Áramlások Numerikus Szimulációja felkészülést segítő kérdések

2018.05.07.

1) Mi a sebességtér divergenciájának fizikai jelentése? (definíció, fizikai jelentés levezetés).

2) Írja fel és vezesse le a tömegmegmaradás egyenletét a következő modellen és magyarázza el, hogy az miként jelenti a tömeg megmaradását!
2.1) térben rögzített véges kontroll térfogat modellje (konzervatív, integrál alak)
2.2) térben rögzített végtelenül kicsi térfogategység modellje (konzervatív, differenciál)
2.3) folyadékkal együtt mozgó kontroll térfogat modellje (nem-konzervatív, integrál)
2.4) folyadékkal együtt mozgó végtelenül kicsi térfogategység modellje (nem-konzervatív, differenciál)

3) Milyen megmaradási egyenletek teljesülnek áramlástanban? (A megnevezés elegendő.) Általános estben egy további egyenlet szükséges, melyik?

4) Írja fel a mozgásegyenletet legalább egyik irányban (vagy 3 dimenziós alakban) és magyarázza a tagok fizikai jelentését. (A feszültség tenzort írja fel Newtoni közeg esetére, de a behelyettesítéstől tekintsen el.)

5) Milyen egyszerűsítések mellett használhatóak, és ezek milyen egyenletekre vezetnek a következő típusú áramlások modellezésénél:
5.1) összenyomhatatlan, izoterm áramlás
5.2) súrlódásmentes áramlás
5.3) összenyomhatatlan, potenciálos áramlás
5.4) kúszó áramlás

6) Taylor sorok segítségével vezesse le a következő véges differencia approximációt. Mit és milyen rendben közelít az adott séma?
6.1) Hátralépéses Euler séma (Backward Euler)
6.2) Előrelépéses Euler séma (Forward Euler)
6.3) Centrális (középponti) differencia séma

7) Taylor sorok segítségével vezessen le:
7.1) egy másodrendű, **egyoldali(!)** differencia sémát az első derivált $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$ értékére
7.2) egy másodrendű differencia sémát a második derivált értékére $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)$

8) Vizsgálja az egy-dimenziós, állandósult, konvektív-diffúzív transzport egyenletet (a sebesség és sűrűség tér ismert, a diffúziós együttható konstans).
:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

A peremfeltételek: $\phi(0) = 1$, $\phi(L) = 3$. A tartomány $x \in [0, L]$

a)Adjon másodrendűen pontos diszkretizálást a tartomány egy belső pontjában (használjon lokális indexelést!.
b) Egy 7 rácspontból álló hálóra írja fel sematikusan a diszkretizáció után adódó lineáris egyenletrendszer mátrixát.

9) Mi a Courant szám? Magyarázza el fizika jelentését!

10) Az egy-dimenziós, instacioner konvenktív-diffúzív transzport egyenlet,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

egy belső pontjának diszkretizálásán mutassa be (írja fel és magyarázza el) a következő módszert! Mekkora a módszer térbeli és időbeli rendje? Rajzolja fel a módszer stenciljét! Írja fel az adódó egyenletrendszert vektoriális formában (mátrix műveletekkel) és jellemezze azt!
10.1) explicit Euler módszer
10.2) implicit Euler módszer

14) Mik az előnyei/hátrányai egy implicit explicit tranziens módszernek? Mutassa be stabilitási tulajdonságukat egy egyszerű közönséges differenciál egyenlet esetén!

15) Magyarázza a következő fogalmakat!
15.1) Konzisztens
15.2) Stabil
15.3) Konvergens
15.4) A módszer n-ed rendű pontosságú

16) Milyen típusú peremfeltételeket ismer? Adjon rá példát 1D esetben. (Diszkretizálni nem kell.)

17) Vezesse le az összenyomhatatlan közeg áramlását leíró egyenletekből a nyomásra felírható Poisson egyenletet!

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Mire használható az egyenlet?

18) Mutassa be a MacCormack módszert a két-dimenziós, összenyomható, súrlódásmentes áramlást leíró Euler egyenletek egyikén!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Mi a módszer pontossága? Hogyan növelhető a módszer stabilitása?

19) Milyen módszert ismer a nyomás eliminálásra 2D áramlások estén. Írja fel a szükséges egyenleteket, és mutassa be a módszer előnyét hátrányát.

20) Röviden ismertese és hasonlítsa össze a véges differencia, véges elem és véges térfogatok módszerét a következő szempontok alapján: az egyenletek alakja az implementáció nehézsége, a pontosság növelésének lehetősége tetszőleges geometria esetén.