ t^* = t_c^* \text{-nél} \quad z^*(t_c^*) &= \frac{[v_a^*]_c}{R^*} \end{aligned} \quad (6.98)$$

d. Számítással meghatározott diagramok

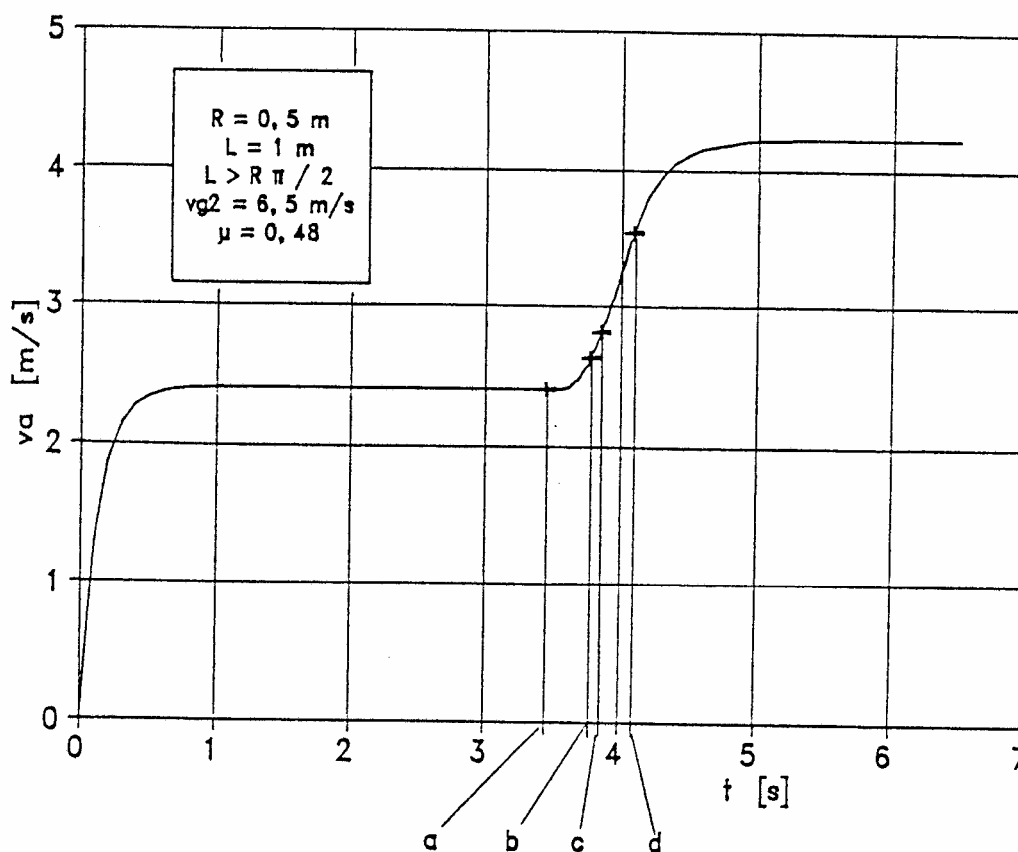


6.29. ábra. Az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása az idő függvényében. Függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.29. – 6.35. ábrákban a 6.1.3. fejezet részben ismertetett anyagjellemzőjű „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugó kinematikai jellemzőinek időbeli változását mutatjuk be.

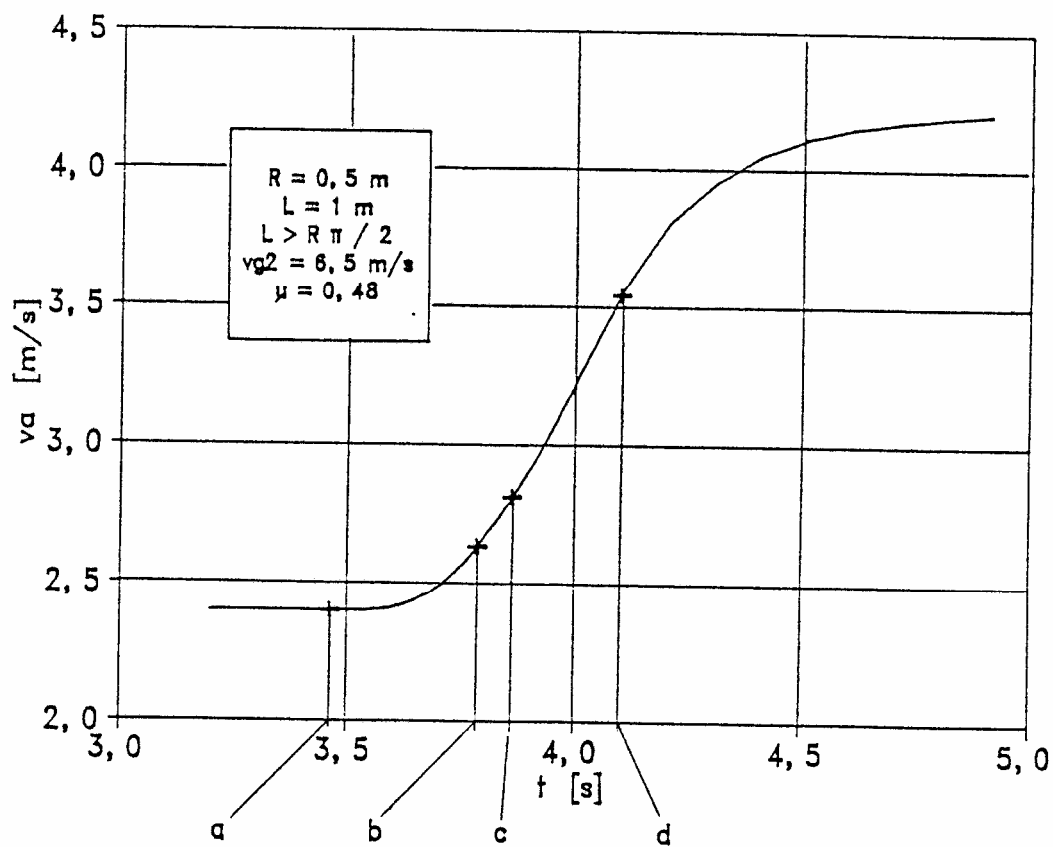
A 6.29. ábrában az anyagdugóra ható „ F_e ”-vel jelölt eredő erő változása látható az idő függvényében, amit függőleges vonalkázással is kiemeltünk. Az ábra szerint az anyagdugóra ható eredő erő a teljes ívbeli mozgás fázisában pozitív, tehát az előre hajtó erő mindvégig nagyobb, mint a súrlódási erőből és a pályamenti komponensből származó ellenállás, azaz a dugó mindvégig gyorsulva mozog az ívben.



6.30. ábra. Az anyagdugó sebessége az idő függvényében. A függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

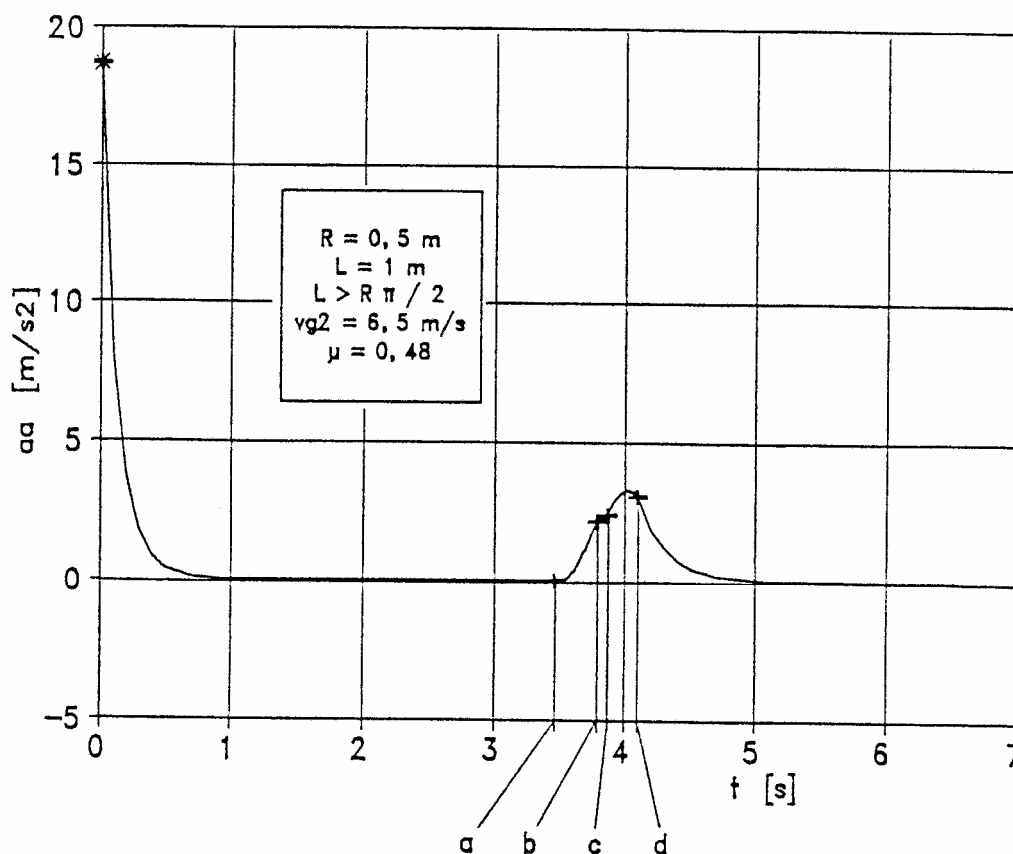
- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.30. és 6.31. ábrák a „ v_a ”-val jelölt anyagssebesség változását mutatják az ívben, illetve a hozzá csatlakozó egyenes szakaszokban az idő függvényében. A függőleges csőben az anyagdugó gyakorlatilag állandó sebességgel érkezik az ívhez, majd az ívbe lépés utáni kezdeti időszakban szinte alig nő a sebesség, aminek az a magyarázata, hogy ebben a fázisban a befektetett munka jelentős része még az emelést végzi. Az ívbeli mozgás végéhez közeledve a sebesség növekedése szinte állandóvá válik, hiszen a dugó egyre nagyobb része kerül már bele a vízszintes csatlakozó egyenes csőszakaszba. A kereszttel jelölt pontokban a sebességeloszlás görbék folytonosak, tehát az illesztési helyeken a görbék meredeksége, azaz a gyorsulás értékei is azonosak.



6.31. ábra. Az anyagdugó sebessége a függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

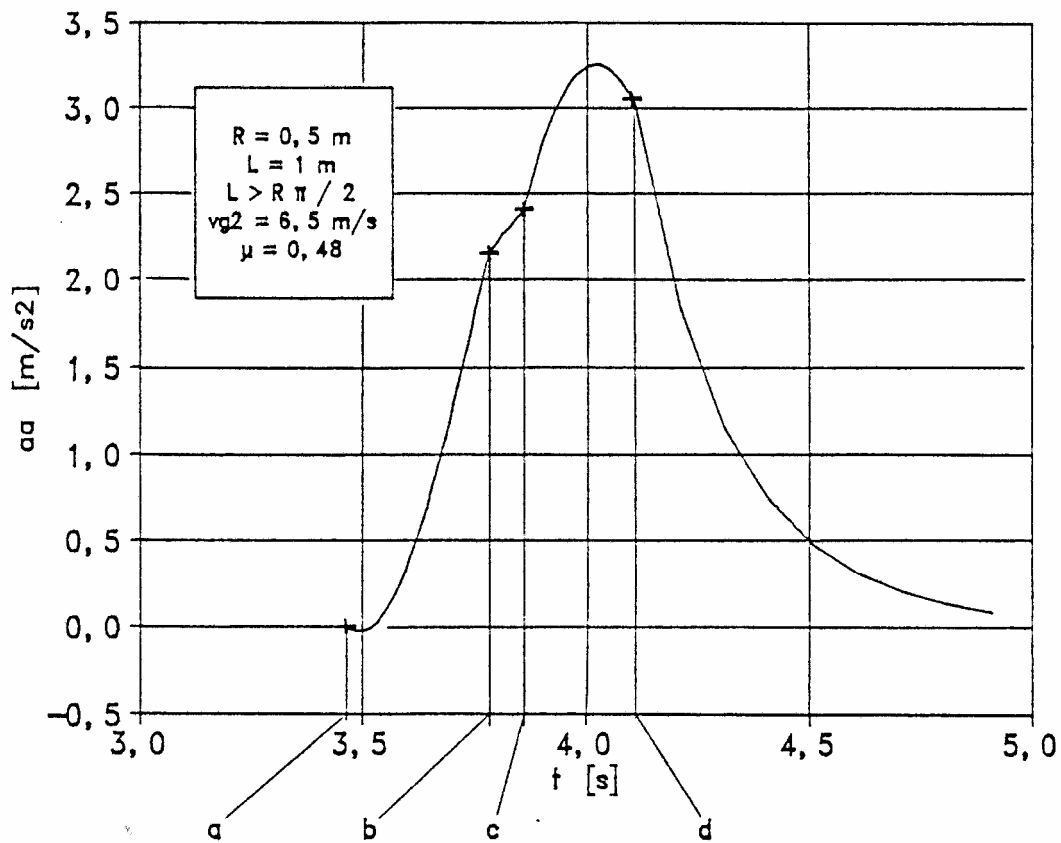
- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van



6.32. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

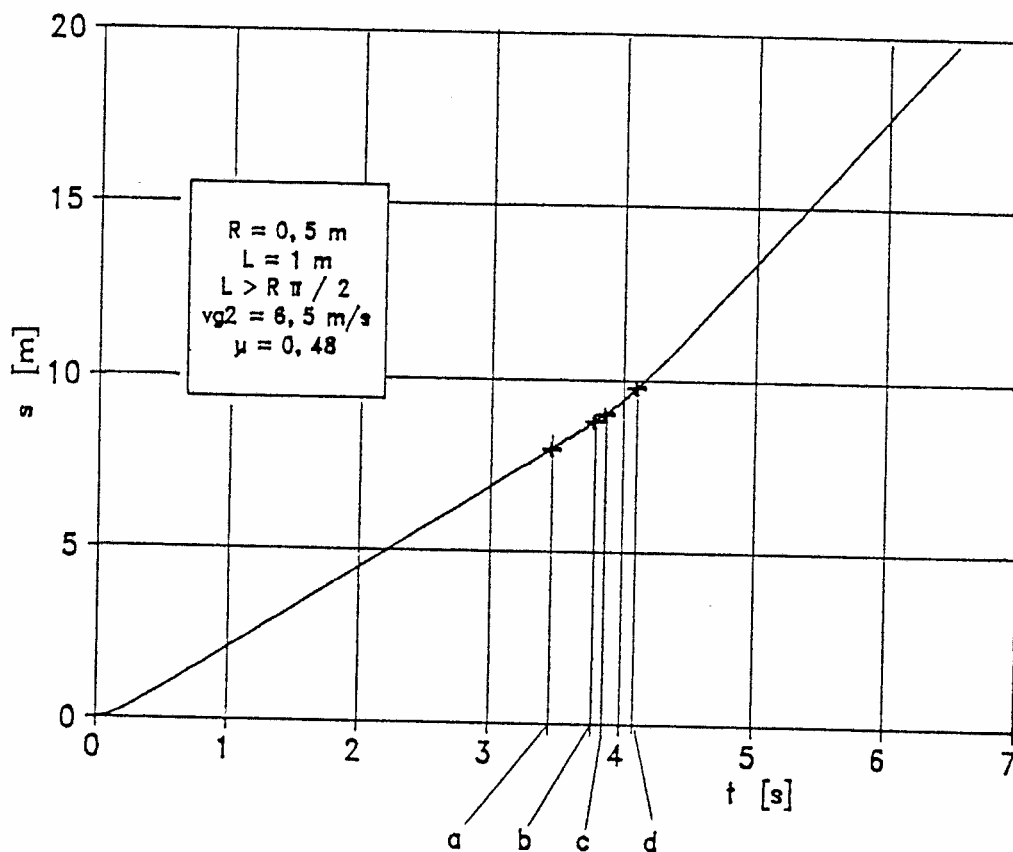
A 6.32. ábra az anyagdugó gyorsulását mutatja az egyenes szakaszokban, illetve magában az ívben. A gyorsulás értékeit kinagyított léptékben mutatja a 6.33. ábra magában az ívben. Csupán a 6.33. ábra részletes elemzése alapján állapítható meg, hogy az „a” pont után igen rövid ideig negatív gyorsulás, azaz lassulás lép fel. A gyorsulás maximuma összhangban az erők ábrájával, azaz az ott bevonalkázott legnagyobb metszék helyén adódik.



6.33. ábra. Az anyagdugó gyorsulása a függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.34. ábra az anyagdugó által megtett utat mutatja az egyenes szakaszokban és magában az ívben.

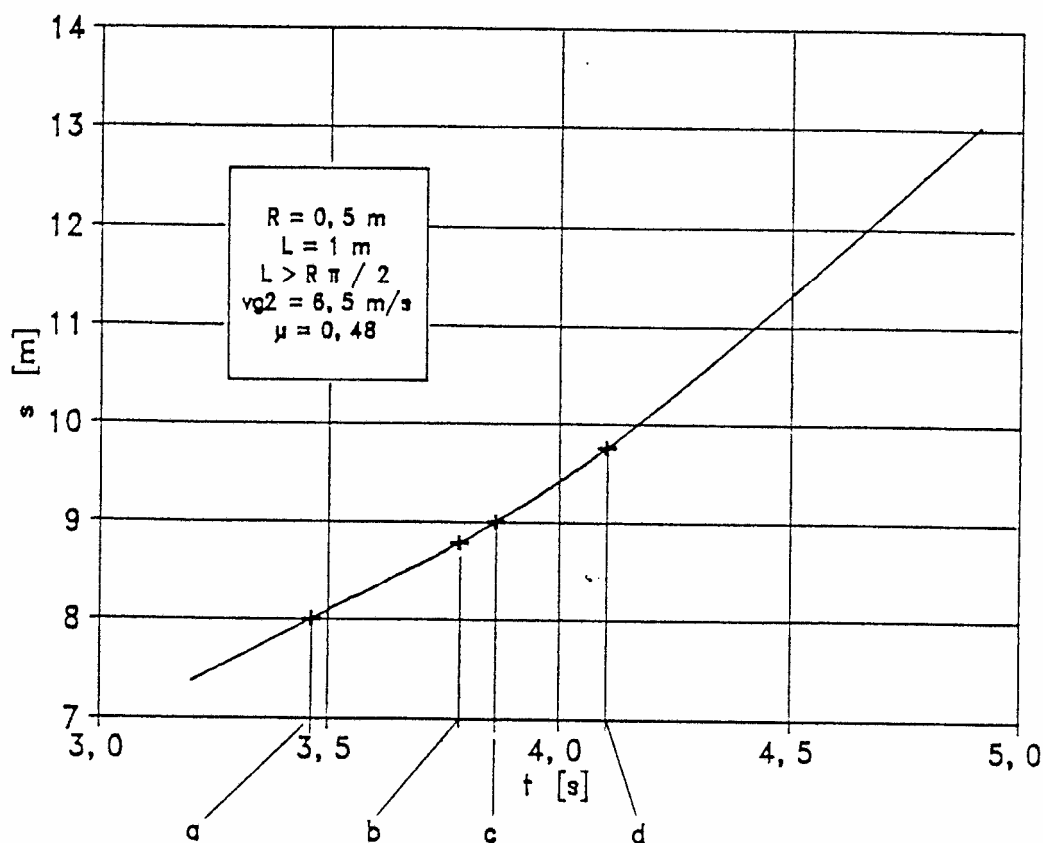


6.34. ábra. Az anyagdugó által megtett út az idő függvényében. A függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

Az ábrából jól kivehető, hogy az ív előtti egyenes szakaszban mozgó, illetve az ívet elhagyó, csatlakozó vízszintes szakaszban mozgó anyagdugó által megtett út-idő kapcsolat (rövid szakaszt leszámítva) közelítőleg lineáris. A görbék meredeksége összhangban van az adott csőhelyzethez tartozó sebességgel, így a vízszintes szakaszon a görbe meredeksége nagyobb, a függőleges szakaszban pedig kisebb értékű.

Külön megrajzoltuk az utat a 6.35. ábrában is kinagyított léptékben az idő függvényében.



6.35. ábra. Az anyagdugó által megtett út a függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

6.3.2. Az anyagdugó hossza: $L < R\pi/2$

a. Az anyagdugó tölti az ívet

Ez a periódus addig tart, míg az anyagdugó ①-el jelölt hátlapja el nem éri az ív elejét. A mozgást leíró differenciálegyenlet azonos a 6.78. egyenlettel, azaz:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = z^*$$

$$z^* = \frac{dz}{dt} = C_{41} + \left[\frac{k}{d_{hs}} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \cos \alpha - \alpha \mu R^* z^{*2} + \frac{\mu}{2} \alpha - \frac{1}{2} (\sin \alpha - \alpha)$$

(6.99)

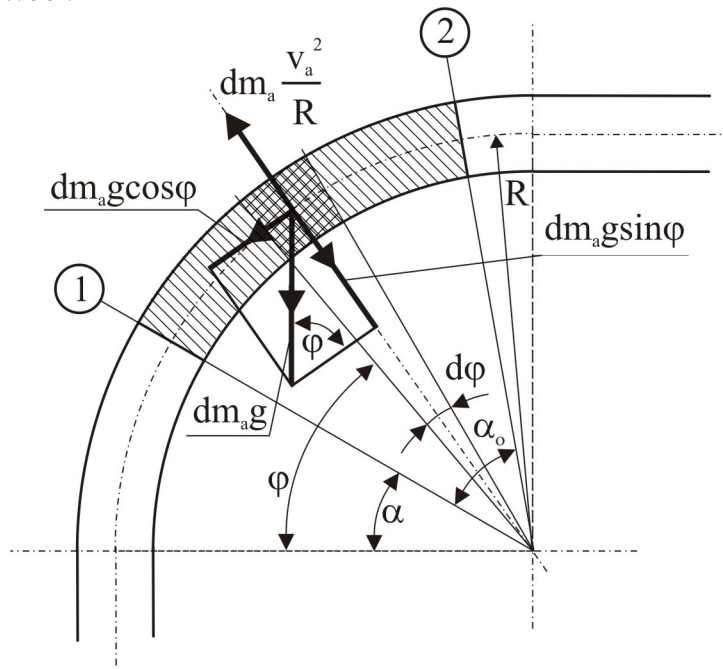
Az összefüggésben a „ C_{41} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

$$C_{41} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + 1 + \mu) + \frac{\mu}{2}$$

A kezdeti feltételek, ha az ív előtti csatlakozó függőleges egyenes szakaszban az anyagdugó sebességét a $t^* = t_a^*$, $\alpha=0$ helyen (az ívbe történő belépésnél) „ $[v_a^*]_a$ ”-val jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} t^* = t_a^* \text{-nál} \quad \alpha(t_a^*) &= 0 \\ t^* = t_a^* \text{-nál} \quad z^*(t_a^*) &= \frac{[v_a^*]_a}{R^*} \end{aligned} \quad (6.100)$$

b. Mozgás az ívben



6.36. ábra. Az anyagdugó mozgása a függőlegesből vízszintesbe vezető, függőleges síkú ívben. A dugóhossz: $L < R\pi/2$. A „ φ ” szöghelyzetben kimetszett elemi anyagdugóra ható erők

A 6.36. ábrában az ívben mozgó anyagdugó ①-el jelölt keresztmetszetét „ α ” szöghelyzetben rajzoltuk meg. Ez a mozgás addig tart, míg a szög az $\alpha = \pi/2 - \alpha_0$ értéket fel nem veszi.

A súrlódási erő értéke, figyelembe véve a 6.89. egyenletet, az alábbi módon számítható:

$$F_s = A\rho_h \mu v_a^2 \int_{\alpha}^{\alpha+\alpha_0} d\varphi - RA\rho_h g \mu \int_{\alpha}^{\alpha+\alpha_0} \sin \varphi d\varphi \quad (6.101)$$

Az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy:

$$F_s = A\rho_h \mu v_a^2 \alpha_0 + RA\rho_h g \mu [\cos(\alpha + \alpha_0) - \cos \alpha] \quad (6.102)$$

Itt is feltételeztük, hogy $g \sin \varphi < \frac{v_a^2}{R}$ az egész ív mentén.

A pályamenti komponens értéke:

$$F_p = RA\rho_h g \int_{\alpha}^{\alpha+\alpha_o} \cos \varphi d\varphi = RA\rho_h g [\sin(\alpha + \alpha_o) - \sin \alpha] \quad (6.103)$$

A mozgást fékező erő a kettő összege, azaz:

$$F_s + F_p = A\rho_h \mu v_a^2 \alpha_o + RA\rho_h g \mu [\cos(\alpha + \alpha_o) - \cos \alpha] + RA\rho_h g [\sin(\alpha + \alpha_o) - \sin \alpha] \quad (6.104)$$

A mozgást leíró egyenlet az alábbi:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - (F_s + F_p) \quad (6.105)$$

A 6.105. egyenlet, figyelembe véve a 6.12. valamint a 6.104. egyenletet, átalakítás, rendezés és dimenziótlanítás után az alábbi módon írható:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^* &= \frac{dz^*}{dt^*} = \pi_o \pi_2 p_2^* + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{R^*} (R^* + z^*)^2 \alpha_o + \frac{\mu}{2} \cos(\alpha + \alpha_o) - \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \alpha_o) + \frac{1}{2} \sin \alpha \end{aligned} \quad (6.106)$$

A kezdeti feltételek, ha a 6.3.2.a. alatti részben tárgyalt mozgás során, azaz az ív töltődésének utolsó szakaszában a „ z^* ” értékét „ $[z^*]_b$ ”-vel jelöljük, akkor az alábbiak:

$$\begin{aligned} t^* &= t_b^* \text{-nél} & \alpha(t_b^*) &= 0 \\ t^* &= t_b^* \text{-nél} & z^*(t_b^*) &= [z^*]_b \end{aligned} \quad (6.107)$$

c. Az ív ürülése

Az ív ürülése akkor kezdődik el, amikor az anyagdugó ① jelű keresztmetszete (lásd a 6.36. ábrát) az $\alpha = \pi/2 - \alpha_o$ pozícióhoz érkezik és befejeződik akkor, amikor a keresztmetszet az $\alpha = \pi/2$ szöghelyzetben van. A mozgást leíró differenciálegyenlet azonos a 6.97. egyenlettel, azaz:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^* &= \frac{dz^*}{dt^*} = C_{61} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \cos \alpha - \pi_o \frac{\pi}{2} (R^* z^*)^2 + \\ &\quad + \pi_o (R^* z^*)^2 \alpha - \frac{1}{2} (\alpha - \sin \alpha) \end{aligned} \quad (6.108)$$

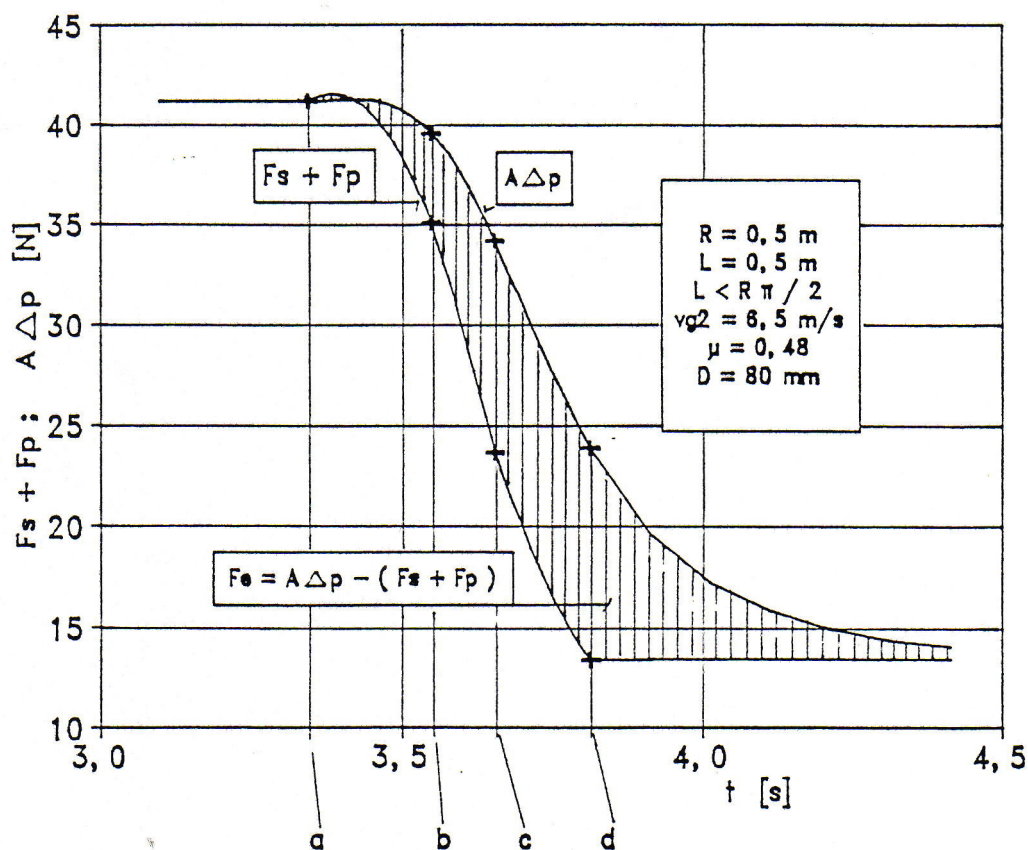
Ahol a „ C_{61} ” összevont dimenziótlán állandó:

$$C_{61} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + \mu) + \mu \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

A kezdeti feltételek a 6.3.2.b. fejezet részben – mozgás az ívben - leírt differenciálegyenlet azon megoldásából származnak, amely az $\alpha = \pi/2 - \alpha_o$ szöghelyzetben lévő anyagdugó jellemzőit adják. Ha ekkor „ z^* ” értékét „ $[z^*]_c$ ”-vel jelöljük, akkor a kezdeti feltételek a következők:

$$\begin{aligned} t^* = t_c^* \text{-nél} \quad \alpha(t_c^*) &= \pi/2 - \alpha_o \\ t^* = t_c^* \text{-nél} \quad z^*(t_c^*) &= [z^*]_c \end{aligned} \quad (6.109)$$

d. Számítással meghatározott diagramok



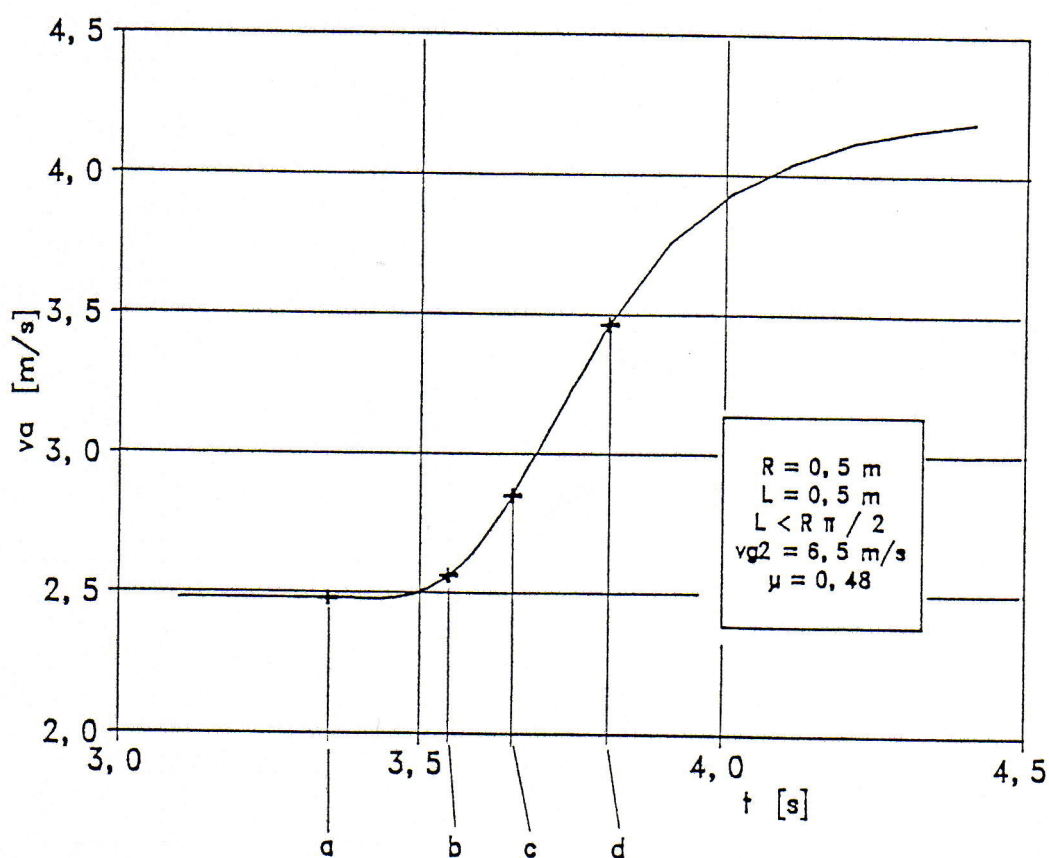
6.37. ábra. Az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása az idő függvényében. Függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív.

- A dugó homloklapja az ív elejénél van
- A dugó hátlapja az ív elejénél van
- A dugó homloklapja az ív végénél van
- A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.37.-6.43. ábrákban a 6.1.3. fejezet részben adott anyagjellemzőjű „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugó kinematikai jellemzőinek időbeli változását mutatjuk be. A 6.37. ábrában az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változását láthatjuk az idő függvényében. Az eredő erő nagyságát függőleges vonalkázással külön kiemeltük. Az ábrából láthatóan az eredő erő az ívbe történő belépésnél csak igen rövid időtartamra válik negatívvá. Ez az időtartam az ív „a”-val jelölt kezdetétől az „ F_s+F_p ” valamint az „ $A\Delta p$ ” görbék metszéspontjáig tart. Ezt követően, a már pozitív eredő erő gyorsítja az anyagdugót magában az ívben is.

A 6.38. ábra az anyagdugó sebességét mutatja az idő függvényében. Láthatjuk, - a 6.37. ábra kapcsán elmondottak figyelembe vételével – hogy az anyagdugó sebessége magában az ívben is nő.

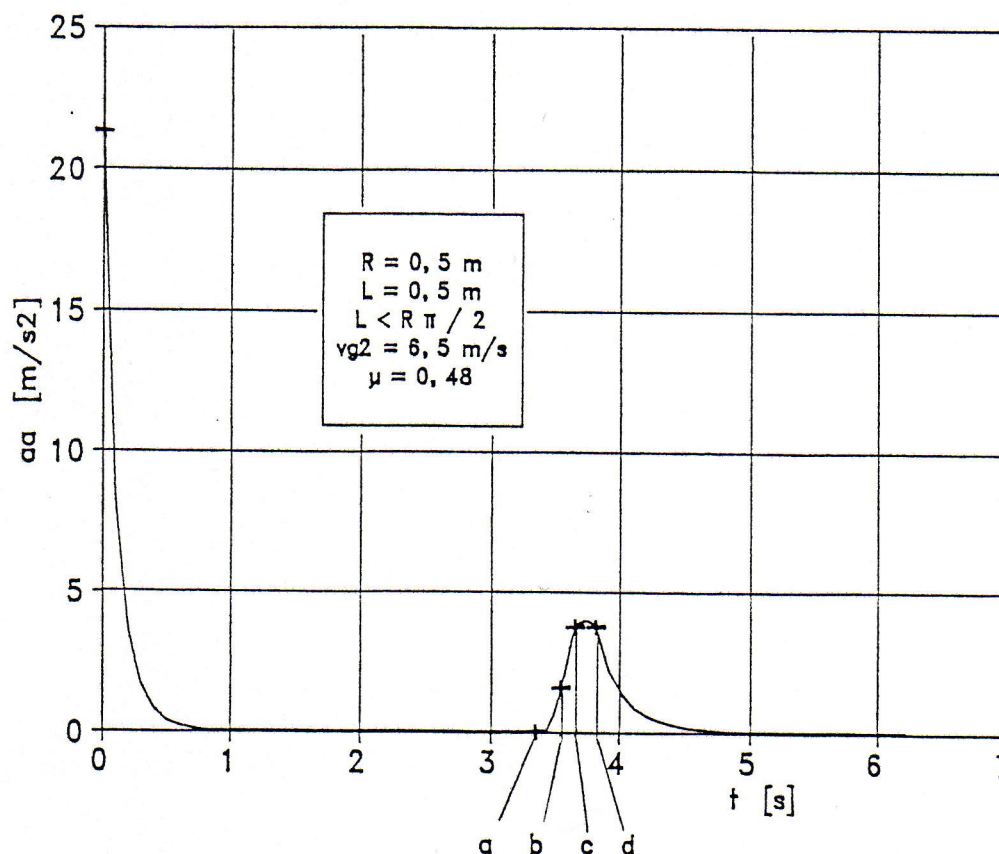
A 6.39. ábrában bemutatjuk a sebesség – idő kapcsolatot kinagyított léptékben.



6.39. ábra. Az anyagdugó sebessége a függőlegesből vízszintesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

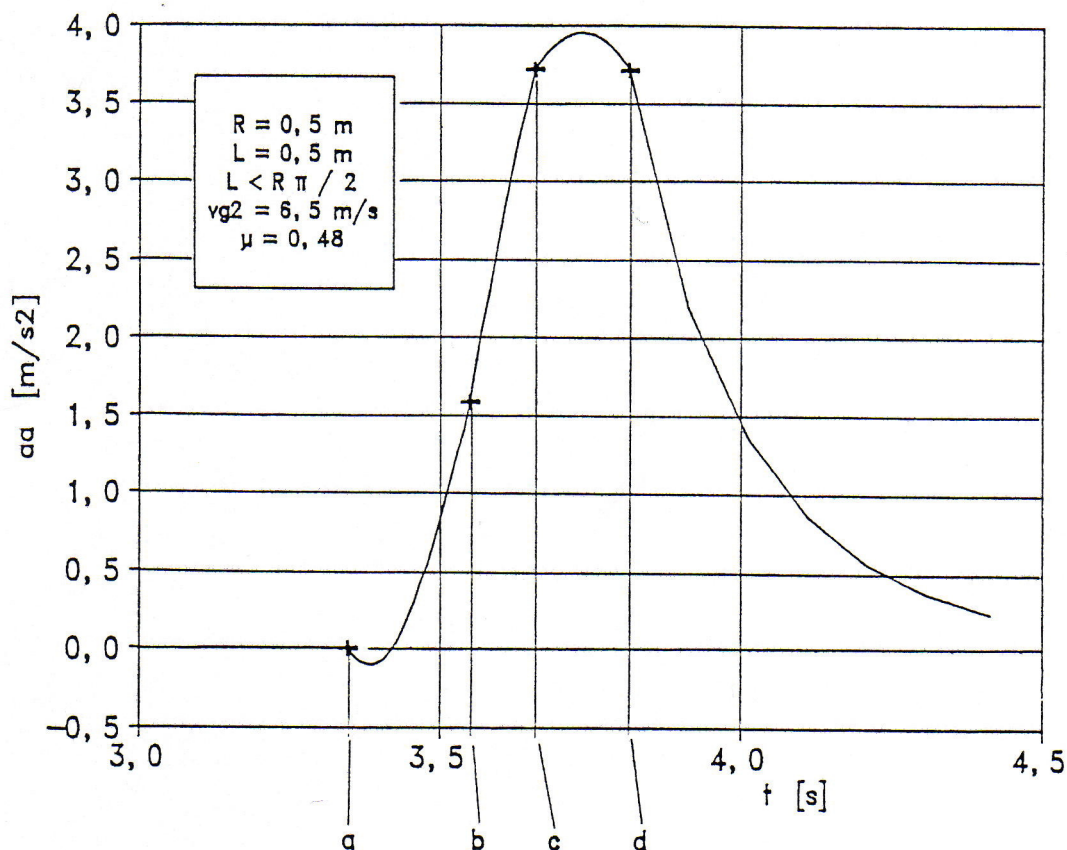
A 6.40. ábra az anyagdugó gyorsulását mutatja az idő függvényében.



6.40. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

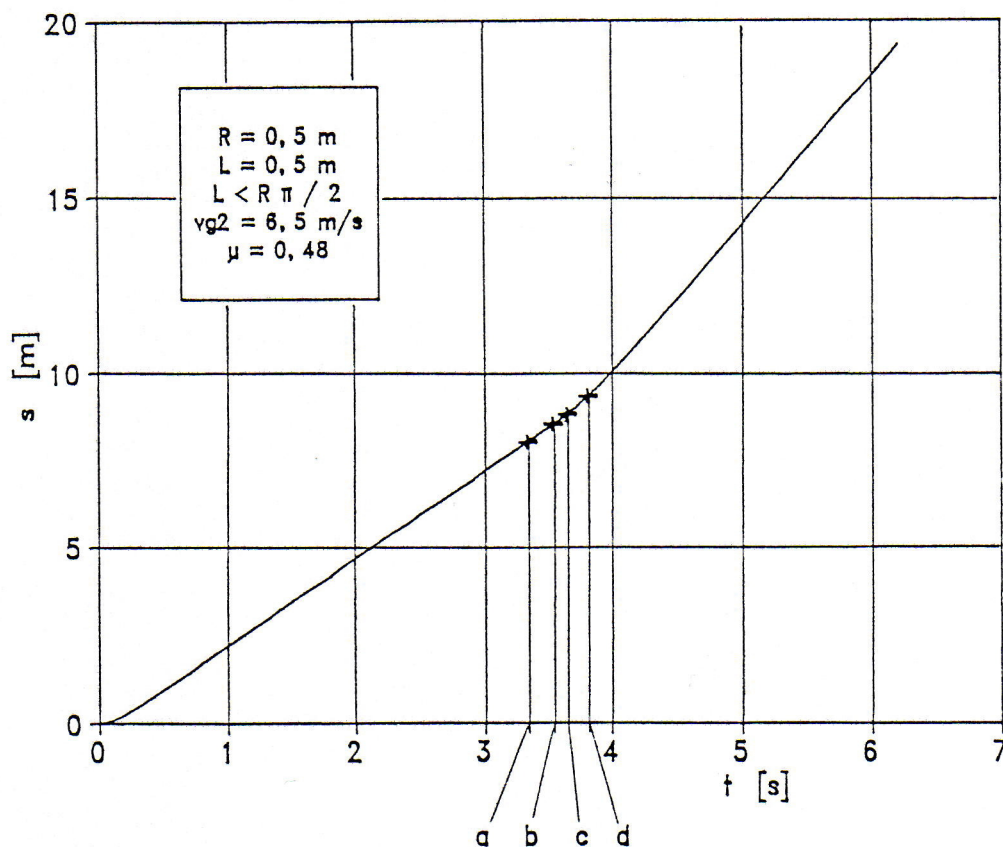
A 6.41. ábrában kinagyítva mutatjuk be a gyorsulás változását az idő függvényében. Láthatjuk itt is, hogy a negatív „ F_e ” erő eredményeként az „a” jelű ponttól kezdődően rövid időtartamra a gyorsulás értéke negatív. Az ábrából az is kiolvasható, hogy az íven belüli gyorsulás értékének maximuma az ív ürülési fázisában adódik (lásd az ábrán a „c” és „d” jelű pontok közötti intervallumot).



6.41. ábra. Az anyagdugó gyorsulása a függőlegesből vízszintesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

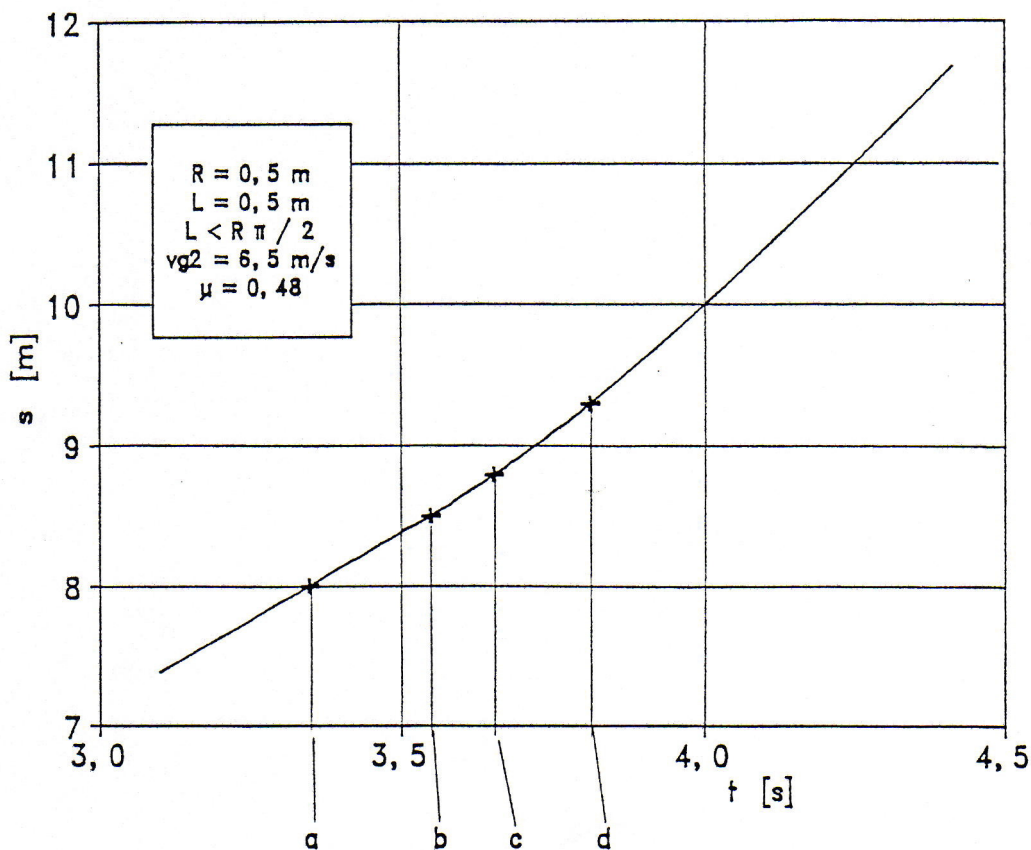
A 6.42. illetve a 6.43. ábrában a megtett utat láthatjuk az idő függvényében. A 6.42. ábrából jól kivehető, hogy az ív előtti egyenes szakaszban mozgó, illetve az ívet elhagyó csatlakozó vízszintes szakaszban mozgó anyagdugó által megtett út-idő kapcsolat (rövid szakaszt leszámítva) közelítőleg lineáris. A görbék meredeksége összhangban van az adott csőhelyzethez tartozó sebességgel, így a vízszintes szakasz meredeksége nagyobb, a függőlegesé pedig kisebb értékű.



6.42. ábra. Az anyagdugó által megtett út az idő függvényében. A függőlegesből vízszintesbe vezető függőleges síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.43. ábra alapján megállapítható, hogy a különböző mozgási fázisok illesztési helyein a függvények folytonosak, az előírt feltételeknek megfelelően.



6.43. ábra. Az anyagdugó által megtett út a függőlegesből vízszintesbe vezető, függőleges síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

6.4. Vízszintes síkú 90° -os ívben mozgó anyagdugó mozgásjellemzői

6.4.1. Az anyagdugó hossza: $L > R\pi/2$

a. Az anyagdugó tölti az ívet

A töltési periódus addig tart, míg az anyagdugó ②-vel jelölt homloklapja eléri az $\alpha=90^\circ$ -os középponti szöget.

A 6.44. ábrában bemutatott vázlatnak megfelelően az anyagdugó ②-vel jelölt homloklapja „ α ”-val jellemzett szöghelyzetig jutott be az ívbe. A tetszőleges „ φ ” szöghelyzetben kimetszett elemi szakaszban lévő elemi tömegre ható erőket figyelembe véve az elemi súrlódási erőre az alábbi összefüggés írható fel:

$$dF_{s1} = \mu dF_n = \mu dm_a \left[\left(\frac{v_a^2}{R} \right)^2 + g^2 \right]^{1/2} = \mu R d\varphi A \rho_h \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} \quad (6.110)$$

Az összefüggést $\varphi=0$ és $\varphi=\alpha$ határok között integrálva kapjuk, hogy:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} \alpha \quad (6.111)$$

A súrlódási erő a vízszintes szakaszban:

$$F_{s2} = (L - R \alpha) A \rho_h g \mu \quad (6.112)$$

A kettő összege, azaz a dugó mozgását fékező erő:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = \mu R A \rho_h \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} \alpha + (L - R \alpha) A \rho_h g \mu \quad (6.113)$$

A dugó mozgását leíró egyenlet ezek után az alábbi:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A \Delta p - F_s \quad (6.114)$$

A 6.12., valamint a 6.113. egyenlet figyelembe vételével a 6.114. egyenlet átalakítás, rendezés és dimenziótlanítás után az alábbi módon írható:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ z^* = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{71} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^* \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \alpha \left\{ 1 - \left[\frac{8\pi_o}{R^*} (R^* z^*)^4 + 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (6.115)$$

Az összefüggésben a „ C_{71} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

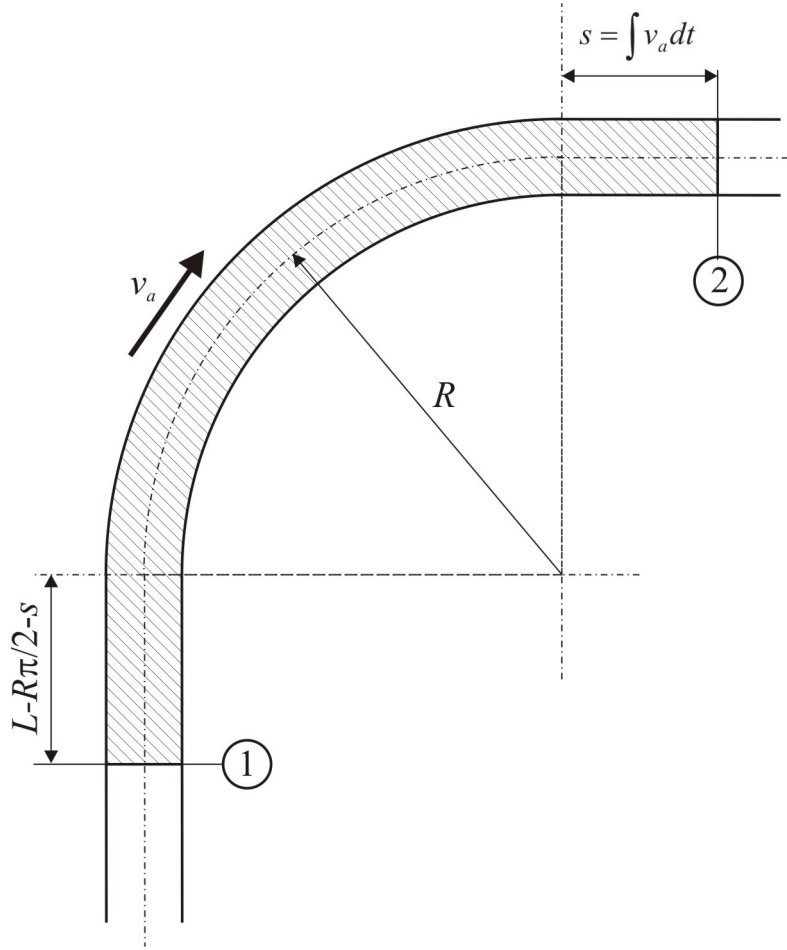
$$C_{71} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + \mu)$$

Ha a vízszintes síkú ív előtti csatlakozó egyenes szakasz végén az ívbe történő belépésnél az anyagdugó sebességét „ $[v_a^*]_a$ ”-val jelöljük, akkor a kezdeti feltételek az alábbiak:

$$\begin{aligned} t^* = t_a^* \text{-nál} & \quad \alpha(t_a^*) = 0 \\ t^* = t_a^* \text{-nál} & \quad z^*(t_a^*) = \frac{[v_a^*]_a}{R^*} \end{aligned} \quad (6.116)$$

b. Mozgás az ívben

Ez a mozgás akkor kezdődik el, amikor az anyagdugó ②-vel jelölt keresztmetszete (lásd a 6.45. ábrát) az ív végénél van és befejeződik akkor, amikor az ① keresztmetszet az ív elejét eléri.



6.45. ábra. Mozgás a vízszintes síkú ívben. A mozgás addig tart, míg az anyagdugó ① keresztmetszete eléri az ív elejét. A dugóhossz: $L > R\pi/2$

Az ívben a súrlódási erő értéke a 6.111. egyenletből az $\alpha = \pi/2$ helyettesítéssel határozható meg. Írható, hogy:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h \frac{\pi}{2} \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} \quad (6.117)$$

A súrlódási erő értéke az ív előtti és az ív utáni egyenes szakaszokban:

$$F_{s2} = \left(L - R \frac{\pi}{2} \right) A \rho_h g \mu \quad (6.118)$$

A két súrlódási erő összege a mozgást fékező erő:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = \mu R A \rho_h \frac{\pi}{2} \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} + \left(L - R \frac{\pi}{2} \right) A \rho_h g \mu \quad (6.119)$$

Az ívben mozgó anyagdugó mozgását leíró egyenlet ezek után:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A\Delta p - F_s \quad (6.120)$$

A 6.120. egyenlet, figyelembe véve a 6.12., valamint a 6.119. egyenletet, átalakítás, rendezés és dimenziótlanítás után a következő:

$$\frac{dv_a^*}{dt^*} = C_{81} + \frac{\pi_2}{2} \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - v_a^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} - \frac{\mu R^* \pi}{4} \left[\frac{8\pi_o}{R^*} v_a^{*4} + 1 \right]^{1/2} \quad (6.121)$$

Az összefüggésben a „ C_{81} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

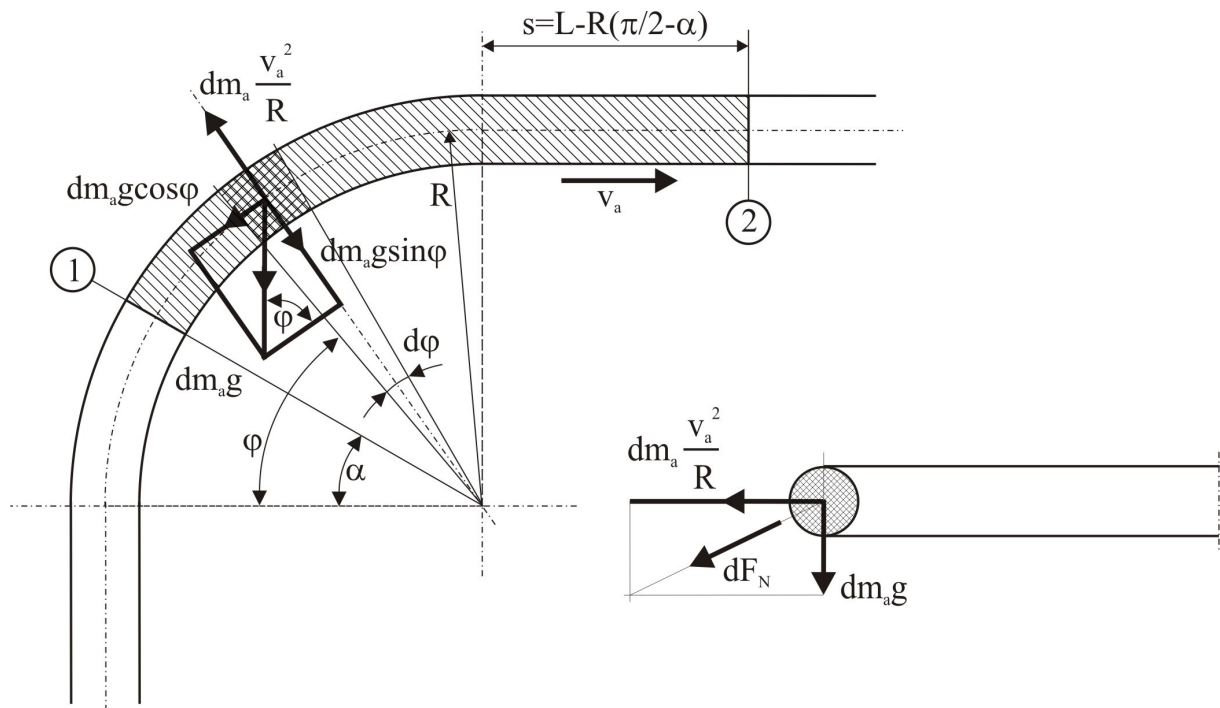
$$C_{81} = -\frac{\pi_2}{2} p_2^* + \mu \left(R^* \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

A kezdeti feltételt a 6.115. egyenlet (az anyagdugó tölti az ívet) megoldásából nyerjük. Ha az $\alpha = \pi/2$ szöghelyzetben felvett sebesség értékét „ $[v_a^*]_b$ ”-vel jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} t^* &= t_b^* \text{-nél} & v_a^*(t_b^*) &= [v_a^*]_b \\ t^* &= t_b^* \text{-nél} & a^*(t_b^*) &= R \cdot [z^*]_b \end{aligned} \quad (6.122)$$

c. Az ív ürülése

Az ív ürülése akkor kezdődik el, amikor az anyagdugó ①-el jelölt keresztmetszete az ív kezdeténél van, és befejeződik akkor, ha az ② keresztmetszet az ív végéhez került.



6.46. ábra. Az ív ürülése. Az „ α ” szöghelyzetben lévő anyagdugó tetszőleges „ φ ” szöghelyzetében lévő elemi anyagtömegre ható erők. A dugóhossz: $L > R\pi/2$

A 6.46. ábrában az anyagdugót „ α ”-val jellemzett szöghelyzetben rajzoltuk meg.

Az ívben a tetszőlegesen felvett „ φ ” szöghelyzetben lévő elemi anyagtömegre ható súrlódási erő megegyezik a 6.110. egyenletből számolható értékkel. Írható, hogy:

$$dF_{s1} = \mu R d\varphi A \rho_h \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} \quad (6.123)$$

Az összefüggést $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \pi/2$ határok között integrálva kapjuk, hogy:

$$F_{s1} = \mu R A \rho_h \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} \quad (6.124)$$

A súrlódási erő értéke a vízszintes egyenes csőszakaszban:

$$F_{s2} = \left[L - R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] A \rho_h g \mu \quad (6.125)$$

A mozgást fékező súrlódási erő a kettő összege:

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = \mu R A \rho_h \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2} + \left[L - R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] A \rho_h g \mu \quad (6.126)$$

A dugó mozgását leíró egyenlet ezek után a következőként írható:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A \Delta p - F_s \quad (6.127)$$

A 6.127. egyenlet, figyelembe véve a 6.12. és 6.126. egyenleteket, átalakítás, rendezés és dimenziótlanítás után az alábbi módon írható:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \\ \frac{dz^*}{dt^*} = C_{91} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^* \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left[\frac{8\pi_o}{R^*} (R^* z^*)^4 + 1 \right]^{1/2} - \frac{\mu}{2} \alpha \quad (6.128)$$

Az összefüggésben a „ C_{91} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

$$C_{91} = -\pi_o \pi_2 p_2^* + \mu \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2R^*} \right)$$

A kezdeti feltételek a 6. 121. differenciálegyenlet azon megoldásából származnak, amikor az anyagdugó ①-el jelölt keresztmetszete az ív elejét eléri (lásd a 6.45. ábrát).

Ha az ekkor adódó „ v_a^* ” értékét „ $[v_a^*]_c$ ”-vel jelöljük, akkor:

$$t^* = t_c^* \text{-nél}$$

$$\alpha(t_c^*) = 0$$

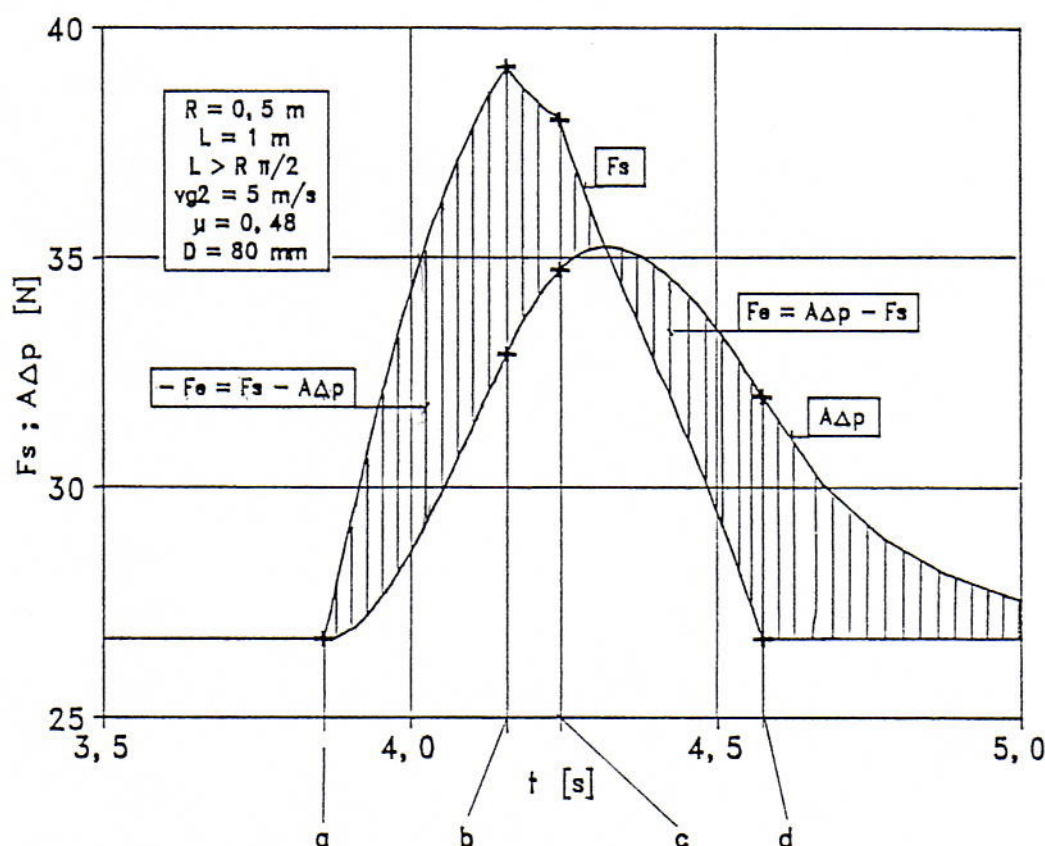
(6.129)

$$t^* = t_c^* \text{-nél}$$

$$z^*(t_c^*) = \frac{[v_a^*]}{R^*}$$

d. Számítással meghatározott diagramok

A 6.47.-6.53. ábrákban a 6.1.3. fejezet részben ismertett anyagjellemzőjű „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugó kinematikai jellemzőit mutatjuk be.



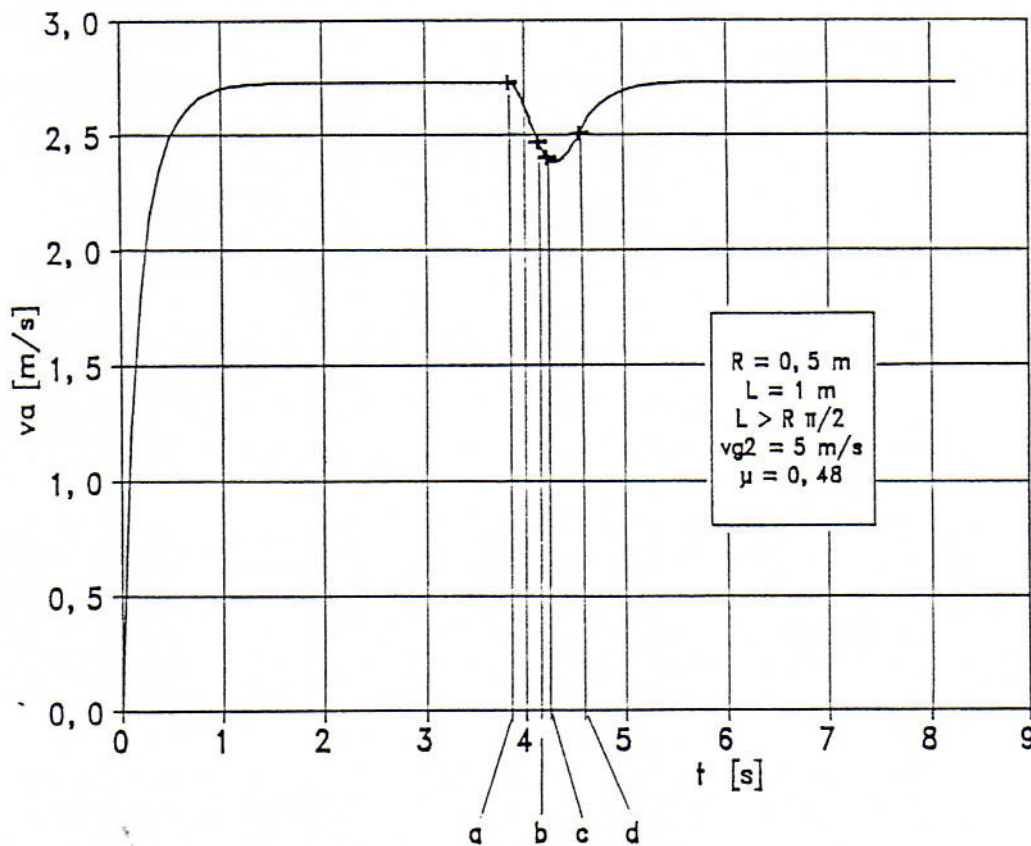
6.47. ábra. Az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása az idő függvényében. Vízszintes síkú ív.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.47. ábrában az anyagdugóra ható „ F_e ”-vel jelölt eredő erő változása látható az idő függvényében, amit függőleges vonalkázással is kiemeltünk. Az ábrából jól látható, hogy a vízszintes síkú ív előtti és utáni egyenes szakaszban a dugóra ható súrlódási erő azonosan állandó. Az „a” pont után, azaz a dugó homloklapjának ívbe lépését követően a súrlódási erő az ívben fellépő járulékos erő miatt megnő és legnagyobb értékét a teljes ív kitöltésekor, azaz a dugó homloklapjának „b” pontbeli helyzetében éri el. Az ábrából az is kiolvasható, hogy a hajtóerő növekedése a fenti idő intervallumban kisebb mértékű, tehát az eredő erő

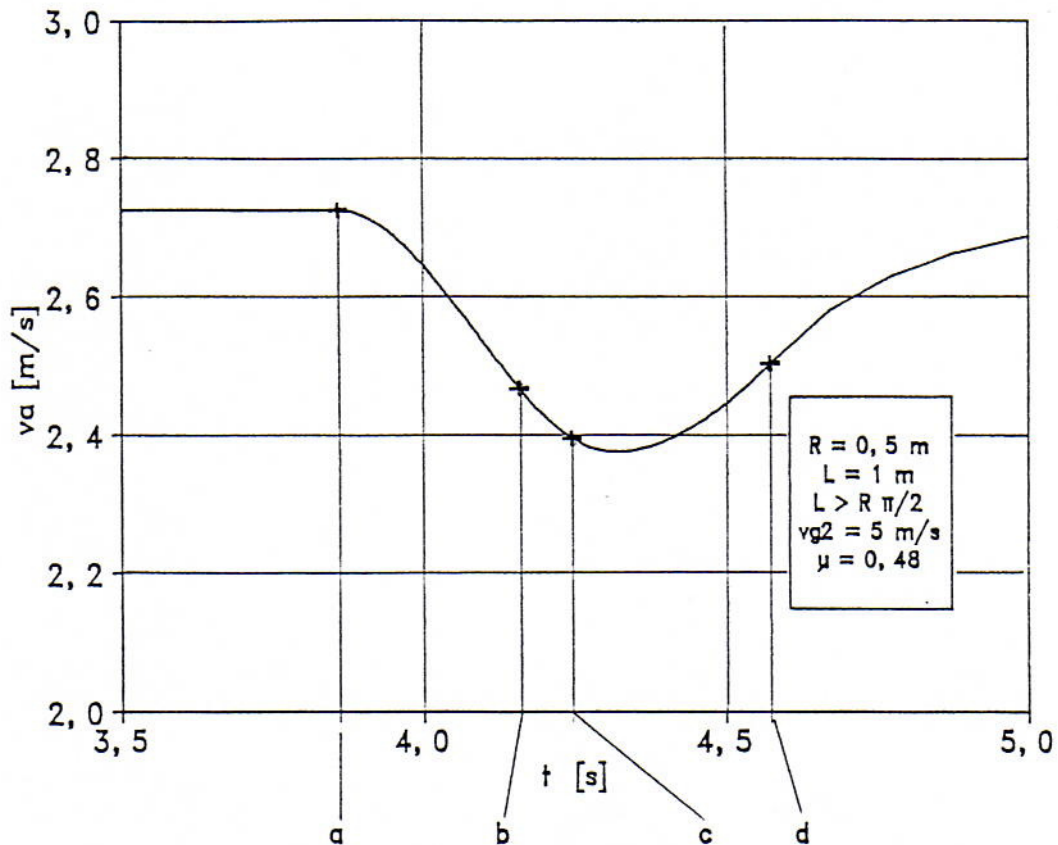
ekkor negatív, azaz a dugó lassulva mozog. A „c” és „d” pontok között, azaz az ív ürülésének fázisában az eredő erő előjele megfordul, pozitívvá válik, ami a dugó gyorsuló mozgásához vezet. A „d” pont után, azaz az ív teljes elhagyását követően az ívben lelassult anyagdugó az ábra szerinti egyre csökkenő pozitív eredő erő következtében, csökkenő gyorsulással halad tovább a csatlakozó egyenes szakaszban.

A 6.48. és 6.49. ábrák a „ v_a ”-val jelölt anyagsebesség változását mutatják az ívben, illetve a csatlakozó egyenes csőszakaszokban. Az ábrából látható, hogy az anyagdugó legkisebb sebessége az ív ürülésének fázisában, azaz a „c” és „d” pontok között található.



6.48. ábra. Az anyagdugó sebessége az idő függvényében. A vízszintes síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

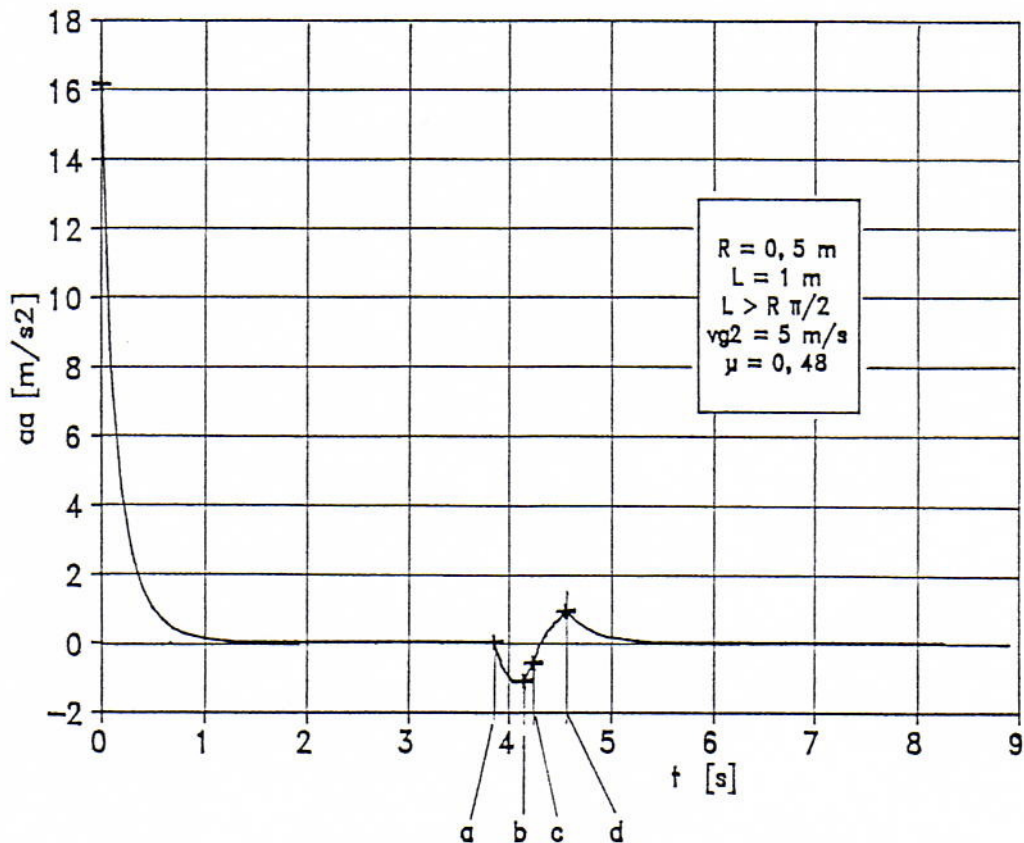
- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van



6.49. ábra. Az anyagdugó sebessége a vízszintes síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

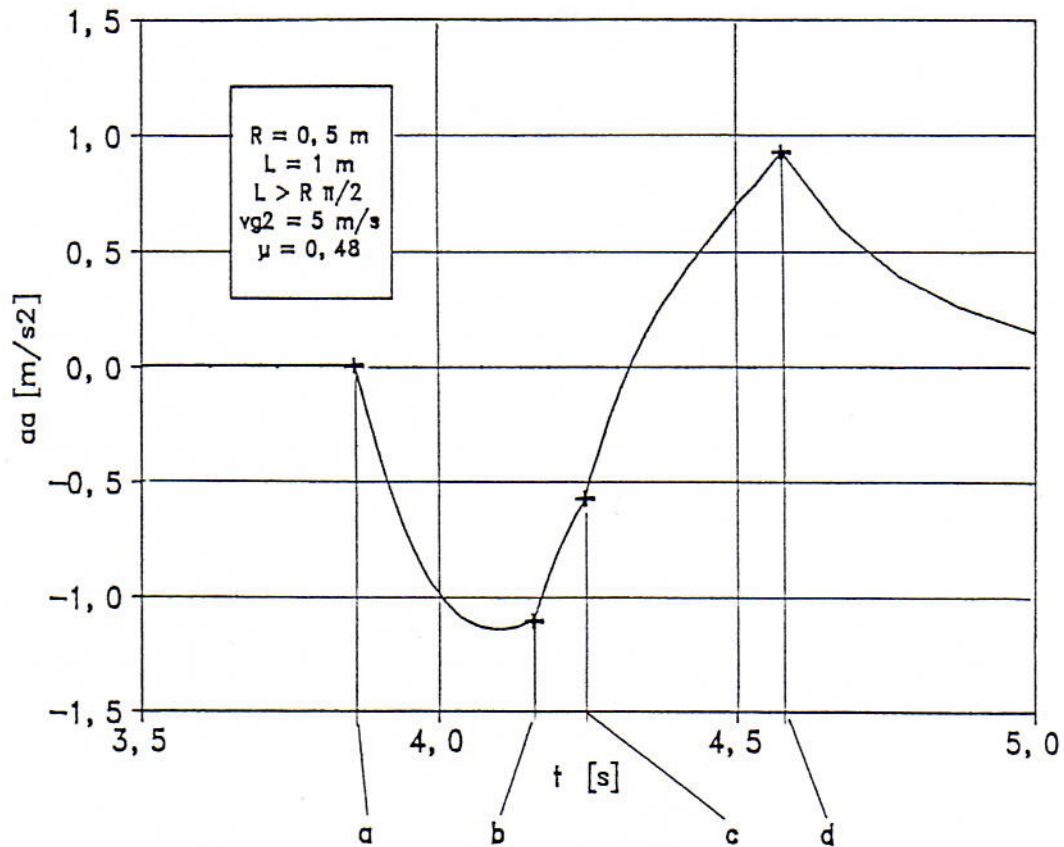
A 6.50. és 6.51. ábrákban az anyagdugó gyorsulását láthatjuk az idő függvényében magában az ívben és a csatlakozó egyenes szakaszokban. A $t=0$ időpontbeli nagy kezdeti gyorsulás az álló anyagdugó illetve az ebből származó legnagyobb relatív sebesség következménye. Az ívhez csatlakozó egyenes szakaszokban a gyorsulás értéke rövid idő alatt lecsökken közel zérus értékre, ami az anyagdugó közel állandó sebességű mozgását eredményezi.



6.50. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A vízszintes síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.51. ábra alapján megállapítható, hogy a legnagyobb lassulás értéke az ív töltődésének fázisában az „a” és „b” pontok közötti időintervallumban alakult ki, míg az ívbeli mozgás legnagyobb gyorsulás értéke az ívet éppen elhagyó dugóhoz tartozik (lásd az ábrán a „d” pontot).

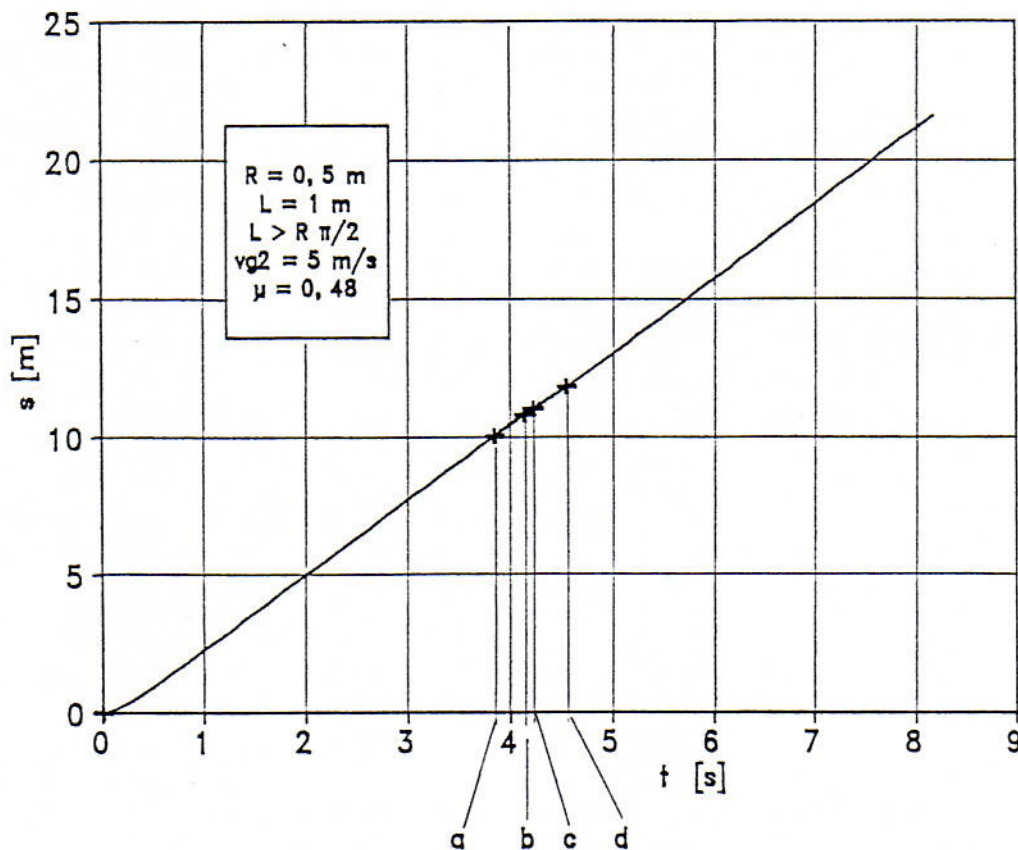


6.51. ábra. Az anyagdugó gyorsulása a vízszintes síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.51. ábrán a gyorsulás értéke az ív ürülésének fázisában a „c” és „d” pontok között előjelet vált. A pillanatnyi zérus hely összhangban van a 6.47. ábra hajtóerő és súrlódási erő görbéinek metszéspontjával, ami egyúttal az eredő erő zérus helyét is mutatja.

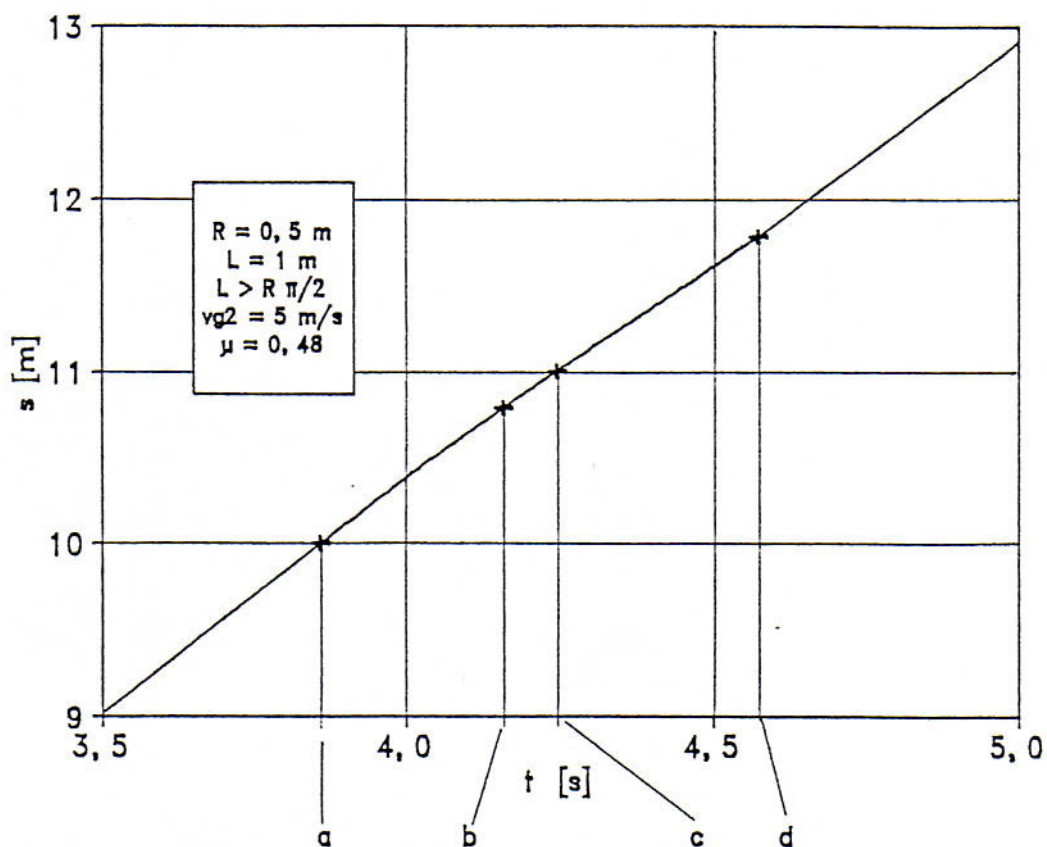
A 6.52. és 6.53. ábrákban az anyagdugó által megtett utat mutatjuk be az idő függvényében az ívben és a csatlakozó egyenes szakaszokban.



6.52. ábra. Az anyagdugó által megtett út az idő függvényében. A vízszintes síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.52. ábrából jól kivehető, hogy az ív előtti egyenes szakaszban mozgó anyagdugó által megtett út-idő kapcsolat (rövid szakaszt leszámítva) közelítőleg lineáris.



6.53. ábra. Az anyagdugó által megtett út a vízszintes síkú ívben kinagyított léptékben.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó homloklapja az ív végénél van
- c. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.53. ábra alapján megállapítható, hogy a különböző mozgási fázisok illesztési helyein a különböző differenciálegyenletek megoldásaiként adódott út-idő függvények folytonosak.

6.4.2. Az anyagdugó hossza: $L < R\pi/2$

a. Az anyagdugó tölti az ívet

Ez a periódus addig tart, míg az anyagdugó ① keresztmetszete el nem éri az ív elejét. A mozgást leíró differenciálegyenlet azonos a 6.115. egyenlettel, azaz

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^*$$

$$z^* = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{71} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 + \frac{\mu}{2} \alpha \left\{ 1 - \left[\frac{8\pi_o}{R^*} (R^* z^*)^4 + 1 \right]^{1/2} \right\}$$
(6.130)

Az összefüggésben a „ C_{71} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

$$C_{71} = -\pi_o (\pi_2 p_2^* + \mu)$$

A kezdeti feltételek, ha az ív előtti csatlakozó egyenes szakaszban (az ívbe történő belépésnél) az anyagdugó sebességét „ $[v_a^*]_a$ ”-val jelöljük, akkor:

$$t^* = t_a^* \text{-nál} \quad \alpha(t_a^*) = 0$$

$$t^* = t_a^* \text{-nál} \quad z^*(t_a^*) = \frac{[v_a^*]_a}{R^*}$$
(6.131)

b. Mozgás az ívben

A 6.54. ábrában az ívben mozgó anyagdugó ①-el jelölt keresztmetszetét „ α ” szöghelyzetben rajzoltuk meg. Ez a mozgás addig tart, míg a szög az $\alpha = \pi/2 - \alpha_o$ értéket fel nem veszi.

A súrlódási erő értéke a 6.123. egyenletből határozható meg. A $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \alpha + \alpha_o$ határok között történő integrálás eredményeként a súrlódási erő értékére kapjuk, hogy:

$$F_s = \mu R A \rho_h \alpha_o \left[\frac{v_a^4}{R^2} + g^2 \right]^{1/2}$$
(6.132)

Az ívben mozgó dugó mozgásegyenlete ezek után:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = A \Delta p - F_s$$
(6.133)

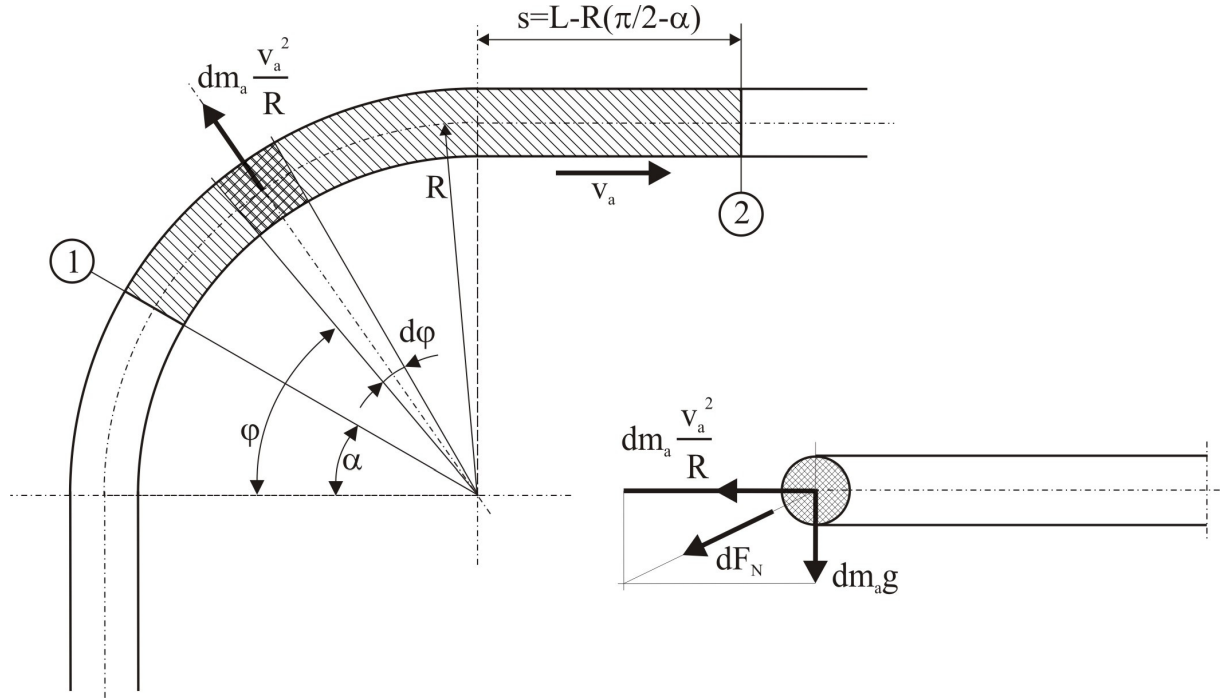
A 6.133. egyenlet – figyelembe véve a 6.12. és 6.132. egyenleteket – átalakítás, rendezés és dimenziótlanítás után az alábbi módon írható:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^*$$

$$z^* = \frac{dz^*}{dt^*} = C_{81} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu \alpha_o}{2} \left[\frac{8 \pi_o}{R^*} (R^* z^*)^4 + 1 \right]^{1/2} \quad (6.134)$$

Az összefüggésben a „ C_{81} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

$$C_{81} = -\pi_o \pi_2 p_2^*$$



6.54. ábra. Az anyagdugó mozgása a vízszintes síkú ívben. A dugóhossz: $L < R\pi/2$. A „ φ ” szöghelyzetben kimetszett elemi anyagdugóra ható erők

c. Az ív ürülése

Az ív ürülése akkor kezdődik el, amikor az anyagdugó ① keresztmetszete (lásd a 6.54. ábrát) az $\alpha = \pi/2 - \alpha_o$, és befejeződik akkor, amikor az $\alpha = \pi/2$ szöghelyzetben van.

A mozgást leíró differenciálegyenlet azonos a 6.128. egyenlettel, azaz:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt^*} = z^* \quad \frac{dz^*}{dt^*} = C_{91} + \left[\frac{k}{d_{hs}^*} \rho_{g2}^* p_2^* (v_{g2}^* - R^* z^*)^2 \pi_1 + p_2^{*2} \right]^{1/2} \pi_o \pi_2 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left[\frac{8 \pi_o}{R^*} (R^* z^*)^4 + 1 \right]^{1/2} - \frac{\mu}{2} \alpha \quad (6.136)$$

Az összefüggésben a „ C_{91} ” összevont dimenziótlan állandó értéke:

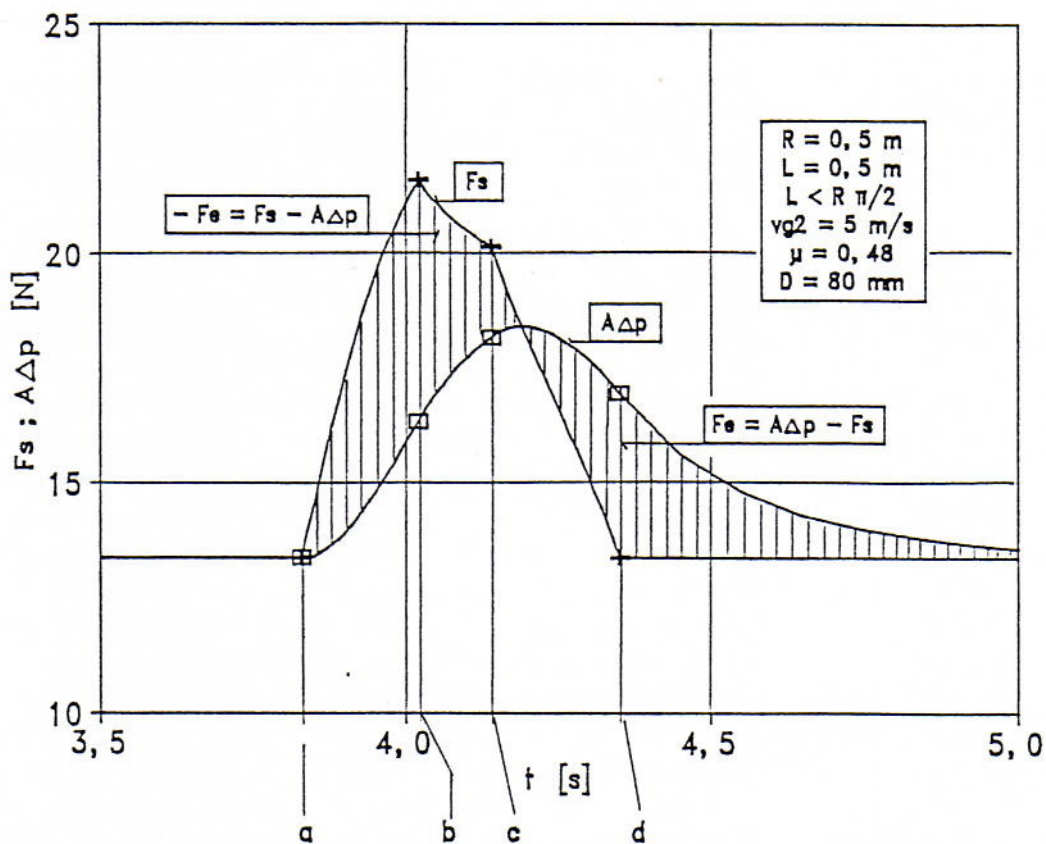
$$C_{91} = -\pi_o \pi_2 p_2^* + \mu \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2R^*} \right)$$

A kezdeti feltételek a 6.4.2.b. fejezet részben (mozgás az ívben) leírt differenciálegyenlet azon megoldásából származnak, amely az $\alpha = \pi/2 - \alpha_0$ szöghelyzetben lévő anyagdugó kinematikai jellemzőit adják. Ha ekkor „ z^* ” értékét „ $[z^*]_c$ ”-vel jelöljük, akkor a kezdeti feltételek a következők:

$$\begin{aligned} t^* &= t_c^* \text{-nél} & \alpha(t_c^*) &= \pi/2 - \alpha_0 \\ z^*(t_c^*) &= [z^*]_c \end{aligned} \quad (6.137)$$

d. Számítással meghatározott diagramok

A 6.55. – 6.61. ábrákban a 6.1.3. fejezet részben ismertetett anyagjellemzőjű „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból álló anyagdugó kinematikai jellemzőit láthatjuk.

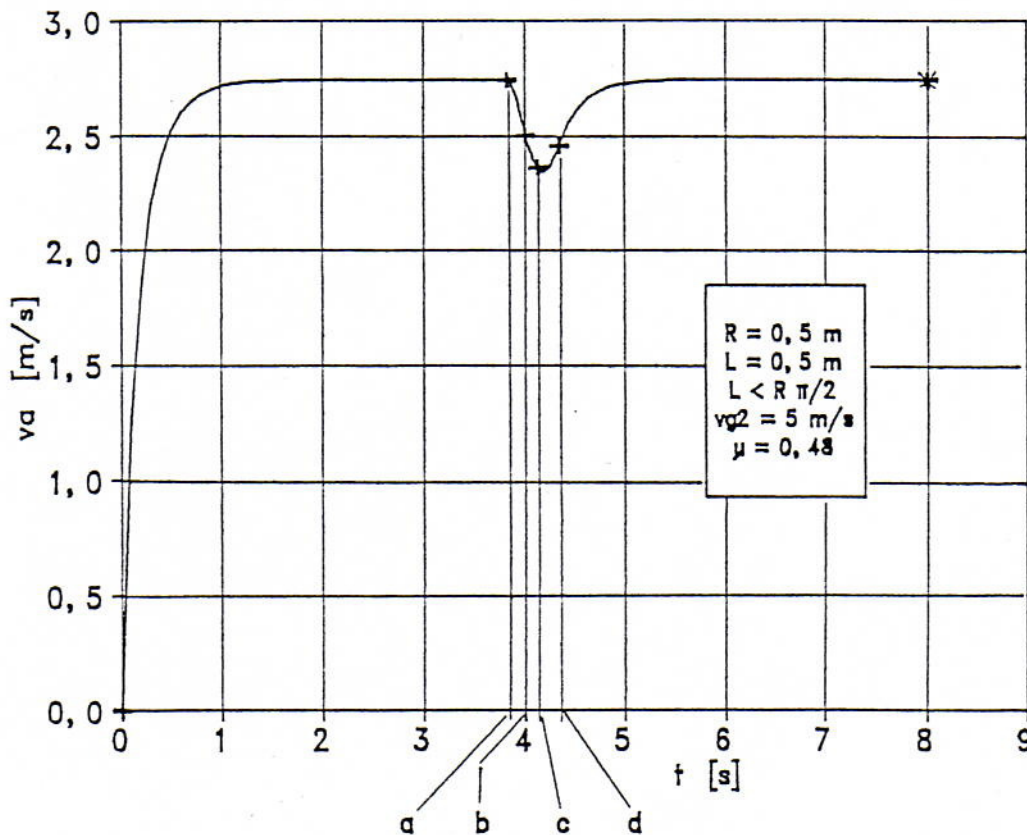


6.55. ábra. Az anyagdugóra ható „ F_e ” eredő erő változása az idő függvényében. Vízszintes síkú ív.

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.55. ábrában az anyagdugóra ható „ F_e ”-vel jelölt eredő erő változása az idő függvényében, amit függőleges vonalkázással emeltünk ki. Az ábrából jól látható, hogy a vízszintes síkú ív előtti és utáni egyenes szakaszban a dugóra ható súrlódási erő azonosan állandó. Az „a” pont után, azaz a dugó homloklapjának ívbe lépését követően a súrlódási erő a centrifugális erő

miatt megnő és legnagyobb értékét a dugó hátlapjának ívbe lépésekor, azaz a „b” pontbeli helyzetében éri el. Az ábrából az is kiolvasható, hogy a hajtóerő növekedése a fenti időintervallumban kisebb mértékű, tehát az eredő erő ekkor negatív, azaz a dugó lassulva mozog.

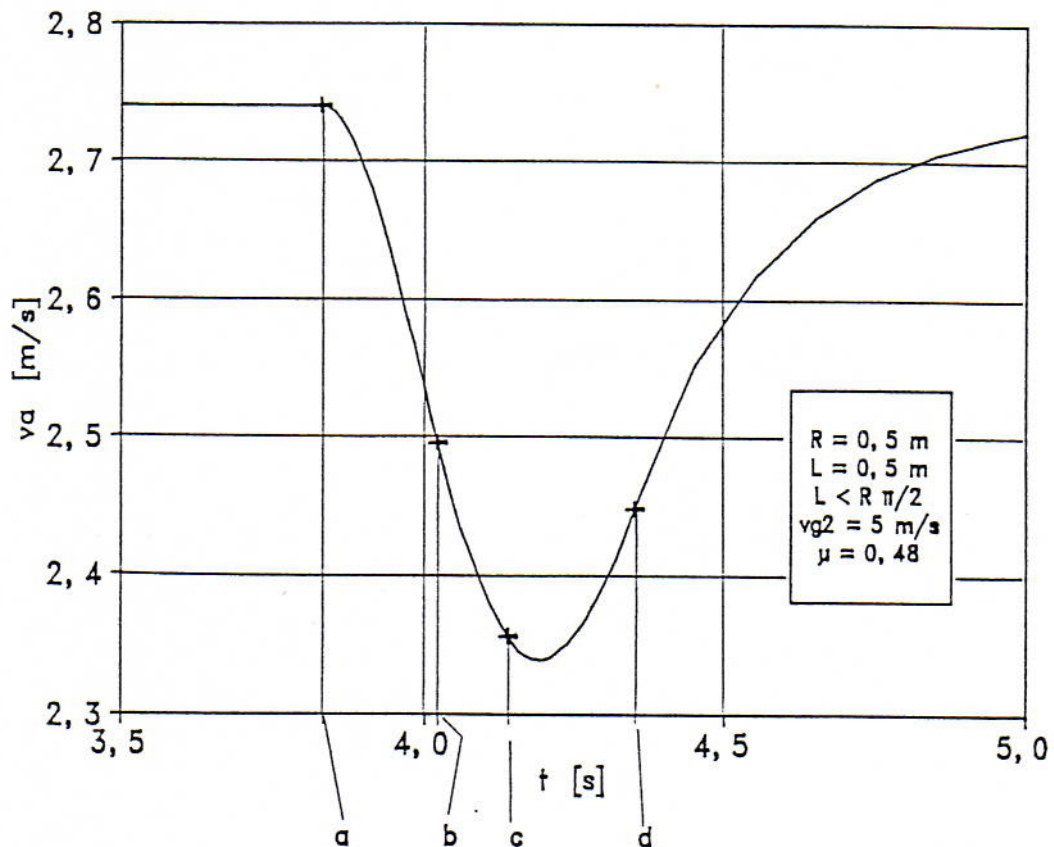


6.56. ábra. Az anyagdugó sebessége az idő függvényében. A vízszintes síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A „c” és „d” pontok között, azaz az ív ürülésének fázisában az eredő erő előjele megfordul, pozitívvá válik, ami a dugó gyorsuló mozgásához vezet.

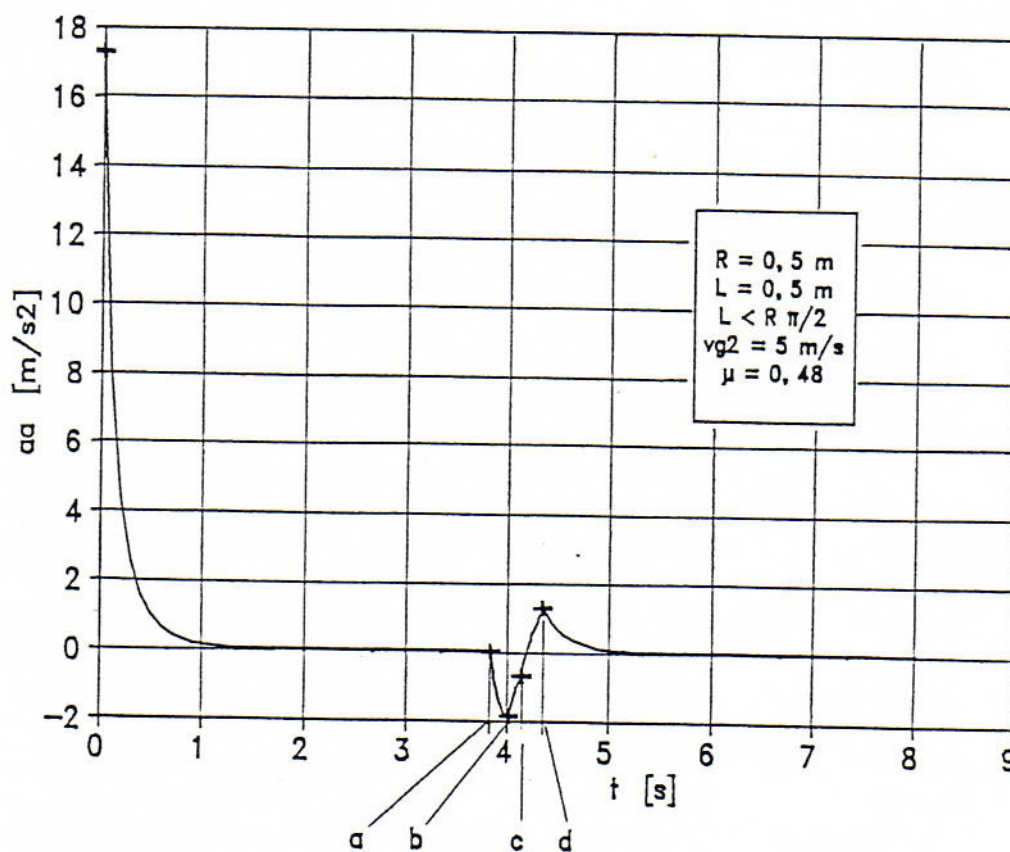
A 6.56. és 6.57. ábrák a sebesség változását mutatják az idő függvényében az ívben, illetve a hozzá csatlakozó egyenes csőszakaszokban. A vízszintes síkú ívben mozgó anyagdugó sebessége az ív töltődésének fázisában (az „a” és „b” pontok között) valamint a teljes ívhossznál rövidebb hosszúságú dugó ívbeli mozgása közben (a „b” és „c” pontok között) folyamatosan csökken. Az ív ürülésének fázisában (a „c” és „d” pontok között) adódik a legkisebb sebesség érték és ugyanebben a pontban a gyorsulás értéke előjelváltás közben zérus.



6.57. ábra. Az anyagdugó sebessége vízszintes síkú ívben kinagyított léptékben

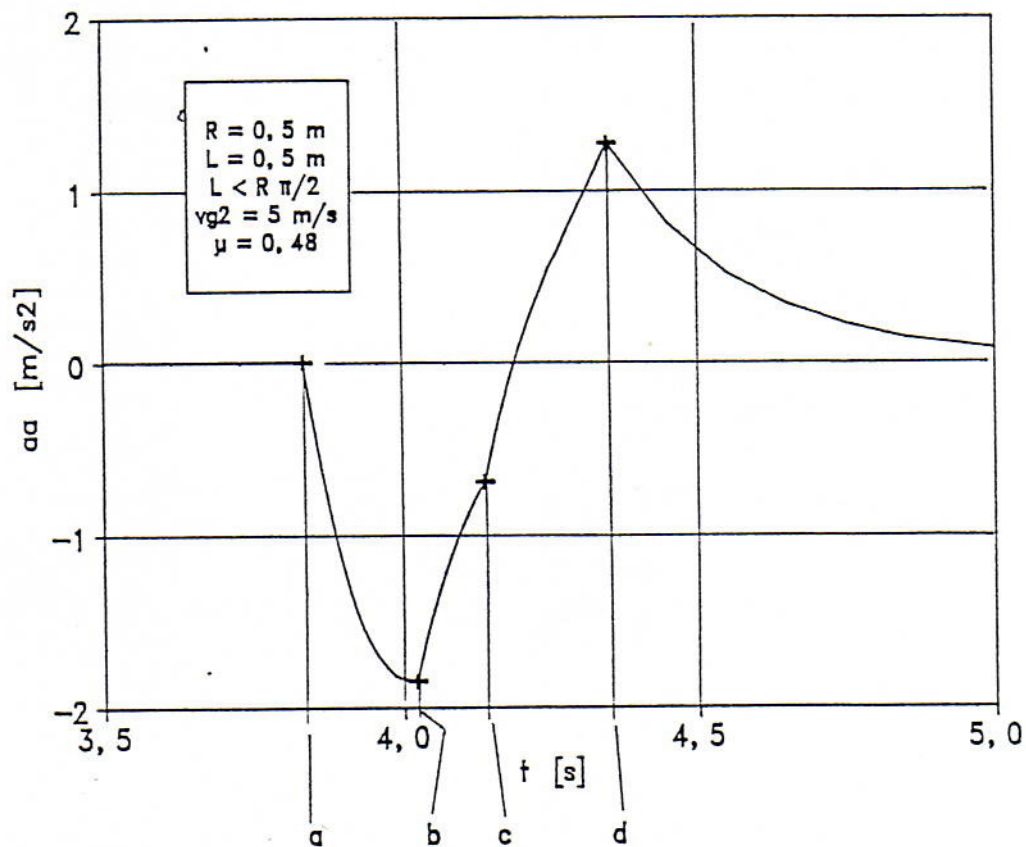
- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.58. és 6.59. ábrák a gyorsulást mutatják az idő függvényében. A 6.59. ábrából kiolvasható, hogy az ívbéli mozgás közben a „b” pontban, azaz a teljes dugó ívbe lépésének időpontjában adódik a legnagyobb lassulás érték, míg a legnagyobb gyorsulással az ívet a „d” pontban éppen elhagyó dugó mozog.



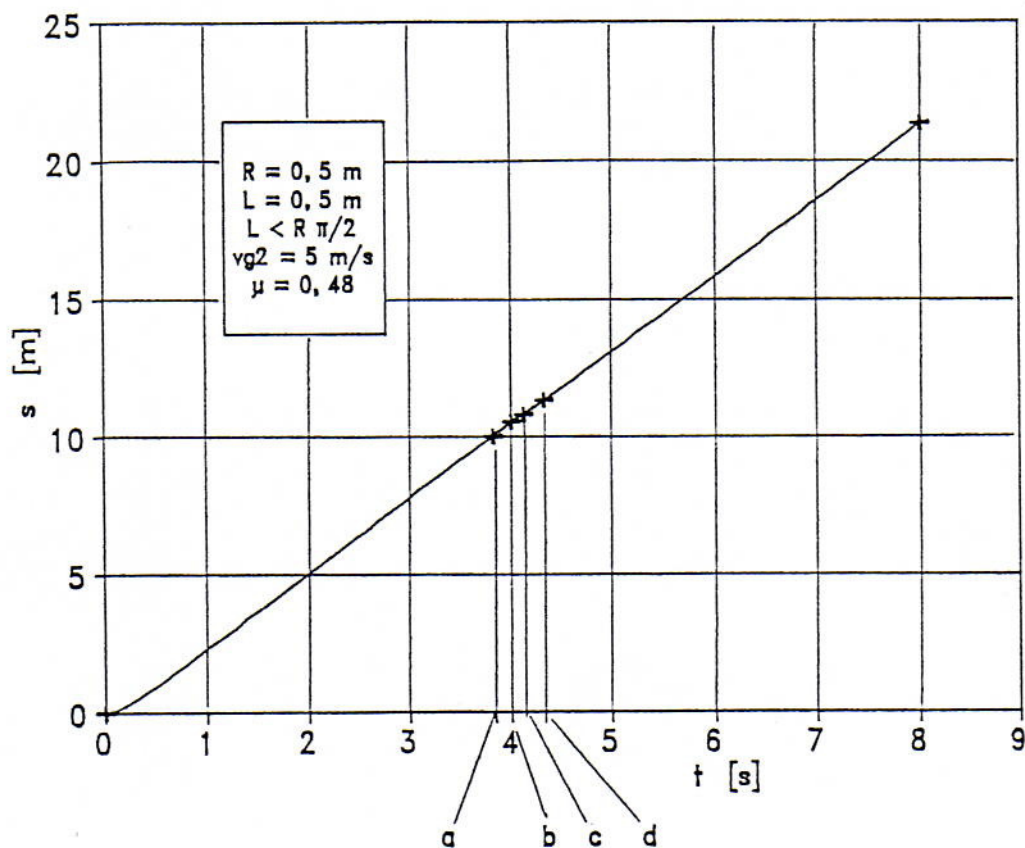
6.58. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A vízszintes síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8\text{m}$, az ív után $l=10\text{m}$

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van



6.59. ábra. Az anyagdugó sebessége vízszintes síkú ívben kinagyított léptékben
 a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
 b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
 c. A dugó homloklapja az ív végénél van
 d. A dugó hátlapja az ív végénél van

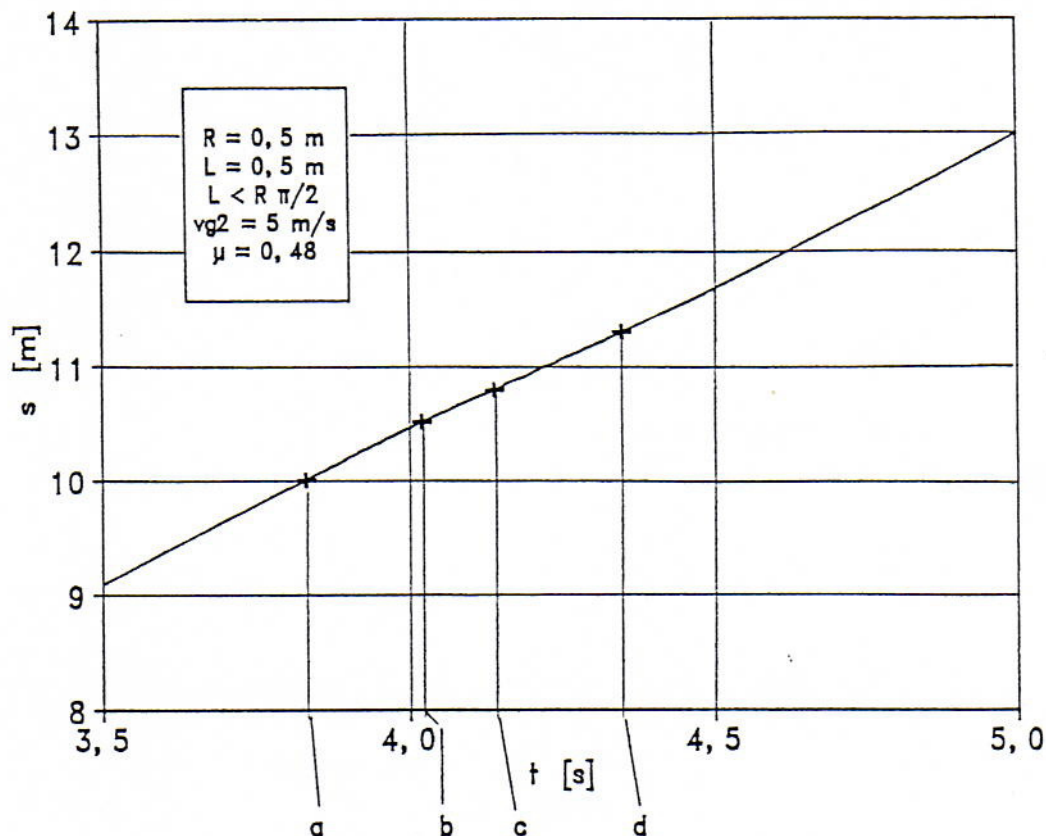
A 6.60. illetve 6.61. ábrák az anyagdugó által megtett utat mutatják az idő függvényében. A 6.60. ábrából jól kivehető, hogy az ív előtti egyenes szakaszban mozgó, illetve az ívet elhagyó, csatlakozó egyenes szakaszban mozgó anyagdugó által megtett út-idő kapcsolat (rövid szakaszt leszámítva) közelítőleg lineáris és az egyenesek azonos meredekségűek, hiszen a vízszintes csőhelyzet határsebessége is azonos.



6.60. ábra. Az anyagdugó által megtett út az idő függvényében. A vízszintes síkú ív előtti egyenes szakasz hossza $l=8$ m, az ív után $l=10$ m

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

A 6.61. ábrában kinagyított léptékben ábrázoltuk az anyagdugó által megtett utat az idő függvényében. Az ábra alapján megállapítható, hogy a különböző mozgási fázisok illesztési helyein a különböző differenciálegyenletek megoldásaiként adódott út-idő és sebesség-idő függvények folytonosak.



6.61. ábra. Az anyagdugó által megtett út az idő függvényében a vízszintes síkú ívben kinagyított léptékben

- a. A dugó homloklapja az ív elejénél van
- b. A dugó hátlapja az ív elejénél van
- c. A dugó homloklapja az ív végénél van
- d. A dugó hátlapja az ív végénél van

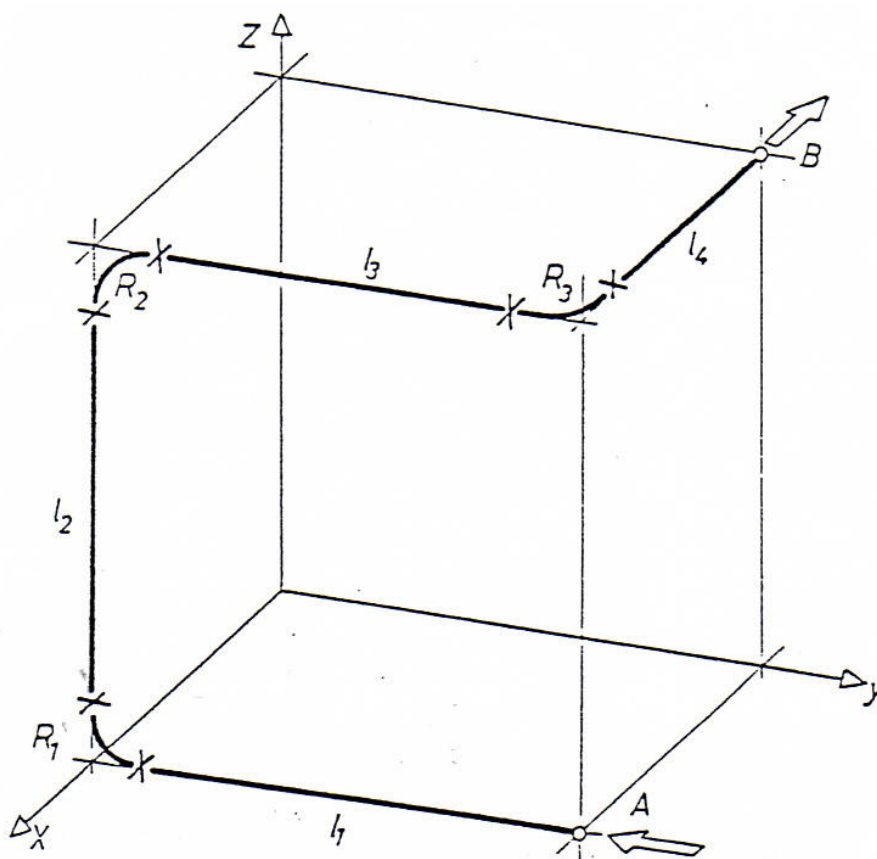
6.5. Különböző térbeli elhelyezkedésű ívekből és egyenes szakaszokból összetett pneumatikus szállítóvezetékben mozgó anyagdugó

6.5.1. A kinematikai jellemzőket bemutató diagramok

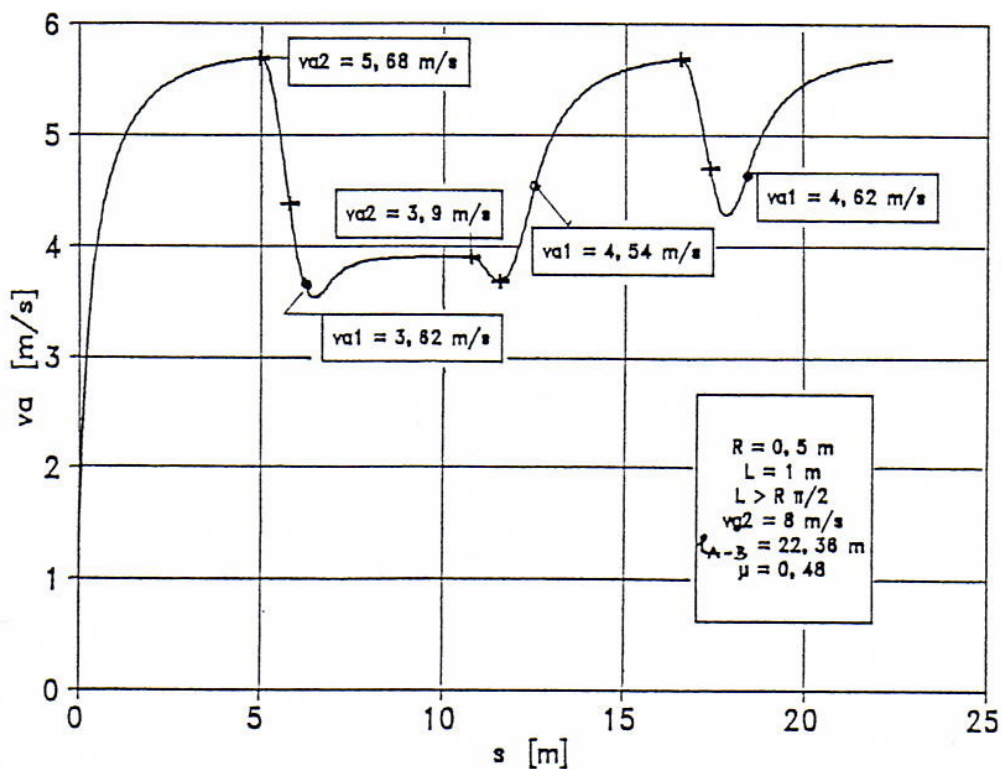
A 6.62. ábrában bemutatott vonalvezetésű szállítóvezeték teljes hossza $L_{AB}=22.36\text{m}$. Az anyagdugó az „A” helyen lép be a vezetékbe és elhagyja azt a „B” jelű pontban. Az anyagdugó úgy helyezkedik el a csőben, hogy a \odot -vel jelölt homloklapfelülete az indulás pillanatában az „A”-val jelölt pontban van. Az anyagdugó a már említett „AGELON” elnevezésű alumíniumoxid golyókból áll. Az anyagjellemzők értékeit lásd a 6.1.3. fejezetben.

A levezetett egyenletek megoldásaként kapott eredményeket a 6.63. – 6.67. ábrákban mutatjuk be.

A 6.63. és 6.64. ábrákban az anyagdugó sebességét láthatjuk az út, valamint az idő függvényében ábrázolva

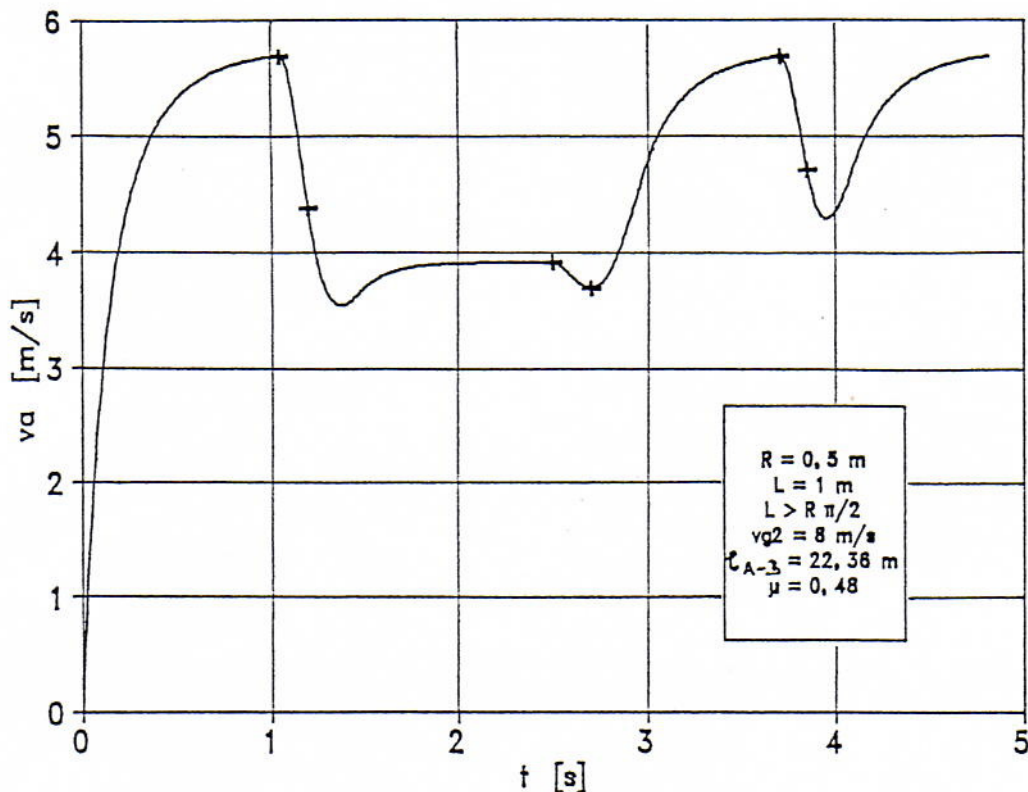


6.62. ábra. $L_{AB}=22.36\text{m}$ hosszú, különböző térbeli elhelyezkedésű ívekből összetett pneumatikus szállítóvezeték. $L_1=L_2=L_3=L_4=L=5\text{m}$; $R_1=R_2=R_3=R=0.5\text{m}$



6.63. ábra. Az anyagdugó sebessége az út függvényében. A keresztek a sebességet jelzik az ív elején és végén, a csillaggal jelölt helyek pedig az anyagdugó sebességét mutatják akkor, amikor a dugó ①-el jelölt keresztmetszete elhagyja az ívet

A $v_a=0$ kezdősebességgel induló anyagdugó sebessége $v_{a2}\approx 5.68\text{m/s}$ értékre nő az első $L_1=5\text{m}$ vízszintes egyenes szakasz megtétele után. A vízszintesből függőlegesbe vezető ívben a sebesség a dugóra ható többlet erők következtében csökken. Tekintettel arra, hogy a függőleges síkú ív vízszintes csővezetékét köt össze függőleges csővezetékkel, amelyben a szállító gáznak az ívben előálló járulékos erőn túlmenően az anyag súlyát is emelni kell, ezért a sebesség az egyenes szakaszban is tovább csökken egy darabig.



6.64. ábra. Az anyagdugó sebessége az idő függvényében. A keresztek az ív elejét és végét jelzik

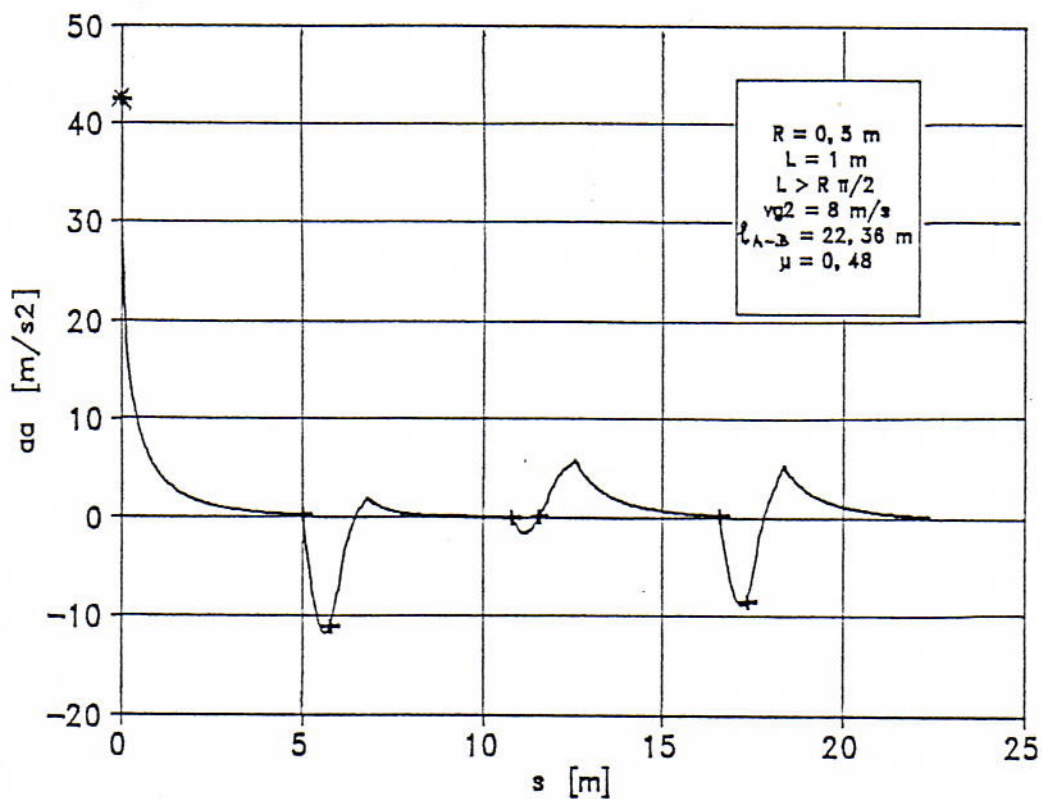
Ha az anyagdugó sebességét „ v_{a1} ”-el jelöljük akkor, amikor a dugó ① jelű hátlapja elhagyja az ívet, akkor az ívet elhagyó anyagdugó erről a sebességről felgyorsul arra a sebességre, ami az ív után csatlakozó egyenes szakasz megtétele után a szakasz végéhez tartozik. Ha ezt a sebességet „ v_{a2} ”-vel jelöljük, akkor az ívhez csatlakozó egyenes szakaszban létrejövő sebességnövekedés számszerű értéke az ábrából kiolvashatóan az alábbi:

- A vízszintesből függőlegesbe vezető ívet követő egyenes szakaszban:
 $\Delta v_a = v_{a2} - v_{a1} = 3.9 - 3.62 = 0.28\text{m/s}$
- A függőlegesből vízszintesbe vezető ívet követő egyenes szakaszban:
 $\Delta v_a = v_{a2} - v_{a1} = 5.68 - 4.54 = 1.14\text{m/s}$
- A vízszintes síkú ívet követő egyenes szakaszban pedig:
 $\Delta v_a = v_{a2} - v_{a1} = 5.68 - 4.62 = 1.06\text{m/s}$

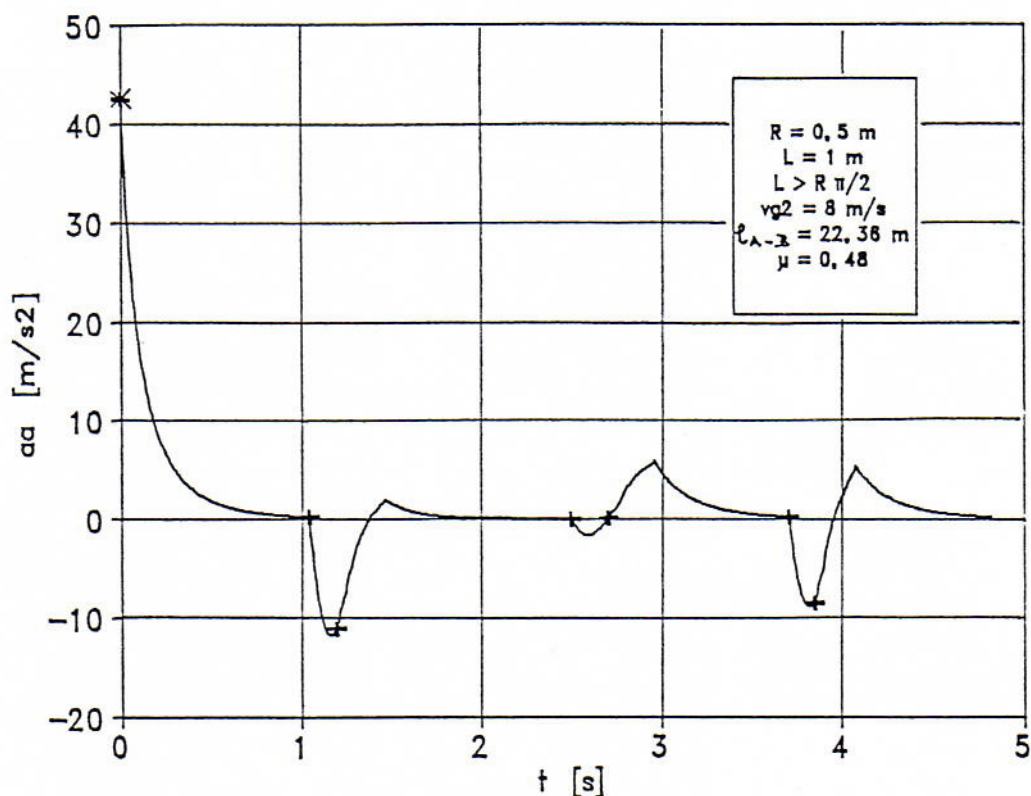
A számszerű adatokból is látható, hogy a legnagyobb sebességnövekedés a függőlegesből vízszintesbe vezető ívet követő egyenes szakaszban adódik, a legkisebb pedig a vízszintesből függőlegesbe vezető ívet követő egyenes szakaszban.

Az ívet követő egyenes szakaszban létrejövő sebességnövekedés tehát függ az ívtől és az ív után elhelyezkedő egyenes szakasz térbeli helyzetétől, illetve annak hosszától is. Ha ugyanis pl. a vízszintes síkú ívnél az ív után csak rövid egyenes szakasz csatlakozna az ívhez, ahol az anyagdugó nem tudna felgyorsulni, akkor a sebességnövekedés mértéke is más lenne.

A 6.65. és 6.66. ábrák az anyagdugó gyorsulását mutatják az út valamint az idő függvényében.

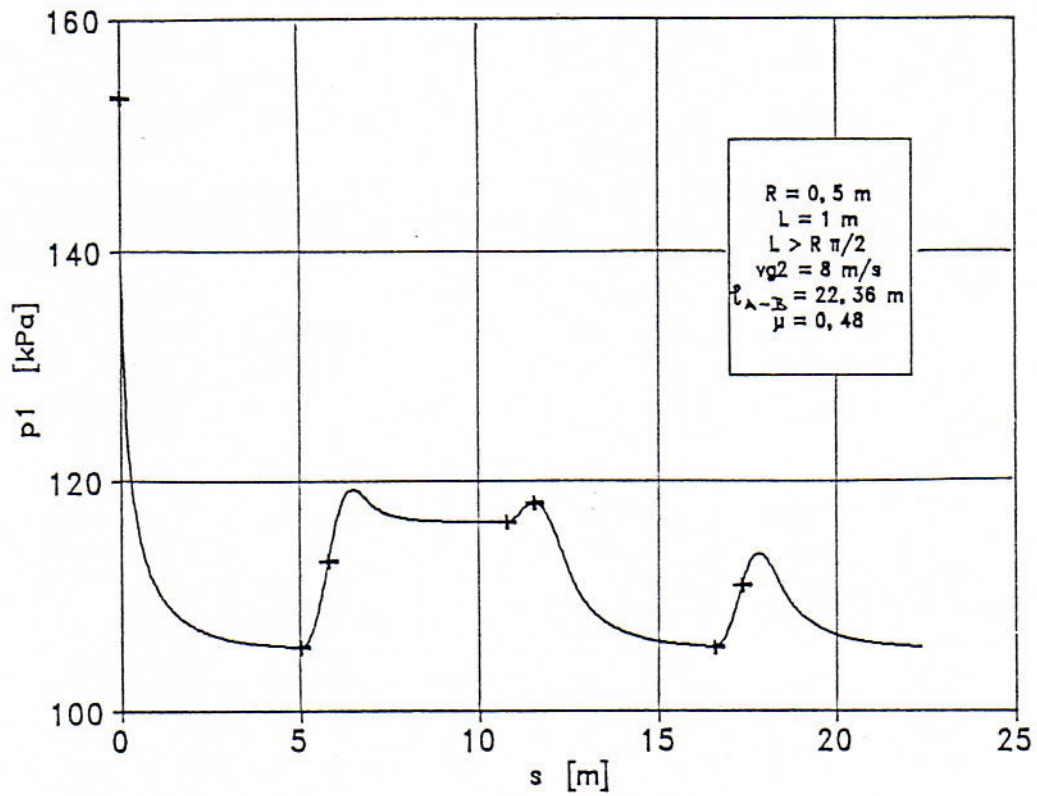


6.65. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az út függvényében. A keresztek az ív elejét és végét jelzik

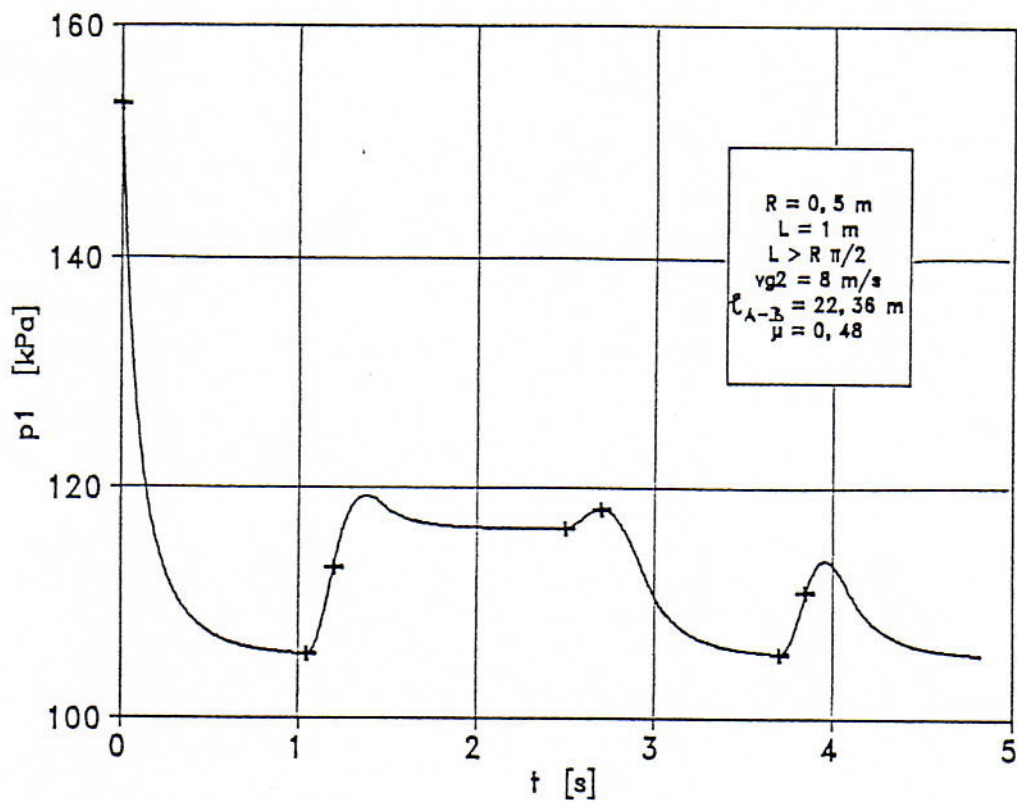


6.66. ábra. Az anyagdugó gyorsulása az idő függvényében. A keresztek az ív elejét és végét jelzik

A 6.67. és 6.68. ábrákban a nyomás tengelyen abszolút nyomás skálabeosztást választottunk. Az $s=0$ helyen, illetve a $t=0$ időpontban adódó nagy nyomásérték a $v_a=0$ anyagsebesség illetve az ebből adódó kezdeti nagy relatív sebesség következménye. A „ p_I ”-el jelölt anyagdugó előtti nyomás időbeli változása megegyezik a csővezeték tápláló dugattyús kompresszor nyomásának időbeli változásával, amennyiben eltekintünk a csővezeték eleje és a mozgó anyagdugó pillanatnyi helyzete között előálló, a mozgás során egyre növekvő csőtérfogatban lévő gáztömeg kompressziójától (expanziójától).



6.67. Az anyagdugó előtti nyomás változása az út függvényében. A keresztek az ív elejét és végét jelzik



6.68. ábra. Az anyagdugó előtti nyomás változása az idő függvényében. A keresztek az ív elejét és végét jelzik

A nyomás – illetve dugósebesség eloszlások összehasonlítása alapján megállapítható, hogy a légáteresztő anyagdugó mozgása közben keletkező nyomásesés közelítőleg arányos a hozzátartozó relatív sebesség négyzetével. Fentiek illusztrálására a bemutatott mintapélda adataival az egyenes szakaszok végén az alábbi, közel állandósult relatív sebesség és nyomásesés adatok olvashatók ki az ábrákból:

Vízszintes csőben:	$w_2=2.32\text{m/s}$	$\Delta p_2 = 5.5\text{kPa}$
Függőleges csőben:	$w_2=4.10\text{m/s}$	$\Delta p_2=16.4\text{kPa}$

6.5.2. A szállításhoz felhasznált levegőmennyiség

A 6.67. illetve 6.68. ábrából kiolvasható, hogy amikor az anyagdugó a „B” pontot elhagyja a csővezeték, a vezetékben a nyomás értéke: $p_1=105.5\text{kPa}$. Ha a vezeték $D=80\text{mm}$ átmérőjű, akkor a vezetékben

$$V_1 = \frac{D^2 \pi}{4} L_{AB} = \frac{0.08^2 * \pi}{4} * 22.36 = 0.112\text{m}^3$$

„ p_1 ” nyomású levegő foglal helyet.

Az előbbi „ V_1 ” térfogat légköri nyomáson:

$$V_{1o} = V_1 \frac{p_1}{p_o} = 0.112 * \frac{105.5}{100} = 0.118\text{m}^3$$

Ebből a levegőmennyiségből, amint a dugó ①-el jelölt hátlapja elhagyja a „B” jelű csővéget a szabadba távozik és így veszendőbe megy a

$$\Delta V = V_{1o} - V_1 = 0.118 - 0.112 = 0.006\text{m}^3 \quad \text{térfogat.}$$

A dugó, amíg annak a ②-vel jelölt homloklapja a „B” pontot eléri a 6.66. ábrából kiolvashatóan $t_1 \approx 4.82\text{s}$ ideig tartózkodik a vezetékben. Az az idő, amely az indulástól számítva eltelik addig, míg a dugó ① jelű hátlapja a „B” pontba ér a $v_{a2} \approx 5.68\text{m/s}$ közelítőleg állandó sebesség figyelembe vételével számítható, és az $L=1\text{m}$ hosszú anyagdugó távolságának megtételével több, mint a „ t_1 ” idő. Írható, hogy:

$$t \approx t_1 + \frac{L}{v_{a2}} = 4.82 + \frac{1}{5.68} = 4.996\text{s} \approx 5\text{s}$$

Ez alatt az idő alatt a dugón átáramlott légköri nyomású levegő sebessége $v_{g2}=8\text{m/s}=\text{konst.}$ A számpélda adatai szerint. Az ebből származó levegőfogyasztás:

$$V_{2o} = \varepsilon \frac{D^2 \pi}{4} v_{g2} t = 0.514 * \frac{0.08^2 * \pi}{4} * 8 * 5 = 0.103\text{m}^3$$

Egy anyagdugó elszállításához felhasznált levegő térfogata légköri nyomáson ezek után:

$$V_o = \Delta V + V_{2o} = 0.006 + 0.103 = 0.109\text{m}^3$$