

Csőhálózatok hidraulikája

Előadásjegyzet

Dr. Halász Gábor előadásai alapján
írta: Haraszti Péter

Utolsó frissítés: 2023. január 26.

1. Bevezetés

A tárgy keretein belül csőhálózatok (úgy mint ivóvíz, távfűtés és csatorna hálózat) állandósult és tranzienst üzemállapotai, viselkedése kerül bemutatásra.

Jelenleg a magyarországi vízművek többségénél már alkalmaznak állandósult üzemállapotok számítására alkalmas programot. A gyakorlatban előforduló csőhálózat számítási problémák nagyobb léptékűek annál, hogy kézi számítással kezelhetőek legyenek, a leggyakoribb megoldás egy megfelelő program elkészítése vagy vásárlása.

2. Ivóvíz hálózatok állandósult üzeme

Az ivóvíz hálózat összekapcsolt csövek, vezetékek, szivattyúk, idomok, szerelvények rendszere. Matematikai szemszögből a hálózat egyes részei (csövek, idomok) az ágak és a kapcsolódási pontjaik a csomópontok. Ezen ágak és csomópontok összessége gráfot alkot.

2.1. Gráfelméleti fogalmak

Csomópont fokszáma (=rangszáma): Az adott csomópontban összefutó ágak száma. Ha a csomópont fokszáma 1, akkor a külső csomópontról beszélünk, a hozzá kapcsolódó ág pedig felnívító ág. Ha a csomópont fokszáma nagyobb, mint egy, akkor az belső csomópont.

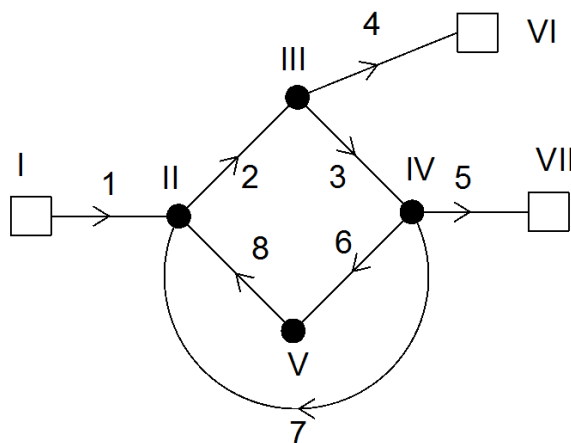
A gráf összefüggő, ha bármely csomópontból elindulva, az élek mentén haladva bármelyik csomópont elérhető.

A számítások elvégzése előtt szükséges ellenőrizni a megoldandó gráf összefüggőségét. Ha a gráf nem összefüggő, az adathibára utalhat.

Hurok (kör): A gráf ágainak olyan sorozata, melyre igaz, hogy egy csomópontból kiindulva ezen élek mentén haladva a kiinduló csomópontba térünk vissza.

Fa: Hurokmentes és összefüggő gráf.

Csőhálózatok számításánál irányított gráfot használunk. A számítást megelőzően az ágak irányítottságát önkényesen választjuk meg. Ha a közege az ág irányításával megegyező irányba áramlik az adott ágban, akkor pozitív a térfogatáram értéke. Ha ellentétes irányban áramlik, akkor negatív előjelű a térfogatáram.



1. ábra. Példa gráf

Az 1. ábrán látható egy egyszerű vízhálózat gráfja. Ez a gráf egy 7 csomópontból és 8 ágból álló irányított és hurkolt gráf. A csomópontokat római számokkal, az ágakat arab számokkal jelöltük, a jegyzet további részeiben is ezt a jelölésrendszert alkalmazzuk.

- Belső csomópontok: II., III., IV., V.
- Külső csomópontok: I., VI., VII.

↓

- Felnyitó ágak: 1., 4., 5.
- Hurkok: 2.-3.-6.-8., 6.-8.-7., 2.-3.-7.

A vízhálózatokban a 7. ághoz hasonló ágakat expressz ágak is nevezik. Az expressz ágaknak főleg nagyobb vízmennyiségek mozgatása esetén van jelentősége. Ha egy szivattyúteleppel (pl.: I.) egy, a rendszerben távolabb elhelyezkedő medencét (pl.: VII.) szeretnénk tölteni, akkor ez megvalósítható az expressz ágon, és nem a rendszer többi részét terheljük, így kisebb veszteség érhető el. Város méretű hálózatban gondolkodva ez azt jelenti, hogy nem kell egy városrész ellátására tervezett viszonylag kis átmérőjű csőrendszeren átszivattyúzni egy medence töltésére szánt vizet.

Külső csomópont lehet medence (ivóvíz hálózat), nyomástartó edény (távfűtő hálózat) vagy táglulási tartály (lakás központi fűtésrendszere).

A valós hálózatokat egyszerűsíteni szokás a számítások előtt. A kisebb átmérőjű csöveket szokásosan elhagyjuk a számításokból, mert ezeknek az eredményre kis hatása van, de a számítási időt növelik. Az egyszerűsítés után a következő lépés a gráf kódolása, melyre két elterjedt módszert mutatunk be, a csúcs-él mátrixot, és a topográfiai mátrixot.

2.1.1. Csúcs-él mátrix

A csúcs-él mátrix sorainak száma megegyezik a gráf csomópontjainak számával, oszlopainak száma pedig megegyezik a gráf éleinek számával. A mátrix elemei -1 , 0 , $+1$ értéket vehetnek fel, attól függően, hogy az adott oszlophoz tartozó ág az sorhoz tartozó csomóponttal milyen kapcsolatban van.

A mátrix elemei lehetnek:

- -1 , ha az ág "kifut" a csomópontból, vagyis az adott csomóponthoz kapcsolódik és irányítása kifelé mutat a csomóponttól.
- 0 , ha az ág nem kapcsolódik a csomóponthoz.
- $+1$, ha az ág "befut" a csomópontba, vagyis az adott csomóponthoz kapcsolódik és az irányítása a csomópont felé mutat.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| I. | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II. | +1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 |
| III. | 0 | +1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| IV. | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| V. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 |
| VI. | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| VII. | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 |

1. táblázat. Példa gráf csúcs-él mátrixa

Ez a leírásmód vízhálózatos problémáknál "híg" mátrixot eredményez, vagyis sok a 0 elem. Ez a vízhálózatok szerkezetéből adódik, mivel sok (akár több ezer) csőből is állhatnak, de egy csomópontban jellemzően 4 vagy annál kevesebb ág fut csak össze. Nagy méretű rendszer leírása esetén az ilyen "híg" mátrix sok memóriát foglal a számítások során, ami okozhat problémákat.

2.1.2. Topográfiai mátrix

A topográfiai mátrix sorai (a csúcs-él mátrixhoz hasonlóan) a gráf csomópontjait reprezentálják, viszont attól eltérően az oszlopok száma a gráfban található legnagyobb rangszámnak felel meg. A mátrix elemei az egyes ágak sorszámaival van feltöltve. Ha az ág irányítása a csomópontba mutat, akkor pozitív előjelet használunk, ha a csomóponttól kifelé mutat, akkor pedig negatívát.

Egy sorban az ágak sorrendjét szokásosan az adott csomópont körül az óramutató járásával megegyezően választjuk meg.

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| I. | -1 | 0 | 0 | 0 |
| II. | +1 | -2 | +8 | +7 |
| III. | +2 | -4 | -3 | 0 |
| IV. | +3 | -5 | -7 | -6 |
| V. | +6 | -8 | 0 | 0 |
| VI. | +4 | 0 | 0 | 0 |
| VII. | +5 | 0 | 0 | 0 |

2. táblázat. Példa gráf topográfiai mátrixa

A 2. táblázat mutatja a példa gráf (1. ábra) topográfiai mátrixát. A gráf legnagyobb rangszáma 4, a II. és a IV. csomópontban is ennyi él fut össze.

Mint látható, ez a mátrix még ilyen kis hálózatnál is kompaktabb leírást tesz lehetővé, mint a csúcs-él mátrix. Ez a tulajdonság főleg nagy hálózatoknál rendkívül előnyös, a számítás során kevesebb memória lefoglalásával tárolható a hálózat felépítése.

A topográfiai mátrix hátránya, hogy programozáskor bonyolultabban kezelhető. (részletesebben: 6. oldal)

2.2. Hálózatszámítás

A hálózatszámítás célja: Megadott geometria és kapcsolás alapján a belső csomópontokban a nyomások és az ágakban folyó ágáram (térfogatáram) kiszámítása.

A külső csomópontokban (medence/nyomástartó edény/tágulási tartály) a nyomás a legtöbb feladatnál ismert.

A következőkben használt jelölések:

- n_{csp} : Csomópontok száma
- $n_{ág}$: Ágak száma
- n_{fel} : Felnyitó ágak száma
- n_{ism} : Ismeretlenek száma
- n_{egy} : Egyenletek száma

Tekintsük a rendszerben található ismeretlenek számát:

$$n_{ism} = \underbrace{n_{csp} - n_{fel}}_{\text{belső csomópontok}} + n_{ág} \quad (1)$$

A hálózatra felírható egyenletek:

- **Kontinuitás**: Egy csomópontba befutó és kifutó térfogatáramok összege ismert. Minden belső csomópontra felírható egy egyenlet, a következők figyelembevételével: Ha a hálózatban nincs felnyitó ág, vagyis az összes csomópont belső csomópont, akkor az összes kontinuitást felírva összefüggő egyenletrendszert kapunk. Ilyen esetben egy egyenletet el kell hagyni. Ha a rendszerben van legalább egy felnyitóág, akkor ez a probléma nem áll fenn.

A fogyasztások számítása jellemzően a vízművek belső használatra szánt módszere alapján történik, melyek nem publikusak. Felhasználhatóak a vízórákról leolvasott adatok, valamint a beépítettség és lakosság alapján történő becslések, azonban ezek bizonytalanok.

Ennek a bizonytalanságnak kicsi a szerepe, a tapasztalatok azt mutatják, hogy a fogyasztások nem pontos meghatározása kis befolyással van a hidraulikai számítások eredményére.

Topográfiai mátrix felhasználásával:

Szintén tekintsük a topográfiai mátrix (2.) belső csomópontokat leíró részét:

$$\begin{matrix} II \\ III \\ IV \\ V \end{matrix} \begin{pmatrix} +1 & -2 & +8 & +7 \\ +2 & -4 & -3 & 0 \\ +3 & -5 & -7 & -6 \\ +6 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} := \underline{\underline{T}} \quad (6)$$

Látható, hogy a térfogatáramok kigyűjtéséhez egymásba ágyazott indexelést szükséges használni. Ez egy program elkészítésekor bonyolultabbá teszi a kódot, a csúcs-él mátrix alkalmazásához viszonyítva.

Például a II csomópontra érvényes egyenlet a következő:

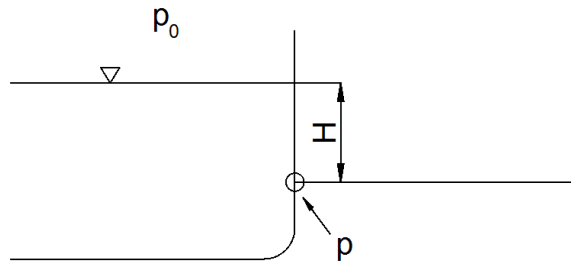
$$f_{II} = \Sigma Q_{II} = Q(T(2,1)) - Q(T(2,2)) + Q(T(2,3)) + Q(T(2,4)) \quad (7)$$

A $T(i,j)$ tagok adják meg a keresett ág indexét (nevét), vagyis a keresett térfogatáramnak a \underline{Q} vektorban elfoglalt helyét. Figyelembe kel venni, hogy a mátrixban negatív elemek is szerepelnek. Egy szokásos megoldás: $Q(|T(2,2)|)$, így a $\underline{\underline{T}}$ mátrix elemének nem vesszük figyelembe az előjelét.

2.2.2. Csomóponti egyenletek külső csomópontokra

Első közelítés:

A 2. ábrán látható vázlat alapján közelíthetjük a külső csomópontok viselkedését.



2. ábra. Külső csomópontok kezelése

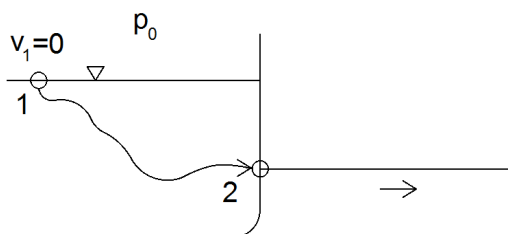
$$p \cong \rho g H + p_0 \quad (8)$$

A 8. egyenletben a p_0 környezeti nyomást választhatjuk 0 vagy 1 barnak is, attól függően, hogy a számítás során abszolút vagy túlnyomást szeretnénk alkalmazni.

Ez a módszer egészen addig alkalmazható, amíg az anyagjellemzők nem függenek a nyomástól. Vízhálózatok esetén a jellemző nyomástartomány 1,5 ... 8 bar túlnyomás, ebben a tartományban a víz anyagjellemzői állandónak tekinthetők.

Medencéből való kiáramlás pontosabb megközelítése:

A medencéből való kiáramlás a 3. ábrán látható.



3. ábra. Medencéből való kiáramlás

Az 1. és 2. pont közötti áramvonalat vizsgáljuk a következőkben. Ezen az áramvonalon időben állandó, de konvektív gyorsulás történik az 1. és 2. pont között. Az áramvonalon a következő egyenlet írható fel:

$$p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 = p_0 + \rho gH \quad (9)$$

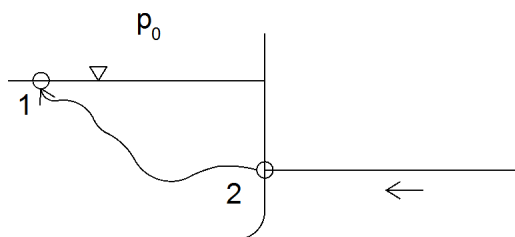
Átrendezés után:

$$p_2 = p_0 + \rho gH - \frac{\rho}{2}v_2^2 \cong p_0 + \rho gH \quad (10)$$

A 10. egyenletben a $\frac{\rho}{2}v_2^2$ tagot azért hanyagolhatjuk el, mert a vizsgált vízmű hálózatokban jellemző áramlási sebesség 0.5 ... 0.75 [m/s] nagyságrendű, így az elhanyagolt tag nagyon kicsi.

Medencébe való beáramlás pontosabb megközelítése:

Az előző esethez hasonlóan kezeljük ezt a folyamatot is.



4. ábra. Medencébe való beáramlás

Lassuló áramlásoknál fontosabb szerepet töltenek be a veszteségek, részben ezek miatt is lassul az áramlás.

A 4. ábrán látható áramvonalra a következő egyenlet írható fel:

$$p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 = p_0 + \rho gH + \Delta p' \quad (11)$$

ahol $\Delta p'$ a veszteség.

Ez a veszteség abból adódik, hogy a medencébe a csőből belépő szabadsugár elveszíti a mozgási energiáját, vagyis $\Delta p' = \frac{\rho}{2}v_2^2$.

$$p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 = p_0 + \rho gH + \frac{\rho}{2}v_2^2 \quad (12)$$

$$p_2 = p_0 + \rho gH \quad (13)$$

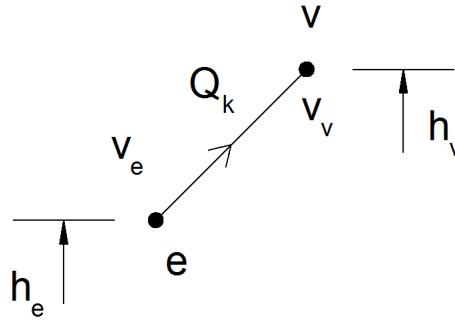
Látható, hogy a pontosabb leírások helyett alkalmazható az első megközelítésként kapott egyenlet (8. egyenlet).

2.2.3. Ágegyenletek

Az ágegyenlet az ág végpontja közötti nyomáskülönbség és az ágon átáramló térfogatáram között teremt kapcsolatot. Az ágak két csoportra bonthatóak, melyek:

- Csövek
- Jelleggörbés ágak

Cső ágegyenlete



5. ábra. Cső ágegyenletéhez tartozó magyarázó ábra

Az egyenlet felírása során időben állandósult áramlást és összenyomhatatlan közeget tételezünk fel, valamint a cső átmérője a hossz mentén állandó. Ezekből következik, hogy $v_e = v_v$.

A Bernoulli egyenletet felírva:

$$p_e + \frac{\rho}{2}v_e^2 + \rho g h_e = p_v + \frac{\rho}{2}v_v^2 + \rho g h_v + \Delta p' \quad (14)$$

$$p_e + \rho g h_e = p_v + \rho g h_v + \Delta p' \quad (15)$$

Ahol a veszteséget a következő módon értelmezzük, felhasználva, hogy $v = \frac{Q \cdot 4}{d^2 \pi}$

$$\Delta p' = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} v_e |v_e| = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} \left(\frac{4}{d^2 \pi} \right)^2 |Q_k| Q_k \quad (16)$$

Az abszolút érték használatával azt értük el, hogy a számításunk az ág irányítását is figyelembe veszi.

Ha az irányítás megegyezik az áramlás irányával, akkor a $\Delta p'$ veszteségtagot a cső végéhez kell hozzáadni, ennél a felírásnál a $\Delta p'$ pozitív előjelű, vagyis a jobb oldalhoz adódik hozzá, tehát jó ez a felírás.

Ha az irányítás ellentétes az áramlás irányával, akkor a $\Delta p'$ tagot a cső elejéhez kell hozzáadni. Ennél a felírásnál $\Delta p'$ negatív előjellel szerepel az egyenlet jobb oldalán, vagyis ebben az esetben is helyes ez a felírás.

A 15 egyenletet átrendezve:

$$p_v - p_e + \underbrace{\lambda \frac{L \rho}{d} \left(\frac{4}{d^2 \pi} \right)^2}_{C_k} |Q_k| Q_k + \underbrace{\rho g (h_v - h_e)}_{D_k} = 0 \quad (17)$$

C_k és D_k jelölést bevezetve kapjuk a cső ágegyenletét:

$$p_v - p_e + C_k |Q_k| Q_k + D_k = 0 \quad (18)$$

Általános esetben a "k" ág ágegyenlete a következő alakú:

$$p_v - p_e + A_k Q_k + B_k Q_k^2 + C_k |Q_k| Q_k + D_k = 0 \quad (19)$$

Cső esetében $A_k = 0$ és $B_k = 0$, valamint C_k és D_k a 17. egyenletben leírtaknak felel meg.

Csőidom, zár ágegyenlete

Ugyanaz az egyenlet írható fel a csőkönyökre és zárakra is, mert a számítások során ugyanúgy viselkednek (áramlási veszteséget okoznak), még ha más is rendszerben betöltött szerepük.

Csőidomok vagy zárok ágegyenletének felírásakor a D_k tagot elhanyagoljuk, mert az ilyen elemek tipikusan rövidek, tehát jelentős magasságkülönbség nincs a két végük között. Ezt felhasználva az ágegyenlet:

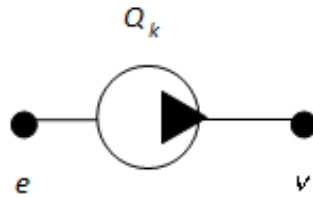
$$p_v - p_e + C_k Q_k |Q_k| = 0 \quad (20)$$

C_k együttható az adott elem katalógusában megadott ellenállás-tényezőből (ζ) számítható.

Jelleggörbés ág ágegyenlete

A jelleggörbés ágak rendszerint szivattyúk, vagy légvezetékek esetén ventilátorok.

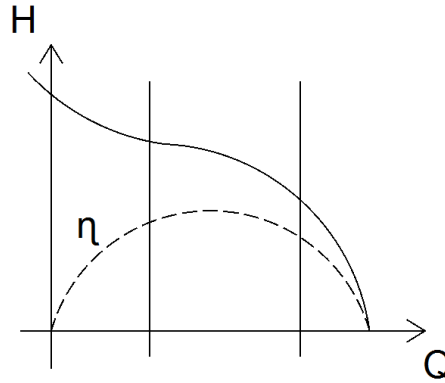
Előfordulhatnak az ilyen rendszerekben turbinák is. Egyes esetekben nagy méretű Heller-Forgó-féle hűtőtornyokban a hűtővíz energiáját turbinával hasznosítják.



6. ábra. Szivattyú sematikus ábrája

A szivattyúkról korábban tanultak (Áramlástechnikai gépek tantárgy) alapján a szállítómagasságra felírható:

$$H = \frac{p_v - p_e}{\rho g} + \frac{v_v^2 - v_e^2}{2g} + h_v - h_e \quad (21)$$



7. ábra. Jelleggörbe

A 7. ábrán látható egy szivattyú tipikus jelleggörbéje. Feltételezzük, hogy állandósult üzemben a szivattyút a legjobb hatásfokú pont közelében használjuk, ezért a jelleggörbének csak ezt a tartományát vizsgáljuk. A kiválasztott szakaszt közelíthetjük parabolával:

$$H \cong a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 \quad (22)$$

21. és 22. egyenletből:

$$\frac{p_v - p_e}{\rho g} + \frac{v_v^2 - v_e^2}{2g} + h_v - h_e = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 \quad (23)$$

A $\frac{v_v^2 - v_e^2}{2g}$ tagot vizsgáljuk tovább. Itt a sebesség négyzete látható az egyenletben, mert ez a tag a közeg mozgási energiájából származik, tehát nem összekeverendő a cső ágegyenletében (17.) látható $v \cdot |v|$ jellegű taggal, mely a veszteségekből származik!

Ha a szivattyú vagy ventilátor szívó és nyomócsonkjának átmérője (d_1 és d_2) megegyezik, akkor könnyen belátható, hogy a kontinuitás miatt $v_e = v_v$. A gyakorlatban a nyomócsonk átmérője kisebb, ezért $v_v > v_e$. A $v_v^2 - v_e^2$ tag jelentősége az adott géptől függ, ezért nem szokás elhanyagolni.

Sebességek helyett használjunk térfogatáramokat:

$$v_e = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q \cdot 4}{d_1^2 \pi} \quad \text{és} \quad v_v = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q \cdot 4}{d_2^2 \pi} \quad (24)$$

24 felhasználásával:

$$\frac{v_v^2 - v_e^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{Q \cdot 4}{d_2^2 \pi} \right)^2 - \left(\frac{Q \cdot 4}{d_1^2 \pi} \right)^2 \right] = \frac{1}{2g} Q^2 \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right) := B^* Q^2 \quad (25)$$

23. egyenletet $\rho \cdot g$ -vel megszorozva és átrendezve a következőt kapjuk:

$$p_v - p_e + \rho g \frac{v_v^2 - v_e^2}{2g} + \rho g(h_v - h_e) - \rho g(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) = 0 \quad (26)$$

26. egyenletbe beírva 25.-t, és rendezés után:

$$p_v - p_e \underbrace{-\rho g a_1 Q}_{A_k} + \underbrace{(\rho g B^* - \rho g a_2) Q^2}_{B_k} + \underbrace{\rho g(h_v - h_e - a_0)}_{D_k} = 0 \quad (27)$$

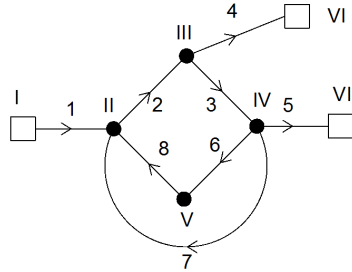
Mint látható, ebben az egyenletben nincs $Q \cdot |Q|$ -t tartalmazó tag. A cső ágegyenleténél ez a tag tartalmazta a veszteséget, azonban itt a veszteségeket már figyelembe vettük a jelleggörbében.

Az a_0, a_1, a_2 konstansok jelleggörbénként változnak, különböző jelleggörbéknél más-más értéket vesznek fel. Ezeket az állandókat könnyen meghatározhatjuk például Excel-es trendvonal illesztés segítségével.

Ha a jelleggörbe közelítésére valamilyen okból nem felel meg a parabola, akkor alkalmazhatunk lineáris közelítést is: A jelleggörbe használt tartományát megfelelően sok szakaszra bontjuk, majd ezeket a szakaszokat egyenessel közelítjük. Ezzel a módszerrel pontosabb közelítés érhető el, de minden egyes szakaszra meg kell határozni a szükséges két állandót. Továbbá a számítások során mindig tekintettel kell lenni arra, hogy éppen melyik szakasz konstansaival kell számolni.

2.3. Numerikus megoldás

A numerikus megoldás a már használt példa gráfon kerül bemutatásra:



8. ábra. Példa gráf

A felírható egyenleteket a következő mátrix foglalja össze. Az első soraiba a csúcs-él mátrixnál megismert módon írjuk be a csomóponti egyenleteket:

| | p_{II} | p_{III} | p_{IV} | p_V | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 | Q_5 | Q_6 | Q_7 | Q_8 | jobb o. |
|------|----------|-----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| II. | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | f_{II} |
| III. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | f_{III} |
| IV. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | f_{IV} |
| V. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 | f_V |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | ⋮ |

3. táblázat. Példa gráfra felírható egyenletek

Ebbe a mátrixba lenne szükséges beírni az ágegyenleteket is, azonban, mint láthatuk, az ágegyenletek nemlineáris egyenletek, így a gráfra felírható egyenletrendszer is nemlineáris lenne. Nemlineáris egyenletrendszerekre nincs általános megoldási módszer, ezért inkább linearizáljuk az egyenleteket.

A linearizálás következtében iteratív megoldást kell alkalmazni, vagyis egy kiinduló állapot segítségével kiszámítjuk a lineáris egyenletrendszerben található ismeretleneket, majd ebből a megoldásból kiindulva újra megoldjuk az egyenletrendszert. Ezeket a lépéseket ismételjük, amíg a megoldás konvergál, azaz két számítási ciklus között már nem változik jelentősen a megoldás értéke.

A továbbiakban az iterációs lépés sorszámát j -vel jelöljük, és a felírt egyenletekben a j -edik iteráció tagjai ismertek, a $j + 1$ -edik iteráció tagjait számítjuk ki.

Az "1" jelű ág példáján bemutatva a legegyszerűbb linearizálási lehetőség a következő:

$$p_{II}^{(j+1)} - p_I + A_1 Q_1^{(j+1)} + B_1 Q_1^{(j+1)} Q_1^{(j)} + C_1 Q_1^{(j+1)} |Q_1^{(j)}| + D_1 \cong 0 \quad (28)$$

Ez az egyenlet már lineáris, hiszen csak $p_{II}^{(j+1)}$ és $Q_1^{(j+1)}$ az ismeretlenek. (p_I nyomás felnyitóághoz tartozik, tehát ismert.) Ha a megoldás konvergens, vagyis $Q_1^{(j+1)} \cong Q_1^{(j)}$, akkor $Q_1^{(j+1)} \cdot Q_1^{(j)}$ tag jól közelíti Q_1^2 -et.

A 28. egyenletet átrendezve:

$$p_{II}^{(j+1)} - p_I + \underbrace{Q_1^{(j+1)} (A_1 + B_1 Q_1^{(j)} + C_1 |Q_1^{(j)}|)}_{E_1^{(j)}} + D_1 \cong 0 \quad (29)$$

$$p_{II}^{(j+1)} - p_I + Q_1^{(j+1)} E_1^{(j)} + D_1 \cong 0 \quad (30)$$

A linearizált ágegyenleteket beírva a mátrixba:

| | p_{II} | p_{III} | p_{IV} | p_V | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 | Q_5 | Q_6 | Q_7 | Q_8 | jobb o. |
|------|----------|-----------|----------|-------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|--------------|
| II. | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | f_{II} |
| III. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | f_{III} |
| IV. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | f_{IV} |
| V. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 | f_V |
| 1. | +1 | 0 | 0 | 0 | $E_1^{(j)}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-D_1 + p_I$ |
| 2. | -1 | +1 | 0 | 0 | 0 | $E_2^{(j)}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-D_2$ |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | |
| 8. | +1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $E_8^{(j)}$ | $-D_8$ |

4. táblázat. Példa gráfra felírható egyenletek

Ezzel az iteráció menete:

$$Q_i^{(0)} \implies E_i^{(0)} \xrightarrow{\text{1. iteráció}} p_k^{(1)} \text{ és } Q_i^{(1)} \implies E_i^{(1)} \xrightarrow{\text{2. iteráció}} p_k^{(2)} \text{ és } Q_i^{(2)} \implies \dots$$

Iteratív megoldásoknál mindig kérdéses az indulóérték, vagyis jelen esetben $Q_i^{(0)}$. Az indulóérték beállítása általában a program feladata, nem a felhasználóé.

A gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy bármilyen indulóértékből kezdve a számítást konvergálni fog, tehát nincs nagy jelentősége. Általában két módszert alkalmaznak, az első, hogy minden térfogatáramot nullára állítanak, a másik, hogy minden csőben 1 m/s-os áramlási sebességet tételeznek fel. Utóbbi akkor előnyös, ha a számítás során kiadódó térfogatáram iránya megegyezik az előzőleg önkényesen megállapított irányítással.

A lineáris egyenletrendszer megoldására már számtalan megoldó programot írtak, érdemes ezek közül használni egyet. Látható, hogy egy "híg" mátrixos egyenletrendszer kell megoldanunk, a fejlett programcsomagokban találhatóak speciális módszerek, melyekkel az ilyen típusú egyenletek gyorsabban számíthatóak.

Fontos kérdés még, hogy az iterációt meddig érdemes futtatni. Az iterációt akkor állítjuk meg, ha a számított ismeretlenek értéke nem változott jelentősen az előző iterációban kapotthoz képest. Általánosságban az mondható el, hogy a térfogatáramok több iteráció után konvergálnak, mint a nyomások, tehát a térfogatáramokat kell figyelni. Kis térfogatáramoknál azonban előfordul, hogy az iterációk közötti kicsi számszerű ingadozás a térfogatáramhoz viszonyítva nagy, ezért a nagy térfogatáramokat érdemes figyelni. Azt, hogy mi számít nagy térfogatáramnak, az adott rendszer tulajdonságai döntenek el.

A számítás elvégzése után az eredményeket értékelni kell. Ellenőrizni kell, hogy a kapott nyomások és térfogatáramok a várt nagyságrendbe esnek-e. A hidraulikai számítások egyik fő célja lehet a veszteségek meghatározása, és ezáltal azoknak a csöveknek a megtalálása, amelyek a legnagyobb veszteséget okozzák.

2.3.1. A számítás gyorsítása

Konkrét alkalmazási példák helyett ötletek szintjén mutatjuk be a számítás gyorsításának néhány lehetőségét. Kis méretű hálózatok számítása a jelenlegi számítástechnikai kapacitás mellett gyorsan lefut, ezért a gyorsítás lehetőségeit csak nagyobb hálózatoknál érdemes megvizsgálni.

Az egyik leghatékonyabb módszer az ismeretlenek számának csökkentése.

Ismeretlen nyomások számának csökkentése

Ebben az esetben a gráfok hurkoltságát használjuk ki, hasonlóan az elektronikában megismert Kirchhoff-féle huroktörvényhez. Ha egy megfelelő hurkot alkotó ágak ágyenleteit összeadjuk, akkor az egyenletből a nyomások kiesnek.

Ismeretlen térfogatáramok számának csökkentése

Ehhez a módszerhez az a felismerés vezetett, hogy a térfogatáramok nem függetlenek egymástól. Az előzőleg használt gráf példájánál maradva, felírva a csomóponti egyenleteket:

$$\begin{aligned}f_{II} &= Q_1 - Q_2 + Q_8 + Q_7 \\f_{III} &= Q_2 - Q_4 - Q_3 \\f_{IV} &= Q_3 - Q_5 - Q_7 - Q_6 \\f_V &= Q_6 - Q_8\end{aligned}$$

Látható, hogy a 4 egyenlet összesen 8 ismeretlen térfogatáramot tartalmaz. Ha megfelelően kiválasztunk 4 bázisáramot, akkor a másik 4 térfogatáram helyettesíthető a bázisáramokból alkotott kifejezésekkel.

Ezt a módszert Almássy Bálint írta le először 1966-ban, azóta széleskörűen alkalmazzák, lásd: felhasznált irodalom.

A felhasznált irodalom

CROSS H.: Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors. Bull. No.286. Urbana Ill. 1936. Univ. of Illionis Eng.

FŰZY O.: Áramlástechnikai gépek és rendszerek. Tankönyvkiadó 1991.

ALMÁSSY B.: Csőhálózatok számítása elektronikus számítógépen. Doktori disszertáció BME 1966

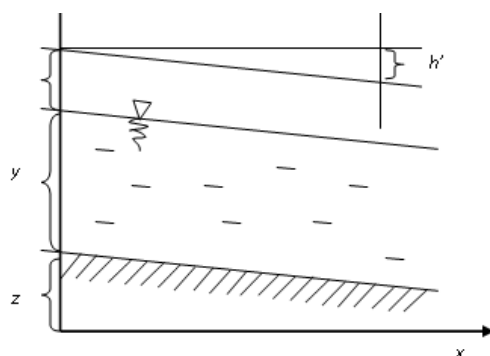
ALMÁSSY, B., BUDA VARI, S., VAJNA Z.: Economically Computerized Calculations for Large-Size Looped Pipe-Networks. Acta Technica, Budapest, pp 153-168 (1981)

HALÁSZ G., KRISTÓF G., KULLMANN L.: Áramlás csőhálózatokban. Egyetemi tankönyv. Műegyetemi Kiadó 2002.

3. Áramlás csatornáknban

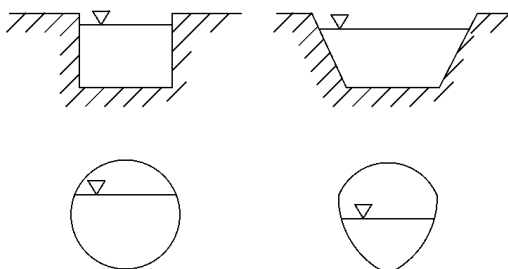
Budapest ivóvízellátását két fő forrásból fedezik, az ivóvíz ~70%-a a Szentendrei szigetéről, ~30%-a Csepelről érkezik. A Szentendréről érkező mennyiség szinte teljesen gravitációs úton jut el a fővárosba, vagyis nagyrészt csatornaáramlással. Más nagyvárosokban, például Bécsben is található nyílt felszínű csatornaáramlás az ivóvízhálózatban.

3.1. Bevezetés



9. ábra. Nyílt felszínű csatorna vázlata

A csatornák jellemző metszeteit a 10. ábra mutatja be. A vízépítő gyakorlatban legtöbbször téglalap vagy trapéz metszetű csatornákat alkalmaznak, gépészmérnöki gyakorlatban elterjedtebb a csőben történő nyílt felszínű áramlás. Főként szennyvíz csatornákhöz alkalmazzák a lapított keresztmetszetet, melynek előnye, hogy kis térfogatáramnál sem kicsi a vízszint.



10. ábra. Tipikus csatorna keresztmetszetek

A csatorna egyik legfontosabb jellemzője az esés, jele: i .

$$i = \frac{\Delta z}{L} \quad (31)$$

Az esés tapasztalati értéke 2-3 ‰, sem a túl meredek, sem a túl kis esésű csatorna nem megfelelő.

Ebben az alfejezetben olyan áramlást vizsgálunk, melynél a vízfelszín párhuzamos a csatornafénnel. A nyílt felszínű áramlásoknál a csatorna fenék esése fedezi a fellépő áramlási veszteséget:

$$\Delta z = h' = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (32)$$

Csatornáknál nem jellemző a visszaáramlás, így a veszteségtagban írható v^2 , nem szükséges abszolútértékes tagot alkalmazni. A fenti kifejezésben λ veszteségtényező jól becsülhető szakirodalom alapján, azonban a jobb oldali kifejezés teljesen kitöltött kör keresztmetszetű csőre érvényes.

Ahhoz, hogy a alkalmazható legyen más keresztmetszetű csatornáknál is, bevezetésre került a hidraulikai sugár (R_h):

$$R_h = \frac{A_{kitöltött}}{K_{nedvesített}} \quad (33)$$

Vagyis az áramló közeg által kitöltött keresztmetszetet osztjuk a közeg által nedvesített csatornafal kerületével.

Teljesen kitöltött kör keresztmetszetű csatorna esetén:

$$R_h = \frac{A_{kitöltött}}{K_{nedvesített}} = \frac{D^2\pi}{4D\pi} = \frac{D}{4} \quad (34)$$

32. egyenletet átrendezve:

$$\frac{\Delta z}{L} = i = \frac{\lambda}{2gD} v^2 \quad (35)$$

34-et beírva 35.-be:

$$i = \frac{\lambda}{8gR_h} v^2 \quad (36)$$

Ebből kifejezve a sebességet:

$$v = \underbrace{\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}}_C \sqrt{iR_h} \quad (37)$$

Ahol C a Chézy-állandó, mértékegysége $\frac{\sqrt{m}}{s}$, és szokásos értéke 50-70 $\frac{\sqrt{m}}{s}$. A Chézy-állandóra tapasztalati összefüggések állnak rendelkezésre, melyek közül egy a Manning-féle formula:

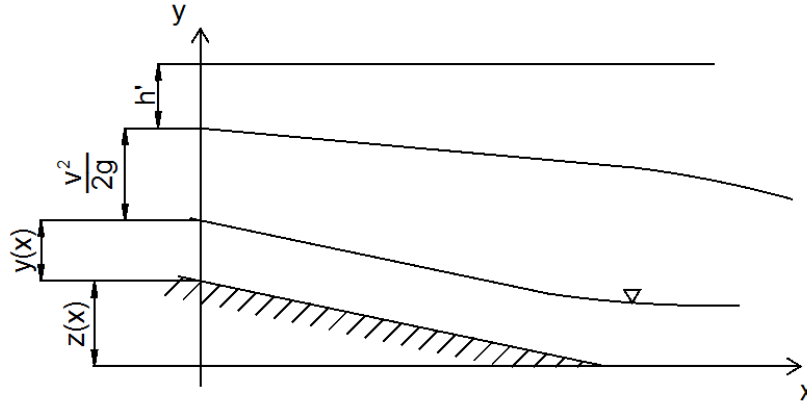
$$C \cong \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}} \quad (38)$$

Ahol n a csatorna falának érdességére jellemző szám, és R_h méter mértékegységben helyettesítendő be. A Manning-féle formula dimenzionálisan rossz, a két oldalán nem egyeznek a mértékegységek, de a kapott Chézy-állandó használható.

3.2. A vízfelszint leíró függvény

Ebben a fejezetben a csatornaáramlás esetén kialakuló vízfelszint leíró függvény meghatározása a cél.

Csatornaáramlás esetén a lejtés fedezi a veszteségeket. Ennek figyelembevételével felírható a közegre az energiamegmaradás törvénye.

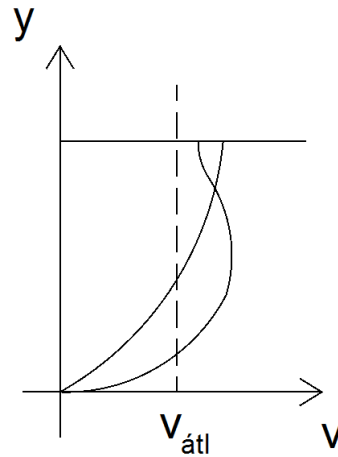


11. ábra. Energiamegmaradás törvényéhez magyarázó ábra

A 11. ábra mutatja be a csatornaáramlás esetén megfigyelhető energia összetevőket. A sebesség négyzetével arányos tag jellegre helyesen mutatja be a mozgási energia alakulását, a pontos lefutása a konkrét esetben kialakuló sebességektől függ. A különböző összetevők összege állandó a csatorna mentén, ezt az összeget a legfelső vízszintes vonal reprezentálja.

$$z(x) + y(x) + \frac{v^2}{2g} + h' = \text{állandó} \quad (39)$$

A 39 egyenletben átlagsebességgel számolunk. Csatornaáramlásokban eltérő sebességprofilok is kialakulhatnak, melyeket a 12. ábra szemléltet.



12. ábra. Csatornában kialakuló sebességprofilok

A levezetés során azonban egy dimenziós modellt alkalmazunk, ezért csak az x irányú változást vesszük figyelembe, az y irányút nem.

Egyes esetekben szokás a 39. egyenletben a következő tagot használni: $\alpha \frac{v^2}{2g}$, ahol $\alpha \cong 1 \dots 1,2$.

A 39. egyenletet x szerint deriválva:

$$\frac{d}{dx} \left(z(x) + y(x) + \frac{v^2}{2g} + h' \right) = 0 \quad (40)$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh'}{dx} = 0 \quad (41)$$

Vizsgáljuk külön a 41. egyenlet tagjait:

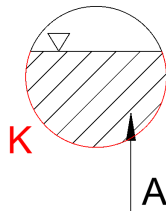
$$\boxed{\frac{dz}{dx}} = -i \quad (42)$$

Az egyszerűség kedvéért a hossza mentén állandó esésű csatornát vizsgálunk. Ha olyan csatornára írjuk fel az egyenletet, melynek nem állandó az esése, akkor gyakori megoldás, hogy állandó esésű szakaszokkal közelítjük a valós geometriát.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \text{ismeretlen, ez a keresett függvény deriváltja} \quad (43)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right)} = \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left(\underbrace{Q^2}_{Q=\text{áll}} \frac{1}{A^2} \right) = \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) = \dots \quad (44)$$

A 44. kifejezésben A a nedvesített keresztmetszet.



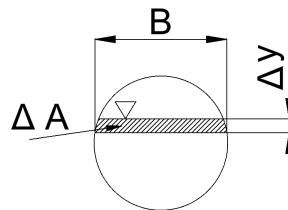
13. ábra. Nedvesített keresztmetszet

Például egy folyó mentén változhat x irányban is a meder, de ebben a tárgyban prizmatikus csatornákkal foglalkozunk, melyeknek a kialakítása x mentén állandó. Tehát a nedvesített keresztmetszet csak az adott keresztmetszetbeli vízszinttől ($y(x)$) függ, ami természetesen függ x -től.

A 44. kifejezést továbbírva:

$$\dots = \frac{Q^2}{2g} \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right)}_{\text{láncszabállyal}} = \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{[A(y(x))]^2} \right) \cdot \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{A^3} \right) \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} = \dots \quad (45)$$

$\frac{dA}{dy}$ értelmezéséhez segítő ábra:



14. ábra. Nedvesített keresztmetszet

$$\Delta A = B\Delta y \Rightarrow \frac{dA}{dy} = B(y) \quad (46)$$

$$\dots = \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{A^3} \right) \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^3} B \frac{dy}{dx} \quad (47)$$

Az utolsó tag értelmezéséhez tekintsük a 35. egyenletet, mely szerint:

$$\frac{\Delta z}{L} = \frac{v^2}{C^2 R_h} \underbrace{(\text{= } i)}_{\text{egyenletes áramlásnál}} \quad (48)$$

Ezzel:

$$\boxed{\frac{dh'}{dx}} = \frac{\Delta z}{L} = \frac{v^2}{C^2 R_h} = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h} \quad (49)$$

A vizsgált egyenlet (41.) korábbi formája:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh'}{dx} = 0 \quad (50)$$

Átírva a tagokat:

$$-i + \frac{dy}{dx} - \frac{Q^2 B}{gA^3} \frac{dy}{dx} + \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h} = 0 \quad (51)$$

Átrendezve jutunk az időben állandó (permanens) csatornaáramlás vízfelszínét leíró közönséges differenciálegyenletre:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h}}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}}} \quad (52)$$

$$i = \text{áll.}, \quad Q = \text{áll.} \quad \text{és} \quad A = A(y) \quad C = C(y) \quad R_h = R_h(y) \quad B = B(y)$$

A továbbiakban az 52. egyenlet jobb oldalát $F(y)$ -nal jelöljük. Első megfontolásként felírható lenne, hogy:

$$\frac{dy}{dx} = F(y) \quad \rightarrow \quad x = \int \frac{dy}{F(y)} + \text{konst},$$

de az analitikus megoldás nem lehetséges, ezért numerikusan számolunk. Érdeemes megvizsgálni, hogy mi történik, ha $F(y)$ kifejezés számlálójára és/vagy nevezőjére nulla.

Ha számláló=0 (normál áramlás):

Ebben az esetben $F(y) = 0$, tehát $\frac{dy}{dx} = 0$, vagyis a vízszint a csatorna mentén nem változik, azaz itt a bevezetésben is vizsgált normáláramlást várjuk eredményként. Ehhez tartozó mélység a normál mélység (y_{norm}).

Ha a számláló=0 :

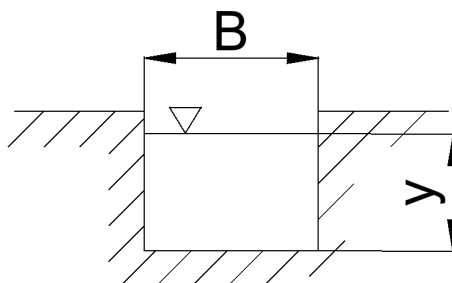
$$i - \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h} = 0 \quad (53)$$

$$i = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h} \quad (54)$$

$$Q = AC\sqrt{iR_h} \quad (55)$$

$$Q - A(y)C(y)\sqrt{iR_h(y)} = 0 \quad (56)$$

Az 56. már megoldható iteratíván y-ra, például téglalap esetén:

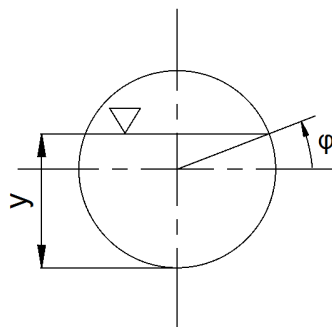


15. ábra. Segédábra a megoldáshoz

A 15. ábra segítségével felírható:

$$A = B \cdot y \quad R_h = \frac{A_{nedvesített}}{K_{nedvesített}} = \frac{B \cdot y}{B + 2y} \quad C = \frac{1}{n} (R_h(y))^{\frac{1}{6}}$$

Az 56. egyenlet megoldásához például Matlab használata esetén alkalmazható az fzero beépített függvény. Körkeresztmetszetű csatornára is felírhatóak hasonló összefüggések, φ segédváltozót bevezetve (nem képezi a tananyag részét):



16. ábra. Segédábra a megoldáshoz

$$\sin(\varphi) = \frac{y - \frac{D}{2}}{\frac{D}{2}}$$

$$A = \frac{D^2\pi}{4} \frac{1}{2\pi} (\pi + 2\varphi + \sin(2\varphi)) \quad \text{és} \quad K = D\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi} \right)$$

Ha nevező=0 (kritikus áramlás):

Ebben az esetben $F(y)$ -nak szakadása van.

$$1 - \frac{BQ^2}{gA^3} = 0 \quad (57)$$

$$\frac{BQ^2}{gA^3} = 1 \quad (58)$$

$$\frac{Q^2}{A^2} = \frac{gA}{B} \quad (59)$$

$$v_{krit} = \sqrt{\frac{gA}{B}} \quad (60)$$

A 60. egyenletben kapott kritikus sebesség megfelel a sekély vízi felszíni hullám terjedési sebességének. Téglalap keresztmetszet esetén $A = By$, ezzel:

$$v_{krit} = \sqrt{g \cdot y} \quad (61)$$

Látható, hogy a hullám terjedési sebessége függ a vízmélységtől. Emiatt alakul ki a természetes vizeknél, hogy a hullám teteje elhajlik, mivel a hullám tetejénél nagyobb a haladási sebesség.

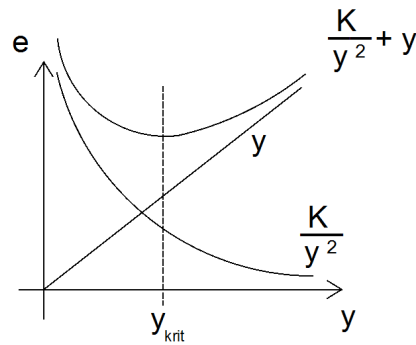
Vizsgáljuk meg egy részecske súlyegységre eső energiáját:

$$e = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (62)$$

Téglalap keresztmetszet esetén:

$$e = y + \frac{Q^2}{2gB^2y^2} := y + \frac{K}{y^2} \quad (63)$$

Ezt felrajzolva:



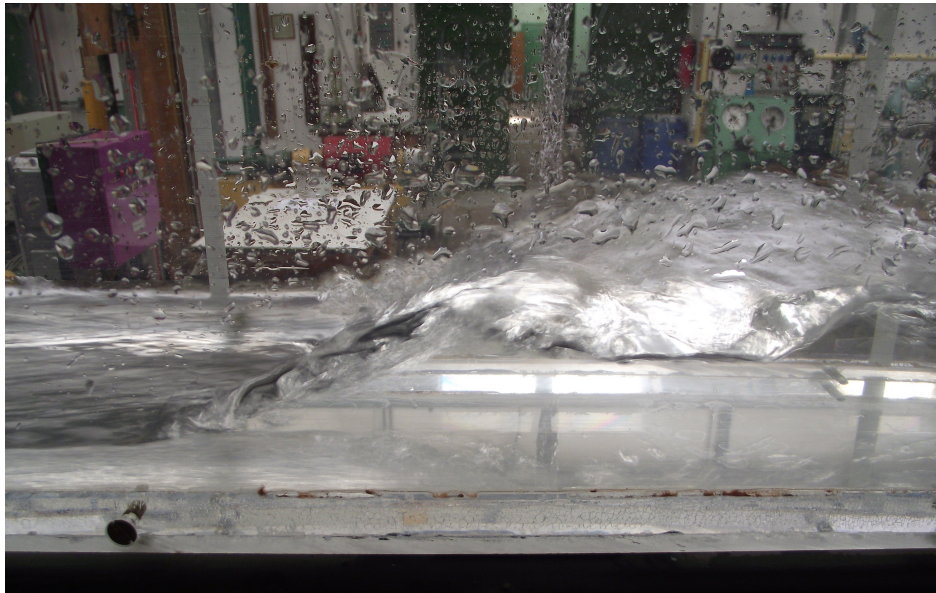
17. ábra. Részecske súlyegységre eső energiája

A vizsgált esetben e állandó vagy csökken az áramlás mentén, mivel energiabevezetés nincs. Ez alapján, ha $y < y_{krit}$ (y_{krit} : kritikus mélység) és nő az áramlásban a vízszint, akkor a súlyegységre jutó energia csak addig csökkenhet, amíg e el nem éri a minimumot. Itt viszont $y = y_{krit}$, ezért $F(y)$ -nak szakadása van, a differenciálegyenlet megoldása ebben a környezetben nem megy. Hasonlóan, ha $y > y_{krit}$ a vízszint, és csökken, akkor az energia is csökken a minimumig.

A sebesség értéke csatornában néhány m/s (1 méteres vízszintnél $\approx \sqrt{10} \approx 3$ m/s), így könnyen előfordulhat, hogy a közeg sebessége nagyobb, mint a hullámterjedési sebesség.

Ebben az esetben, ha a hullámterjedési sebéségnél nagyobb a sebesség, tehát a vízszint alacsonyabb a kritikusnál, szuperkritikus áramlásról beszélünk, levegőbeli megfelelője a szuperszónikus áramlás. Ha a hullámterjedési sebesség alatti a sebesség, vagyis a kritikus magasságnál nagyobb a vízszint, akkor szubkritikusnak nevezzük az áramlásokat. Más megfogalmazásban y_{krit} alatt rohanásról, afelett áramlásról beszélünk.

Levegőben, ha a sebesség nő, akkor a kritikus sebesség (hangsebesség) körül hangrobbanás történik, ennek a megfelelője a vízugrás a csatornaáramlásoknál.



18. ábra. Vízugrás fotója plexi oldalfalú csatornában

Ha nevező=0 és a számláló=0:

Ebben az esetben:

$$y_{norm} = y_{krit} \quad \rightarrow \quad Q_{norm} = Q_{krit}$$

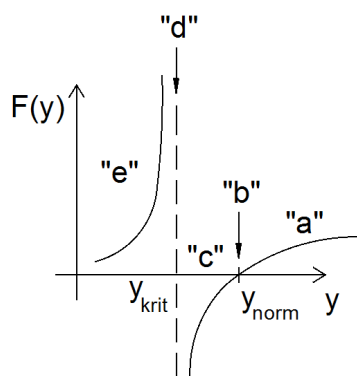
A nevező=0 felíráásával számítható y_{krit} , a számláló=0 felíráásával pedig y_{norm} , a két értéknek egyenlőnek kell lennie.

Ez akkor teljesül, ha $i = i_{krit}$, vagyis (*Ez a képlet nem képezi a tananyag részét*):

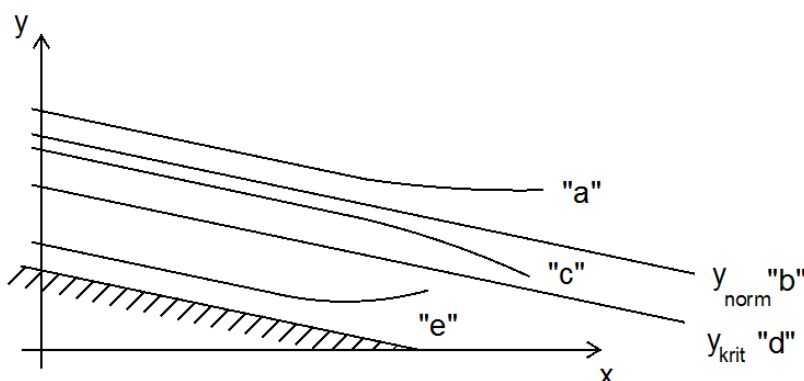
$$i = i_{krit} = \frac{gA_n}{C_n^2 R_{h,n} B_n} \quad (64)$$

i_{krit} tipikus értéke 5 - 8 ezrelék, ezért is szokás a csatorna esését ennél kevesebbre, 2 - 4 ezrelékre választani.

Tekintsük át összefoglalva a lehetséges áramlásokat, ha $i < i_{krit}$ esetén:



19. ábra. $F(y)$ függvény



20. ábra. Lehetséges áramképek

"a" eset:

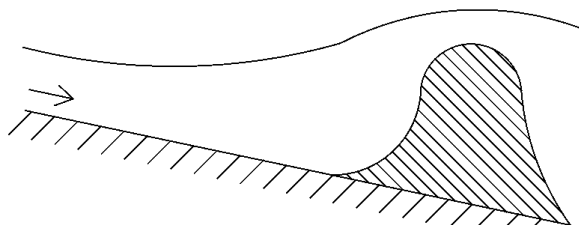
Duzzadó felszín, tipikusan valamilyen tereptárgynál vagy bukógátnál alakul ki.

"b" eset:

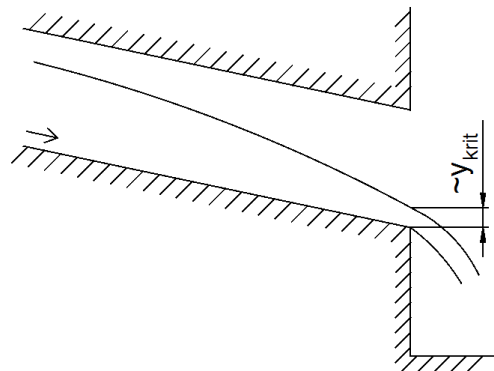
Normáláramlás.

"c" eset:

Süllyedő felszín, például aknába való beömlésnél alakul ki. Ilyenkor a csatorna végén a vízszint körülbelül megegyezik y_{krit} -tel.



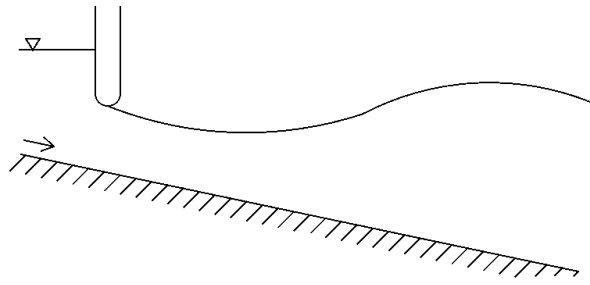
21. ábra. "a" eset



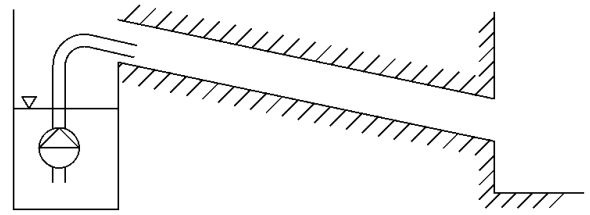
22. ábra. "c" eset

"e" eset:

Ebben az esetben alakul ki vízugrás. Ezt okozhatja egy alsó kifolyású gát, vagy a 24. ábrán látható elrendezés is. Ebben az elrendezésben egy aknából a szivattyú emeli a közeget egy, a nyomócsonknál jelentősen nagyobb keresztmetszetű csatornába, viszonylag nagy sebességgel, így itt kialakulhat szuperkritikus áramlás.



23. ábra. "e" eset



24. ábra. "e" eset egy tipikus elrendezése

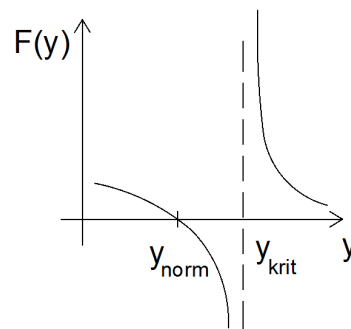
Visszatérve az 52. egyenletre, $\frac{dy}{dx} = F(y)$ numerikus megoldásához szükséges egy darab peremfeltétel. Ismerhetjük például a csatorna elején vagy végén a vízszintet, tehát:

$$\text{ha } x = 0 \rightarrow y(x)|_{x=0} = y_0 \quad \text{vagy} \quad \text{ha } x = L \rightarrow y(x)|_{x=L} = y_{norm}$$

Az említett "c" esetnél használható peremfeltétel: $x = L \quad y(x)|_{x=L}$

Az "e" esetben $x = 0$ helyen az y kiszámítható a szivattyú adataiból.

Ha a csatorna esése nagyobb, mint i_{krit} , akkor a differenciálegyenlet jobb oldala a következőképp alakul:



25. ábra. $F(y)$ $i > i_{krit}$ esetén

A csatornaáramlások számítása főként a csatornázási műveknél fordul elő, de még nem általánosan használt módszer. Használható olyan problémás esetek kivizsgálására, mint például a csatornafedelelek elmozdulásával járó túltöltődés. Irányítástechnikai kérdéseket is lehet vizsgálni, például az átemelőszivattyúk menetrendjének meghatározásához.

A felhasznált irodalom

AGROSZKIN, DIMITRIJEV, PIKALOV: Hidraulika. Egyetemi tankönyv, 1952.

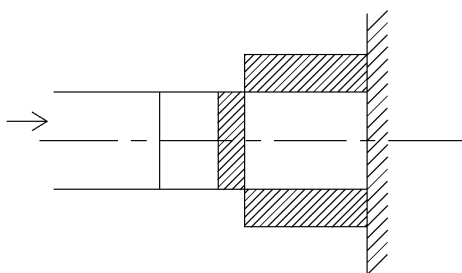
BOGÁRDI J., KOZÁK M.: Hidraulika I. és II. kötet. Tankönyvkiadó Budapest, 1979, 1981.

4. Tranziens folyamatok

4.1. Allievi elmélet

A következőkben bemutatásra kerülő elmélet a kidolgozójának, Lorenzo Allievi-nek nevét viseli. Egy olaszországi erőműben bekövetkezett csőtörés vizsgálatára kapott megbízást 1904-ben, ekkor dolgozta ki ezt a módszert.

Tranziens folyamatoknál a cső deformációját és a folyadék összenyomódását is figyelembe vesszük. A 26. ábrán látható egy csőben áramló folyadék esetén lejátszódó folyamat, a cső hirtelen lezárását követően.



26. ábra. Hirtelen zárás

A csőben érkező folyadékoszlop két okból rövidül meg. A hirtelen zárás miatt a nyomás növekszik, a megnövekedett nyomás miatt a folyadékoszlop összenyomódik, másrészt pedig a cső is kitágul.

Feltételezzük, hogy a folyadék és a cső a Hooke-törvénynek megfelelően viselkedik, rugalmassági moduluszuk E_{foly} és $E_{\text{cső}}$.

Ezek segítségével meghatározható egy ezzel egyenértékűen viselkedő virtuális cső-folyadék rendszer. Ebben a modellben a cső tökéletesen merev, a benne áramló folyadék pedig E_{red} redukált rugalmassági moduluszal rendelkezik.

$$\frac{1}{E_{\text{red}}} = \frac{1}{E_{\text{foly}}} + \frac{1}{\frac{\delta}{D} E_{\text{cső}}} \quad (65)$$

ahol δ az eredeti cső falvastagsága, D pedig a belső átmérője.

A redukált rugalmassági modulus segítségével számítható az egyenértékű rendszerben a hullámterjedési sebesség:

$$a = \sqrt{\frac{E_{\text{red}}}{\rho}} \quad (66)$$

Ezek segítségével, a szakirodalomban megtalálható gondolatmenet alapján felírható az Allievi-képlet:

$$\Delta p = \rho a \Delta v \quad (67)$$

Δp a hirtelen zárás/nyitás esetén fellépő nyomásváltozás, ρ a zavartalanul áramló közeg sűrűsége, Δv a zárás/nyitás során bekövetkező áramlási sebesség változás.

Számszerűen tekintve acél cső - víz rendszert:

$$E_{\text{víz}} = 2 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}; \quad E_{\text{cső}} = 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}; \quad \frac{\delta}{D} = 0,02$$

Ezek behelyettesítésével:

$$E_{\text{red}} = 1,2 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \quad (68)$$

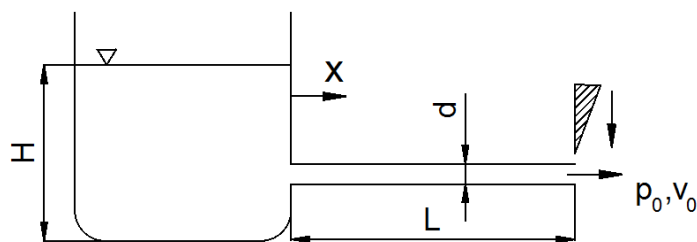
$$a = \sqrt{\frac{E_{\text{red}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^9}{1000}} \cong 1100 \left[\frac{m}{s} \right] \quad (69)$$

Tegyük fel: $\Delta v = 1 \frac{m}{s}$

$$\Delta p = \rho a \Delta v = 1000 \cdot 1100 \cdot 1 = 1,1 \cdot 10^6 [Pa] = 11 [bar] \quad (70)$$

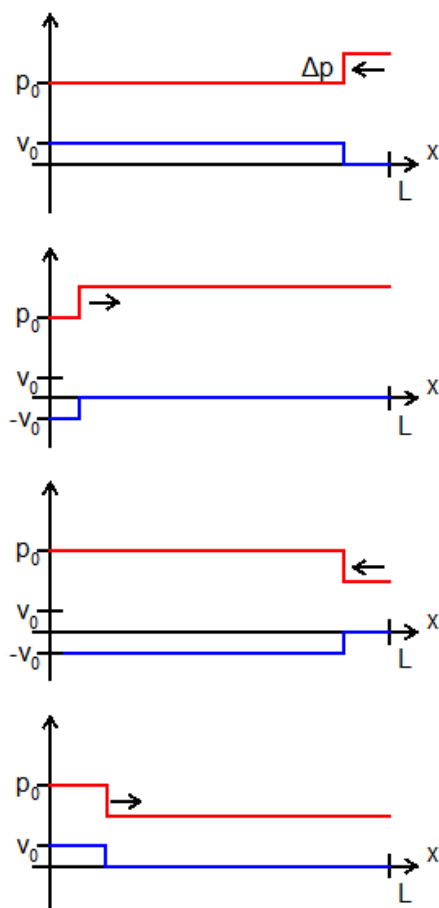
Δp az alapnyomáshoz adódik hozzá, tehát a csövet terhelő nyomás egy hirtelen zárás esetén akár több, mint 10 barral is megnőhet, ez már olyan jelentős terhelés, ami csőtörést okozhat. Az Allievi-képletben szerepel a sűrűség is, tehát ez a jelenség levegős rendszerekben nem jelentős; olaj, víz, és hasonló sűrűségű közegek esetén okozhat problémát. Alapvető védekezési mód a lassú nyitás és zárás, ezzel csökken a Δv , így a bekövetkező nyomásváltozás is.

A következőkben tekintsük a következő elrendezést:



27. ábra. Rendszer vázlat

A medencéből a csövön keresztül áramlik ki a folyadék, majd a cső végét hirtelen lezárjuk. A csőben kialakuló nyomás és sebesség a 28. ábrán látható, 4 különböző időpontban. A felrajzolt grafikonok ideális esetet mutatják, a valóságban ennél elmosottabbak, torzabbak az ugrások, és veszteségek is fellépnek.



28. ábra. Nyomás és sebesség a csőben

1. grafikon:

A záráskor a cső végén megemelkedik a nyomás a korábban részletezett Δp értékkel, majd a cső eleje felé elindul a nyomáshullám. Ezzel párhuzamosan a zárás miatt a folyadék megáll, tehát a sebesség lecsökken nullára. A nyomáshullám terjedési sebessége a , hullámterjedési sebesség.

2. grafikon:

A nyomáshullám eléri a medencét, ahol a nyomás az eredeti p_0 marad (ezt a medence biztosítja), így egy szíváshullám indul el visszafelé. A sebesség az eredetivel ellenkező irányú lesz, tehát a medencébe áramlik be a folyadék.

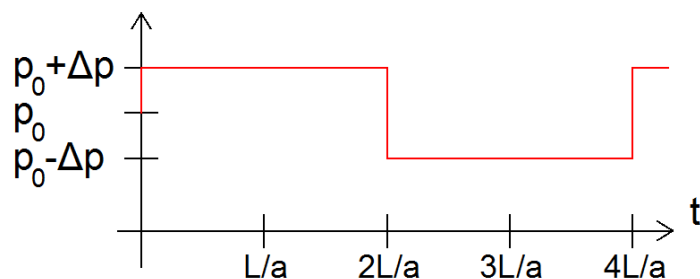
3. grafikon:

Amint a szíváshullám eléri a zárt csővéget, onnan visszaverődik, tehát elindul a medence irányába. Ekkor a sebesség ismét nulla lesz a cső végén, hiszen zárt csővégnél a sebesség csak nulla lehet.

4. grafikon:

A szíváshullám visszaverődik a medence oldaláról, és nyomáshullám halad végig a csövön. Az eredetivel megegyező irányú áramlás indul el a csőben, tehát a sebesség pozitív lesz.

Amikor ez a hullám végig ért a csövön, akkor az egész folyamat ismétlődni fog. A cső végén jelentkező nyomás időbeli lefutását a következő grafikon mutatja:



29. ábra. Nyomás időbeli lefutása a cső végén

4.1.1. Nyomásnövekedés csökkentési lehetőségei

A $\Delta p = \rho a \Delta v$ képlet tagjait végigtekintve a nyomásváltozás csökkentésének lehetőségei:

a csökkentése:

Műanyagcsőben körülbelül 1/3-a a hullámterjedési sebesség az acélhoz képest. Műanyagcsővekkel kapcsolatban megjegyzendő, hogy a rugalmassági moduluszuk hőmérsékletfüggő, ezért az évszakok változásával jelentős különbség is kialakulhat, télen gyakoribb lehet a csőtörés. Acélcsőnél nem jelentkezik ilyen probléma.

ρ és E csökkentése:

Ha a rendszerbe levegő kerül, az jelentősen csökkenti a közeg átlagos sűrűségét. A levegő nagyobb mértékben összenyomható, mint az ilyen csőhálózatokban előforduló folyadékok, emiatt a levegő/buborékos folyadék rugalmasabban viselkedik, tehát megváltozik a rugalmassági modulusz. Levegőbeszívással körülbelül egy nagyságrendnyi csökkenés érhető el a kialakuló nyomásváltozásban.

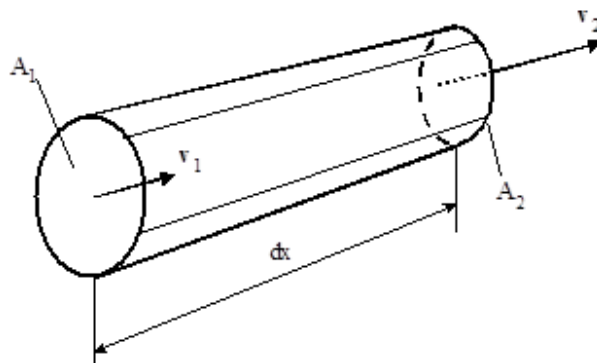
Csőhálózatoknál alkalmaznak légbeszívó szelepeket, illetve rossz tömítéseknel is kerülhet levegő a rendszerbe (tipikusan például szivattyú szívócsonkjánál).

Δv csökkentése:

A zárás/nyitás sebességét csökkentjük, akkor a csőben az áramlási sebesség változása is lassabb, emiatt pedig csökken a kialakuló nyomásváltozás.

4.2. Tranziens áramlás teltszelvényű csőhálózatban

Az egyenleteket áramcsőre írjuk fel (falát áramvonalak alkotják, átmérője jelentősen kisebb, mint a hossza, ezért használhatóak az átlagsebességek).



30. ábra. Áramcső

Tömegáramra felírva a kontinuitást:

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \Delta x = 0 \quad (71)$$

Felhasználva, hogy $\dot{m} = \rho Av$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho Av \Delta t + \frac{\partial}{\partial x} \rho Av \Delta x = 0 \quad (72)$$

Figyelembe véve, hogy $\Delta x = v \Delta t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho A + \frac{\partial}{\partial x} \rho Av = 0 \quad (73)$$

Ha állandó keresztmetszetű csövet vizsgálunk ($A = \text{áll.}$), az áramlástan tárgyából is ismert alakra jutunk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (74)$$

Ha 73. egyenlet mellett $\rho \cong \text{áll.}$ esetet tételezünk fel:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Av = 0 \quad (75)$$

Ezt a formát csatornaáramlásoknál használhatjuk, vagy akkor, ha a cső deformábilis, például az emberi érhálózat számításánál.

Acélcsőben áramló víz esetén feltételezhető, hogy a tranziens folyamatok gyorsan lezajlanak, ezért a hőmérséklet állandó. (Ezt a feltételezést még távfűtő hálózatoknál is használhatjuk.)

Emiatt a változók az alábbiak:

$$\rho = \rho(p) \quad v = v(x, t) \quad p = p(x, t)$$

A 74. egyenletben találhatóak $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ és $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ tagok, melyek láncszabállyal állíthatóak elő:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (76)$$

Ismert összefüggés (például akusztikából), hogy:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 \quad (77)$$

A 74. egyenletbe behelyettesítve 76. és 77. kifejezéseket:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (78)$$

Továbbírva kapjuk a továbbiakban használt formáját a kontinuitás egyenletnek:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (79)$$

Felírva a mozgásegyenletet:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{dh}{dx} + \frac{\lambda}{2d} v |v| = 0 \quad (80)$$

Ahol $h = h(x)$ a csővezeték középvonalának geodetikus magassága, és λ állandó. A kontinuitás és a mozgásegyenlet parciális differenciálegyenlet rendszert alkot. A keresett változók x -től és t -től függenek, így ha felvehetünk egy x - t rácsot és megoldhatjuk az egyenletrendszert numerikusan, azonban ez az eljárás nem hatékony.

Ehelyett elterjed lehetőség az, hogy a parciális differenciálegyenlet rendszert visszavezetjük közönséges differenciálegyenlet rendszerre, és ezt diszkretizáljuk, majd oldjuk meg numerikusan a következő módszerrel. Ehhez az átalakításhoz kapcsolatot kell létesíteni a két változó (x és t) között.

Írjuk fel a sebesség véges megváltozásainak összegét, másképp nevezhetjük a Taylor-sorának lineáris részének is.

$$\Delta v \cong \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \quad (81)$$

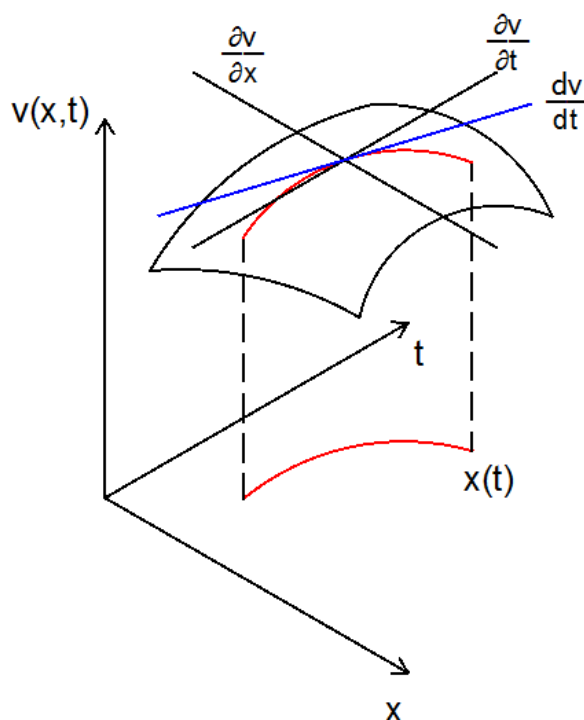
Átrendezve:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \cong \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (82)$$

Itt limest alkalmazva (kicsik a megváltozások):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (83)$$

A 83. egyenletet nevezzük v iránymenti deriváltjának. A $\frac{dx}{dt}$ tag akkor létezik, ha van $x = x(t)$ kapcsolat, melyet más néven karakterisztikának nevezünk. Az iránymenti deriváltat ábrázolja a következő grafikon:



31. ábra. Iránymenti derivált

A $v(x, t)$ egy felületet alkot, ezen kiválasztunk egy pontot. Az adott pontbeli $\frac{\partial v}{\partial t}$ derivált a $v - t$ síkkal párhuzamos, hasonlóan $\frac{\partial v}{\partial x}$ derivált az $x - t$ síkkal párhuzamos.

Az $x(t)$ kapcsolat a $v(x, t) = 0$ síkon van ábrázolva pirossal, a $v(x, t)$ felület ezen görbe feletti vetületének érintője az iránymenti derivált $(\frac{dv}{dt})$.

Hasonlóan p -nek is felírható az iránymenti deriváltja:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (84)$$

A következőkben az alábbi gondolatmenetet fogjuk követni:

- Előállítjuk a mozgásegyenlet (80) és a kontinuitás (79) lineáris kombinációját.
- Ebben az új egyenletben lecseréljük a parciális deriváltak $(\frac{\partial p}{\partial t}; \frac{\partial p}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial t}; \frac{\partial v}{\partial x})$ 83. és 84. szerinti kombinációját az iránymenti deriváltakra $(\frac{dp}{dt}; \frac{dv}{dt})$.
- A kapott közöséges differenciálegyenlet-rendszert megvizsgáljuk.

Képezve (80)+ $\alpha \cdot$ (79)-t, ahol α egy szabad paraméter:

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} (v + \alpha a^2 \rho)} + \alpha \left[\underbrace{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \left(v + \frac{1}{\alpha \rho} \right)} \right] + g \frac{dh}{dx} + \lambda \frac{1}{2d} v |v| = 0 \quad (85)$$

A kapcsos zárójellel jelölt tagok már hasonlíthatnak az iránymenti deriváltakra (83. és 84. egyenletek). Akkor lesznek egyenlőek vele, ha fennáll a következő:

$$\frac{dx}{dt} = v + \alpha a^2 \rho = v + \frac{1}{\alpha \rho} \quad (86)$$

Ebből határozzunk meg az α paramétert:

$$\alpha a^2 \rho = \frac{1}{\alpha \rho} \quad (87)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2 \rho^2} \quad (88)$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{a \rho} \quad (89)$$

α -t visszahelyettesítve 86. egyenletbe meghatározható $\frac{dx}{dt}$:

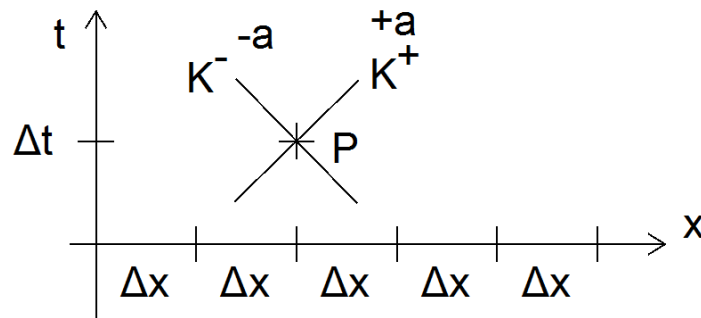
$$\frac{dx}{dt} = v \pm \frac{1}{a \rho} a^2 \rho = v \pm a \quad (90)$$

A két különböző $\frac{dx}{dt}$ azt mutatja, hogy az x-t sík egy pontján két karakterisztika is áthalad, az egyik meredeksége $v + a$, a másiké pedig $v - a$. A következőkben is csak vizes, illetve olajos rendszerekkel foglalkozunk, ezért az általában megengedett $v \approx 1 \frac{m}{s}$ sebesség az $a \approx 1000 \frac{m}{s}$ információterjedési sebességhez képest elhanyagolható. Tehát a továbbiakban: $\frac{dx}{dt} \approx \pm a$.

Ezt beírva 85. egyenletbe:

$$\frac{dv}{dt} \pm \frac{1}{a \rho} \frac{dp}{dt} + g \frac{dh}{dx} + \lambda \frac{1}{2d} v |v| = 0 \quad (91)$$

A kapott egyenlet már közös differenciálegyenlet-rendszer. Az iránymenti deriváltak azt jelentik, hogy az adott változót a karakterisztikák mentén ($x(t)$) kell deriválni.



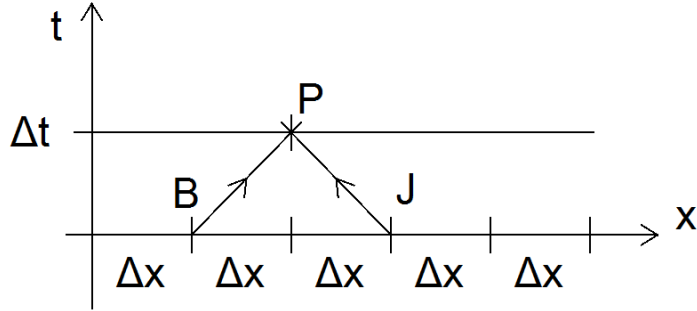
32. ábra. Karakterisztikák

A 32. ábrán láthatóak a karakterisztikák, K^+ -al jelölve a pozitív karakterisztikát, vagyis amelynek $+a$ a meredeksége és K^- -al jelölve a negatív karakterisztikát.

Az egyenletrendszer megoldásához diszkretizálni kell, fel kell bontani a problémát időben és térben is. Az időbeli felbontás (Δt) és a térbeli felbontás (Δx) között a következő kapcsolatnak kell fennállnia:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong a \quad (92)$$

A 33. ábrán látható a használt háló.



33. ábra. Karakterisztikák módszeréhez használt háló

A számításhoz szükséges ismerni $t = 0$ időpontban az egész csőben a nyomást és a sebességet, tehát $p(x, 0)$ -t és $v(x, 0)$ -t, ez a kezdeti feltétel.

Egy kijelölt P pont két karakterisztikáját írjuk fel, és vizsgáljuk meg az így kapott egyenletrendszert.

Felírható a pozitív karakterisztika:

$$\frac{v_P - v_B}{\Delta t} + \frac{1}{a\rho} \frac{p_P - p_B}{\Delta t} + g \frac{h_P - h_B}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2d} v_P |v_B| = 0 \quad (93)$$

A 93. egyenletben látható $v_P |v_B|$ tag csak közelítés, azonban ennek kis hatása van a megoldásra, mert ilyen jellegű problémáknál nem a csősúrlódásból származó veszteség a meghatározó tényező. Ezzel a közelítéssel jelentősen egyszerűsítjük a megoldás menetét.

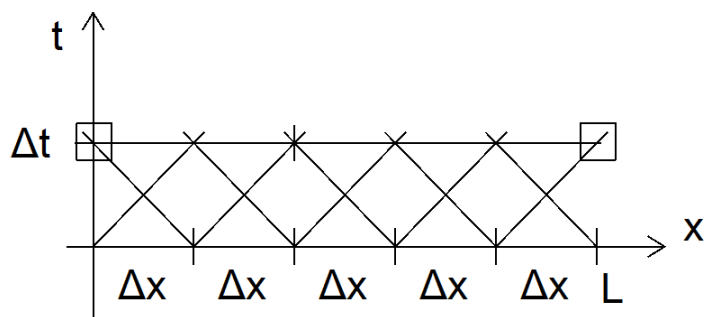
93.-hoz hasonlóan felírható a negatív karakterisztika is:

$$\frac{v_P - v_J}{\Delta t} - \frac{1}{a\rho} \frac{p_P - p_J}{\Delta t} + g \frac{h_P - h_J}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2d} v_P |v_J| = 0 \quad (94)$$

93. és 94. egyenletben v_P és p_P ismeretlen, a két egyenlet lineáris egyenletrendszert alkot, tehát az ismeretlenek meghatározhatóak.

Mivel a hálót úgy vettük fel, hogy $\frac{\Delta x}{\Delta t} = a$, ezért egy időlépés alatt (Δt) a csőben a zavarások pontosan Δx utat tesznek meg. Ebből is látható, hogy a P pontbeli jellemzőket csak a B és J pontok előző időlépésbeli jellemzőik befolyásolják. A B és J ponton kívüli pontok a hatáskúpon kívül vannak, nem hatnak egy időlépés alatt a P pontra, ami egyezik a fizikai megfontolással is, hiszen egy időlépés alatt a távolabbi pontoktól nem jut el az információ a P pontig.

Ugyanebből a megfontolásból szükségünk van peremfeltételekre is. Ha csak a kezdeti feltételt ismerjük, akkor az első időlépés után nem tudjuk kiszámítani a szélső pontokban a nyomást és a sebességet, mert oda csak a belső pont felől húzható egy karakterisztika, így egy egyenletünk lesz két ismeretlenre. A következő időlépésben már a szélsők melletti 1-1 pontban sem tudunk számolni, mert oda ismét csak egy egyenletet tudunk felírni.

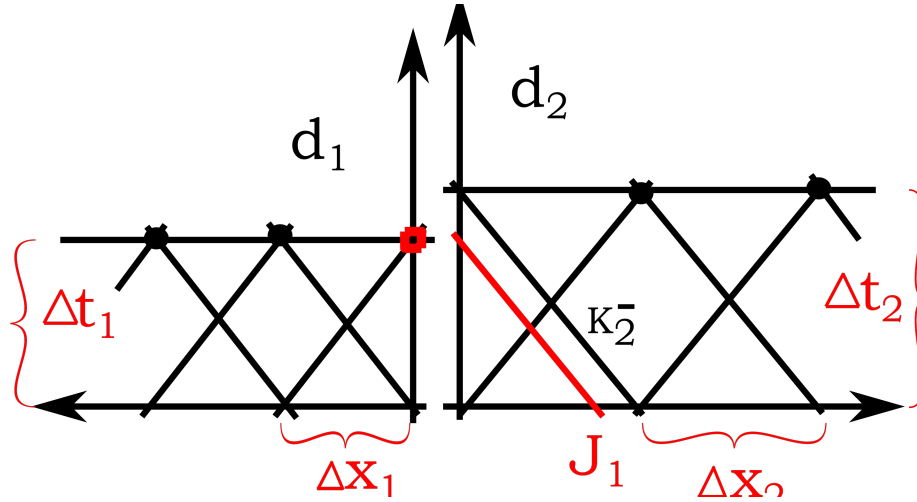


34. ábra. Karakterisztikák módszeréhez használt peremfeltételek

Lehetséges peremfeltételek:

- Medence $x = 0$ -nál: Ha a medence vízszintje (H) ismert: $p_P = \rho g H$. Ezután p_P beírható a K^- egyenletbe, amiből kifejezhető v_P .
- Zárt csővég $x = L$ -nél: Itt a $v_P = 0$, ez beírható a K^+ egyenletbe, amelyből kifejezhető p_P .
- Időben változó nyomás előírása: Megadható $p = p(0, t)$ vagy $p = p(L, t)$.
- Időben változó sebesség előírása: Megadható $v = v(0, t)$ vagy $v = v(L, t)$. Ilyen például egy dugattyús szivattyú vagy egy fogaskerék-szivattyú.
- Nyomás és sebesség közötti kapcsolat: $x = 0$ vagy $x = L$ helyen $f(p, v) = 0$ kapcsolatot írunk elő, ilyen például egy szivattyú jelleggörbéje.
- Csőcsatlakozás

A csőcsatlakozás esete részletesebben, két csatlakozó csőre:



35. ábra. Csőcsatlakozás peremfeltételek

Ebben az esetben az ismeretlenek:

- v_{1N} : Első cső végi sebesség
- v_{2E} : Második cső eleji sebesség
- p : Közös nyomás

Ha a két cső esetében egyezik az időlépés ($\Delta t_1 = \Delta t_2$), akkor könnyen felírható a 3 ismeretlenhez szükséges 3 egyenlet. Az első cső oldaláról K^+ , a második cső oldaláról K^- és egy kontinuitás egyenlet alkotná a szükséges egyenletrendszer.

Ha nem egyezik meg az időlépés, akkor a két cső oldaláról indított karakterisztikák nem egy pontba futnának be, ezért interpoláció szükséges. A számítás menete a következő, ha $\Delta t_1 < \Delta t_2$.

Mivel Δt_1 és a második csőbeli hullámterjedési sebesség (a_2) ismert, ezért szerkeszthető egy $-a_2$ meredekségű karakterisztika a bal oldali cső Δt_1 időlépés utáni szélső pontjából kiindulva. Ez a karakterisztika a második cső oldalán J_1 pontban metszi a jelenlegi időlépés tengelyét. J_1 pontban lévő nyomás és sebességértékeket a két mellette található pontból interpolálhatjuk.

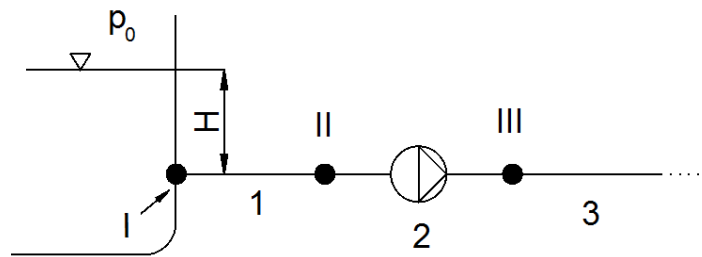
Ezzel a bal oldali cső szélső pontjánál Δt_1 időlépésnél számítható a sebesség és nyomás. A 3 egyenlet a bal oldali cső K_1^+ és a második cső előbb tárgyalt, interpolált K_2^- karakterisztikája és a kontinuitás.

A következő számításnál ugyanezeket a lépéseket kell megismételni. A 35. ábra példájánál maradv a következő lépésnél a két cső szerepe felcserélődik. Hosszabb számításoknál minden számítási lépésben figyelemmel kell lenni arra, hogy a melyik cső Δt_i -je a kisebb, azaz, hogy melyik csőtől kell indítani az interpolációt.

Ha kettőnél több cső csatlakozik egy pontban, akkor is használható a fenti eljárás, minden újabb cső egy új ismeretlent (az új cső szélső pontbeli sebessége) és egy új egyenletet hoz a rendszerbe, tehát megoldható marad az egyenletrendszer.

4.2.1. Gyakorlati példa

A következő példában a 36. ábrán látható hálózatot fogjuk vizsgálni.



36. ábra. Egyszerű példa

A rendszerben található szivattyú egy rövid szívóvezetéken egy szívómedencéből továbbítja a vizet egy távvezetékbe.

Az következő egyenletek írhatóak fel:

$$\text{Medence egyenlete: } p_I = \rho g H \quad (95)$$

$$\text{Szívócső ágegyenlete: } p_{II} - p_I + A_1 Q_1 + B_1 Q_1^2 + C_1 Q_1 |Q_1| + D_1 = 0 \quad (96)$$

$$\text{Szivattyú ágegyenlete: } p_{III} - p_{II} + A_2 Q_2 + B_2 Q_2^2 + C_2 Q_2 |Q_2| + D_2 = 0 \quad (97)$$

$$\text{Kontinuitás: } Q_1 = Q_2 \quad (98)$$

Az ismeretlenek: $Q_1, Q_2, p_I, p_{II}, p_{III}$.

A megoldáshoz szükséges még egy egyenlet, ami a távvezeték szélső pontjába felírható K^- karakterisztika egyenlet.

Ha az ágegyenletek instacionárius formáját fel tudjuk írni, megoldhatóvá válik a rendszer instacionárius számítása.

Csőszakasz instacionárius ágegyenlete: A szívócső általában rövid, maximum néhány 10 méter hosszú. Acélső - víz rendszerben a hullámterjedési sebesség $\sim 1000 \frac{m}{s}$, egy 10 méter hosszú csőben 0,01 másodperc alatt jut el az információ az egyik végétől a másikig. Ez olyan rövid idő, hogy nem szokás figyelembe venni, ezzel az elhanyagolással parciális differenciálegyenlet helyett instacionárius Bernoulli-egyenlet írható fel.

Ezt a megközelítést "merev" modellnek/hálózatnak/alrendszernek nevezzük, emellett még elterjedt a koncentrált paraméterű alrendszer elnevezés is (a paraméterek x -től nem függenek, koncentráltak). Ha állandó átmérőjű a cső:

$$\left[p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g h \right]_1^2 + \rho \int_1^2 \frac{dv}{dt} dx + \Delta p' = 0 \quad (99)$$

A 99. egyenletben található $\Delta p'$ tagot a klasszikus módon közelítjük:

$$\Delta p' = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} v |v| = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} \frac{1}{A^2} Q |Q| \quad (100)$$

Mivel instacionárius állapotot vizsgálunk ($Q = Q(t)$), a csőben időben nem állandó a sebesség, tehát a veszteség is változik időben, azonban ezt nem vesszük figyelembe. Speciális esetekben ez okozhat pontatlanságot a számításban, de általános esetben használható a közelítés.

$$p_2 - p_1 + \rho g (h_2 - h_1) + \underbrace{\rho \int_1^2 \frac{dv}{dt} dx}_{\lambda \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} v |v|} = 0 \quad (101)$$

A kapcsos zárójellel jelzett tagot kifejtve:

$$\rho \int_1^2 \frac{dv}{dt} dx = \rho \frac{dv}{dt} \int_1^2 dx = \rho \frac{dv}{dt} L = \rho \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} L \quad (102)$$

A 101. egyenletbe 102.-t behelyettesítve:

$$p_2 - p_1 + \rho g (h_2 - h_1) + \rho \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} L + \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} \frac{1}{A^2} Q |Q| = 0 \quad (103)$$

103. egyenletet diszkretizálva:

$$p_2 - p_1 + \rho g(h_2 - h_1) + \rho L \frac{1}{A} \frac{Q^{(j+1)} - Q^{(j)}}{\Delta t} + \lambda \frac{L \rho}{d} \frac{1}{2 A^2} Q^{(j+1)} |Q^{(j)}| \cong 0 \quad (104)$$

Ahol $Q^{(j)}$ a j -edik, $Q^{(j+1)}$ pedig a $(j+1)$ -edik időpontbeli térfogatáram. A 104. egyenlet írható korábban is használt formában:

$$p_2 - p_1 + A_k Q_k + D_k = 0 \quad (105)$$

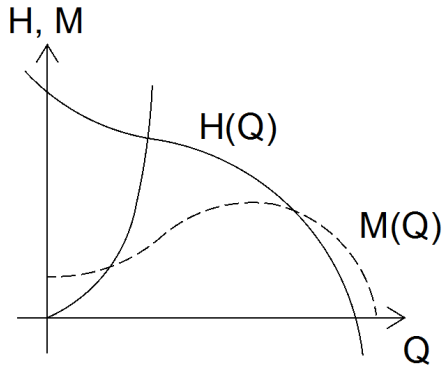
Ahol az együtthatók:

$$A_k = \rho L \frac{1}{A \Delta t} + \lambda \frac{L \rho}{d} \frac{1}{2 A^2} |Q^{(j)}| \quad \text{és} \quad D_k = \rho g(h_2 - h_1) - \rho L \frac{1}{A} \frac{Q^{(j)}}{\Delta t} \quad (106)$$

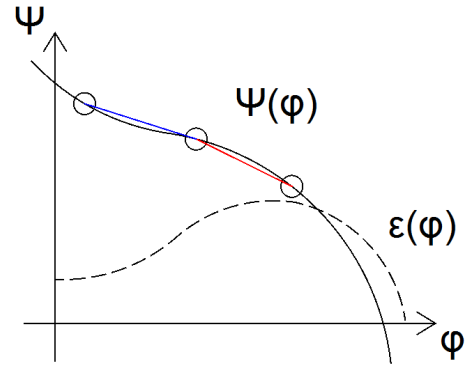
Az A_k és D_k is tartalmazza $Q^{(j)}$ -t, tehát időfüggő a két együttható.

Szivattyú instacionárius ágegyenlete: A szivattyú állandó fordulatszámra felírható szállítómagassága:

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_2 - h_1 \quad (107)$$



37. ábra. Szivattyú jelleggörbéje és nyomaték görbéje



38. ábra. Dimenziótlan jelleggörbe és nyomaték görbe

A stacionárius modellezésnél a jelleggörbe közelítésére parabolát használtunk, mert csak a legjobb hatásfokú pont környezetét vettük figyelembe a számításkor. (Stacionárius üzemben gazdaságossági kérdés a jó hatásfokú szakaszon üzemeltetni a gépet.) Instacionárius esetben azonban átmenetileg üzemelhet a jelleggörbe más szakaszain is a szivattyú, ezért ú.n. 3/4-es jelleggörbét kell használnunk, és ezt teljes egészében közelítenünk kell. A számításához célszerű szakaszonként egyenesekkel közelíteni a görbét.

Mivel a instacionárius állapotokban a szivattyút hajtó motor fordulatszáma is változhat (például szivattyúkiesésnél vagy indításnál), ezért szükség van a dimenziótlan jelleggörbére, mely nem csak egy adott fordulatszámra érvényes, hanem közelítőleg az előforduló fordulatszám-tartományra (általában: $0 \leq n \leq n_{\text{üzemi}}$). A dimenziótlan jelleggörbe látható a 38. ábrán.

A használt dimenziótlan mennyiségek:

$$\text{Mennyiségi szám} \quad \varphi = \frac{Q}{nD^3} \quad (108)$$

$$\text{Nyomásszám} \quad \Psi = \frac{gH}{n^2D^2} \quad (109)$$

$$\text{Nyomatéki szám} \quad \varepsilon = \frac{M}{\rho n^2 D^5} \quad (110)$$

Ahol D a jellemző méret. A gép gyártójától függ, hogy mit tekintenek jellemző méretnek, radiális járókeréknél lehet a járókerék átmérője, de a szívócsőátmérőt is szokás alkalmazni.

A jelleggörbére szakaszonként felírható (a_0 és a_1 szakaszonként változik):

$$\Psi = a_0 + a_1\varphi \quad (111)$$

A dimenziótlan mennyiségek definícióját behelyettesítve:

$$\frac{gH}{n^2D^2} = a_0 + a_1\frac{Q}{nD^3} \quad (112)$$

Ebből kifejezve a szállítómagasságot:

$$H = n^2D^2\frac{a_0}{g} + \frac{a_1}{g}n\frac{Q}{D} \quad (113)$$

Behelyettesítve a bal oldalra a szállítómagasság definícióját (107.):

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) + h_2 - h_1 = n^2D^2\frac{a_0}{g} + \frac{a_1}{g}n\frac{Q}{D} \quad (114)$$

$\rho \cdot g$ -vel megszorozva, és átrendezve:

$$p_2 - p_1 - \frac{a_1nQ}{D}\rho + \frac{Q^2}{2}\rho \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) + \rho g(h_2 - h_1) - n^2D^2a_0\rho = 0 \quad (115)$$

Ez a szivattyú instacionárius ágegyenlete, mely írható a következő formába:

$$p_2 - p_1 + A_kQ + B_kQ^2 + D_k = 0 \quad (116)$$

Ahol az együtthatók:

$$\begin{aligned} A_k &= -\frac{a_1n}{D}\rho \\ B_k &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) \\ D_k &= \rho g(h_2 - h_1) - n^2D^2a_0\rho \end{aligned}$$

Ebből is látható, hogy $A_k(n)$ és $D_k(n)$ a fordulatszám függvénye, tehát szükség lesz még egy egyenletre a fordulatszám meghatározásához.

Ha a fordulatszám állandó, akkor a motor által kifejtett nyomaték megegyezik a szivattyú által felvett hidraulikai nyomatékkal. Ha a motor táplálása megszűnik, akkor a motor nyomatéka is nulla lesz (szivattyú kiesés jelensége), és a rendszert a hidraulikai nyomaték fékezi.

A nyomatéokra felírható:

$$M = \Theta \frac{d\omega}{dt} \quad (117)$$

Ahol ω a szögsebesség, Θ pedig az egész forgórész tehetetlenségi nyomatéka. A tehetetlenségi nyomaték egy részét a motor forgórésze adja, ezt általában a motor katalógusa tartalmazza. A tengelykapcsoló tehetetlenségi nyomatékát szintén vagy a katalógusából tudhatjuk meg, vagy geometriai becslésből közelíthetjük. A szivattyú járókerékének tehetetlenségi nyomatéka általában nem ismert, becslés alapján számolhatunk vele.

Külső motoros radiális járókerékű szivattyú esetén a teljes tehetetlenségi nyomatéknak a nagyobb része a motor forgórészétől származik, így a járókerék esetében használt becslés pontatlansága nem okoz jelentős eltérést. Búvárszivattyúk esetében a hosszú motor és a több járókerék miatt körülbelül összevethető a motor forgórészének és a járókerék tehetetlenségi nyomatéka értéke.

A 117. egyenletet továbbírva:

$$M = 2\pi\Theta \frac{dn}{dt} \quad (118)$$

Tehát:

$$M \cong 2\pi\Theta \frac{\Delta n}{\Delta t} \quad (119)$$

A nyomaték dimenziótlan görbét egyenes szakaszokkal közelítve:

$$\varepsilon = b_0 + b_1\varphi \quad (120)$$

$$\frac{M}{\rho n^2 D^5} = b_0 + b_1 \frac{Q}{n D^3} \quad (121)$$

Átrendezve nyomatéokra:

$$M = b_0 \rho n^2 D^5 + b_1 \rho n D^2 Q \quad (122)$$

A számítás menete a következő:

A kezdeti időpontban ismert n , Q és p , ezekből számítható a nyomaték (M). A nyomatékból $M = 2\pi\Theta \frac{\Delta n}{\Delta t}$ képlet segítségével számítható Δn . Ebből meghatározható az új időlépésben a fordulatszám: $n^{(1)} = n + \Delta n$. Az új fordulatszám beírható A_k és D_k képletébe, ezzel meghatároztuk az ágegyenlet összes együtthatóját, vagyis megoldható az egyenletrendszer, eredményeként kapjuk $p^{(1)}$ nyomást és $Q^{(1)}$ térfogatáramot az új időlépésben.

Miután az instacionárius ágegyenletek is ismertek, teljessé vált a 95.-98. egyenletekből és a távvezeték negatív karakterisztikájából álló egyenletrendszer.

A gyakorlatban a tranzienst számítások elvégzése ritkán történik cégeknél, jellemzően egyetemeket bíznak meg a feladattal.

4.3. Tranziens áramlás gravitációs csatornákbán

Jellemzően már a csatornahálózatokat is ellátják irányítástechnikai berendezésekkel, így szükséges ilyen esetben is számolni a tranziens átmenetekkel.

A levezetés menete hasonló a teltszelvényű esethez, ezért egyes részekhez kevesebb magyarázat társul.

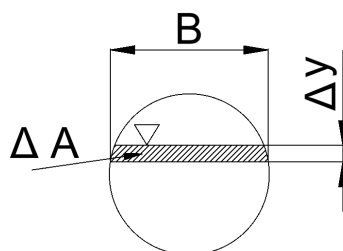
Induljunk ki az áramcsőre felírt kontinuitás egyenletből (73.)

$$\frac{\partial(A\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (123)$$

Nyílt felszínű csatornák esetében a nyomás a csatorna mentén szinte állandó, a hidrosztatikus nyomás is kicsi a csatorna fenekénél (a vízszint jellemzően < 2 [m], tehát $p < 0,2$ [bar]). Emellett a sűrűség állandóságát is feltételezhetjük:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Av)}{\partial x} = 0 \quad (124)$$

A következő ábra megegyezik a 14. ábrával, valamint a 125. és a 126. egyenlet is egyezik a 46 egyenlettel.



39. ábra. Segédábra

A 39. ábra alapján:

$$\Delta A \cong B \Delta y \quad (125)$$

$$\frac{dA}{dy} \cong B, \text{ ha } A = A(y) \quad (126)$$

A 124. egyenletben található A felületeket tartalmazó tagokat láncszabály szerint kifejtve:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (127)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (128)$$

A 127.-t és 128.-t beírva a kontinuitás 124. alakjába:

$$B \frac{\partial y}{\partial t} + v B \frac{\partial y}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (129)$$

B -vel elosztva:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (130)$$

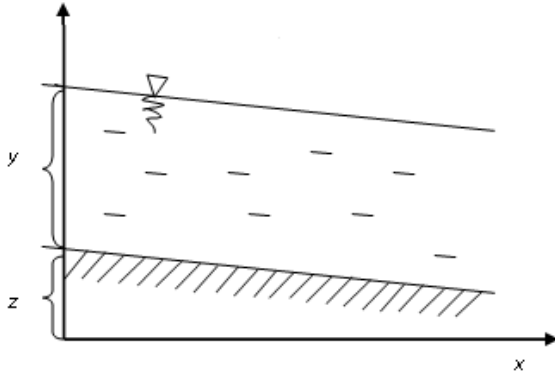
A kontinuitásnak ezt a formáját fogjuk a későbbiekben használni. Írjuk fel a mozgásegyenletet (1D Euler egyenlet veszteségekkel):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x}(z + y) + gS_f = 0 \quad (131)$$

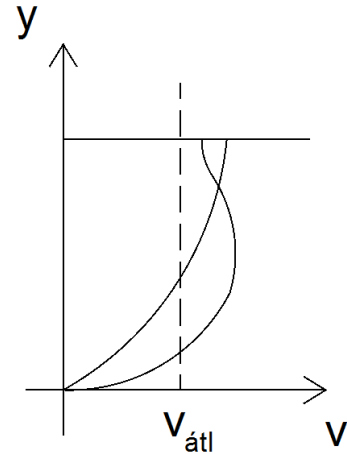
Ahol S_f veszteségtag (C a Chézy-állandó):

$$S_f = \frac{v^2}{C^2 R_h} \quad (132)$$

A csatornában kialakuló sebességprofilok a 41. ábrán láthatóak. Nyílt felszíni csatornaáramlásnál az átlagsebesség körülbelül megegyezik a felszíni sebességgel, tehát az egyenletekben használható a felszíni sebesség.



40. ábra. Csatornaáramlás jelölései



41. ábra. Csatornában kialakuló sebességprofilok

A 131. egyenlethez a következő megfontolásokat tesszük:

p a vízfelszínen állandó, tehát $\partial p / \partial x = 0$.

Ezen felül:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx} = -i \quad (133)$$

Ezek felhasználásával és átrendezve 131. egyenletet:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{dy}{dx} = g(i - S_f) \quad (134)$$

Ez a mozgásegyenlet továbbiakban használt formája.

A 130. és 134. egyenlet hasonlóan a korábbi fejezetben részletezett levezetéshez, itt is parciális differenciálegyenlet-rendszert alkot. Az egyik jelentős különbség, hogy ott p nyomás, illetve v sebesség volt a két változó, jelen esetben viszont v sebesség mellett y vízszint a keresett függvények. A korábbiakhoz hasonlóan itt is arra fogunk törekedni,

hogy közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vezessük vissza, és azt numerikusan megoldjuk, tehát itt is a karakterisztikák módszerét alkalmazzuk.

A korábbiakhoz hasonlóan felírva az iránymenti deriváltakat:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (135)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (136)$$

A kontinuitás (130.) és a mozgásegyenlet (134.) lineáris kombinációját írjuk fel:

$$M + \alpha \cdot C \quad (137)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \underbrace{\left(v + \alpha \frac{A}{B}\right)} + \alpha \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \underbrace{\left(v + \frac{g}{\alpha}\right)} \right] = g(i - S_f) \quad (138)$$

A 138. egyenlet első két tagja, illetve a szögletes zárójelben látható két tag már hasonló az iránymenti deriváltakhoz (135. és 136.) A teljes egyezéshez szükséges, hogy a két kapcsos zárójellel jelölt tag egyenlő legyen $\frac{dx}{dt}$ -vel, a karakterisztika görbe deriváltjával, tehát:

$$\frac{dx}{dt} = v + \alpha \frac{A}{B} = v + \frac{g}{\alpha} \quad (139)$$

Rendezve:

$$\alpha \frac{A}{B} = \frac{g}{\alpha} \quad (140)$$

Kifejezve α -t:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{gB}{A}} \quad (141)$$

138. egyenletbe beírva α -t és az iránymenti deriváltakat megkapjuk a közönséges differenciálegyenlet rendszert, amelyet majd meg kell oldanunk:

$$\frac{dv}{dt} \pm \sqrt{g \frac{B}{A}} \frac{dy}{dt} = g(i - S_f) \quad (142)$$

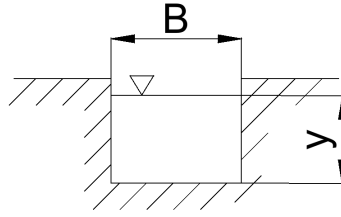
α -t visszahelyettesítve 139. egyenletbe megkapjuk a karakterisztika görbék érintőjét:

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{\frac{gB}{A}} \cdot \frac{A}{B} = v \pm \sqrt{g \frac{A}{B}} = v \pm a \quad (143)$$

Ahol a a sekélyvízi hullám terjedési sebessége, az $a = \sqrt{g \frac{A}{B}}$ összefüggés levezethető a csatornára felírt kontinuitásból és impulzustételből, a levezetést itt nem részletezzük.

Acélcsőben víz teltszelvényű áramlásánál a hullámterjedési sebesség $\approx 1000 \left[\frac{m}{s}\right]$, emiatt a néhány $\left[\frac{m}{s}\right]$ -os áramlási sebességet (v) elhanyagoltuk. A következő rövid példában vizsgáljuk meg a két sebesség nagyságrendjét csatornaáramlás esetére is.

Téglalap keresztmetszetű csatorna esetén:



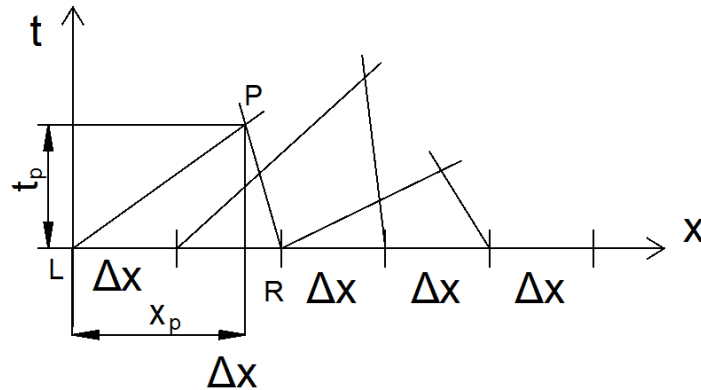
42. ábra. Téglalap keresztmetszetű csatorna

Nagyméretű csatornát vizsgálva a vízszintet vegyük fel $y = 2$ [m]-re, ebben az esetben:

$$a = \sqrt{g \frac{A}{B}} = \sqrt{g \cdot y} = \sqrt{9,81 \cdot 2} \cong 4,4 \left[\frac{m}{s} \right] \quad (144)$$

Ebből is látható, hogy még nagy méretű csatornáknak sem hanyagolható el az áramlási sebesség a hullámterjedési sebességhez képest. Ez okozza az egyik fontos eltérést a teltszelvényű áramláshoz képest a karakterisztikák módszerének alkalmazásakor.

A v -t és a -t is figyelembe kell vennünk, de ezek a csatorna mentén változnak, ezért egy időlépésen belül a csatorna mentén változnak a karakterisztika egyenesek meredekségei is, ahogy a 43. ábra is szemlélteti:



43. ábra. Karakterisztika egyenesek áramlás esetén

A P pontban ismeretlenek: x_P , t_P , v_P , y_P . A négy ismeretlenhez rendelkezésre áll négy egyenlet (karakterisztikák meredeksége (143.) diszkretizálva, illetve a közönséges differenciálegyenlet (142.) a két karakterisztika mentén szintén diszkretizálva):

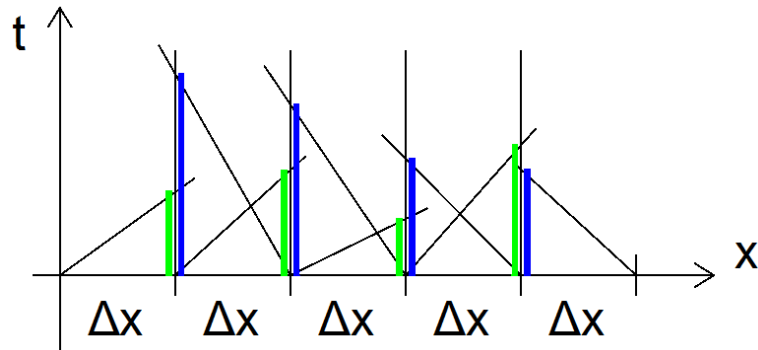
$$\frac{x_P - x_L}{\Delta t} = v_L + \sqrt{g \frac{A_L}{B_L}} \quad (145)$$

$$\frac{x_R - x_P}{\Delta t} = v_R - \sqrt{g \frac{A_R}{B_R}} \quad (146)$$

$$\frac{v_P - v_L}{\Delta t} + \sqrt{g \frac{A_L}{B_L}} \cdot \frac{y_P - y_L}{\Delta t} = g(i - S_{f,L}) \quad (147)$$

$$\frac{v_P - v_R}{\Delta t} - \sqrt{g \frac{A_R}{B_R}} \cdot \frac{y_P - y_R}{\Delta t} = g(i - S_{f,R}) \quad (148)$$

Csatorna áramlás esetén x -ben és t -ben is eltolódnak a pontok, emiatt torzul a háló. A numerikus megoldáshoz egy javaslat a következő:

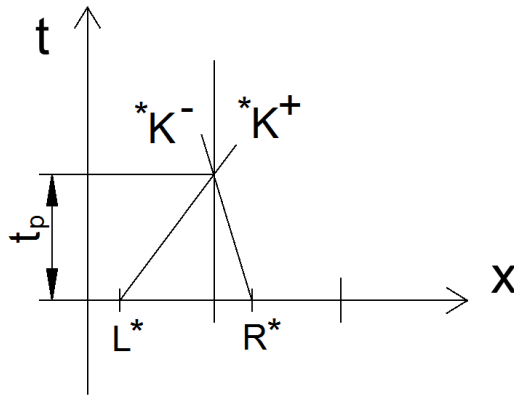


44. ábra. Megoldási javaslat

Az első időlépésben x mentén egyenközű a háló, tehát azonos a Δx osztás. Első lépésben kiszámoljuk az összes ponthoz tartozó karakterisztika egyenesekhez tartozó Δt értékeket, majd ezek közül kiválasztjuk a legkisebbet, ez lesz a következő időlépésünk. Az egyes pontokból indított pozitív karakterisztikákból számolt Δt értékeket zöld vonalakkal ábrázoltuk a 44. ábrán. Hasonlóan a negatív karakterisztikákból számoltakat kékekkel láthatjuk. Az összes "zöld" és "kék" érték közül kell kiválasztani a legkisebbet, majd ezzel folytatni a számítást.

Lehetséges, hogy az egész cső mentén 1 olyan karakterisztika lesz csak, amely pontosan az első időlépésnél lévő valamely pontból indul, és átmegy a következő időlépés egy háló pontján.

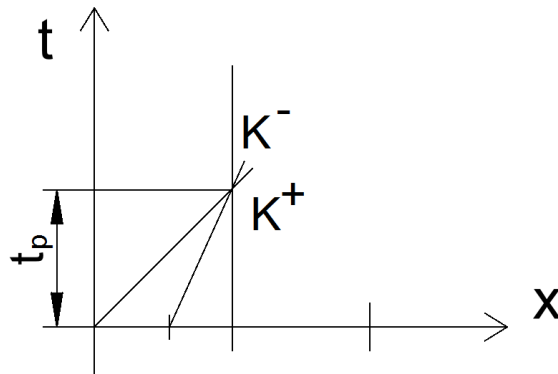
A számítás során interpolációt kell alkalmazni, az új időlépés minden pontjához meg kell határozni L^* és R^* pontokat a kiszámított legkisebb Δt segítségével, ahogy az a 45. ábrán is látható.



45. ábra. Karakterisztika egyenesek interpolációja

Az L^* és R^* pontokban a változók értékeit a háló egyenközű pontjaiból lineáris interpolációval határozzuk meg. Ezek után már a teltszelvényű áramláshoz hasonlóan folytatható a számítás.

A karakterisztikák meredekségével kapcsolatban felmerülhet egy probléma. 144. képlet alapján például 150 milliméteres vízszintnél a hullámterjedési sebesség $0,6 \left[\frac{m}{s} \right]$, egy ilyen csatornában előfordulhat $1 \left[\frac{m}{s} \right]$ körüli áramlási sebesség. Hasonló számokkal viszont mindkét karakterisztika görbe meredeksége pozitív ($1 + 0,6 > 0$ és $1 - 0,6 > 0$):



46. ábra. "Elfajult" karakterisztika egyenesek rohanás esetén

Ilyen esetben rohanásról beszélünk. A számítás elvégezhető ilyenkor is, azonban az új időlépésben számolt pontba csak tőle fizikailag balra lévő pontokból számolunk. Emiatt a jobb oldalról nincs visszahatás, és nem szükséges jobb oldali peremfeltételt megadnunk, mivel úgysem használnánk fel.

Ezen megfontolásokkal használható a bemutatott eljárás a gravitációs csatornában kialakuló áramlás számítására.

A felhasznált irodalom

KULLMANN L.:Előadásvázlat az Áramlástechnikai gépek című, BMEGEVGAG02 BMEGEVGAE01 kódú tárgyakhoz. 2013. http://www.hds.bme.hu/letoltesek/targyak/BMEGEVGAG02/atg_jegyzet.pdf

ALLIEVI L.: Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione (colpo d'areite). (General theory of the variable motion of water in pressure conduits.), Annali della Società degli Ingegneri Italiani, 17 (5), 285-325, Milan, Italy.

WYLIE E. B., STREETER V.L.: Fluid Transients in Systems. Prentice-Hall, Inc., New-Jersey, 1993

FŰZY O.: Áramlástechnikai gépek és rendszerek. Tankönyvkiadó 1991.

HALÁSZ G., KRISTÓF G., KULLMANN L.: Áramlás csőhálózatokban. Egyetemi tankönyv. Műegyetemi Kiadó 2002.

DAUGHERTY, FRANZINI, FINNEMORE: Fluid Mechanics With Engineering Applications. McGraw-Hill Book Co. 1989.

5. Gyakorlati alkalmazások

5.1. Csatornahálózat számítása

A feladat több csatorna találkozásának modellezése, a kialakuló áramlás kiszámítása volt. A megoldás során az első lépés egy csatorna stacionárius számítása volt, majd ezt a csatornát tranziens megoldóval is vizsgálták.

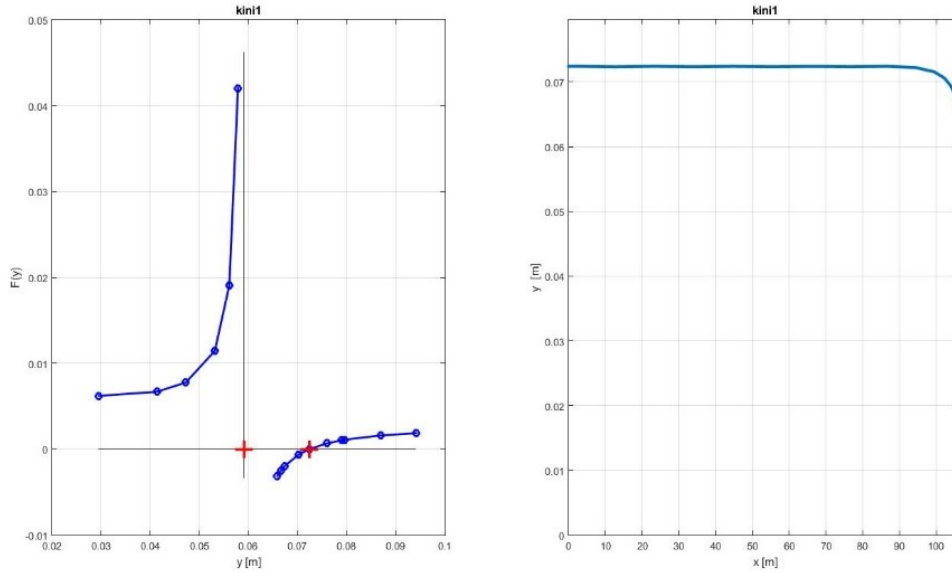
5.1.1. Állandósult állapot számítása differenciálegyenlet megoldásával

A 3. fejezetben leírtaknak megfelelően az 52. differenciálegyenletet oldották meg, α felhasználásával:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g A^3}} \quad (149)$$

A csatorna 200 mm átmérőjű cső volt, 106,9 m hosszú, 2,5 ezrelék esésű, és $Q = 5$ l/s térfogatáram áramlott benne. A csatorna végén szabad kifolyás volt a peremfeltétel, tehát y_{krit} vízmélység volt előírva.

A kapott eredmények láthatóak a 47. ábrán, a bal oldalon az $F(y)$, a jobb oldalon $y(x)$:



47. ábra. Stacionárius számítás eredményei

| | | | |
|------------------|------------|-------|--------|
| Normál mélység | y_{norm} | [mm] | 72,4 |
| Normál sebesség | v_{norm} | [m/s] | 0,488 |
| Kritikus mélység | y_{krit} | [mm] | 59,0 |
| Hullámsebesség | a | [m/s] | 0,645 |
| Kritikus esés | i_{krit} | [–] | 0,0055 |

5. táblázat. A stacionárius számítás eredményei

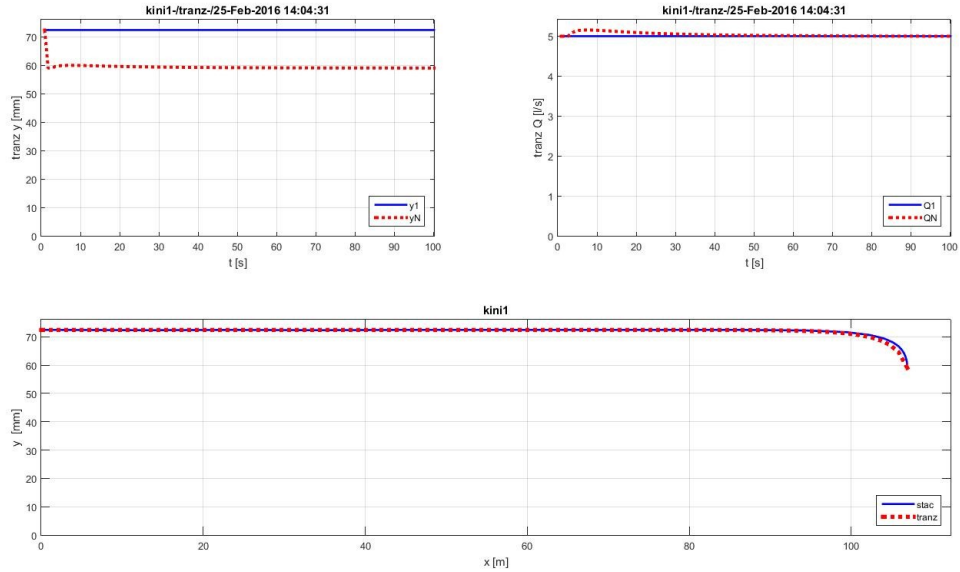
5.1.2. Állandósul állapot számítása a karakterisztikák módszerével

Az előző pontban bemutatott $y(x)$ felszín-alak kiszámítható tranziens számítási módszerrel is. A tranziens vizsgálat kezdeti feltétele a következő volt: indulásakor, $t = 0$ -nál az egész csatornában y_{norm} volt előírva. A beavatkozás az utolsó pontban történt, ahol $y = y_{krit}$ volt a peremfeltétel. Ez egy tranziens folyamatot indított el a csatorna-áramlásban, mely csillapodott az idő előrehaladtával.

100 másodperc elteltével már megállapodott a vízfelszín alakja, melyet a 48. ábrán mutatunk be.

A bal felső ábrán késsel az első pontban, pirossal pedig az utolsóban számított vízmélység, a jobb felső ábrán pedig hasonlóan a térfogatáramok figyelhetőek meg.

Az alsó ábrán a 100 másodperc után kialakult vízszint van ábrázolva pirossal, a stacionárius számításból kapott eredmények pedig késsel.

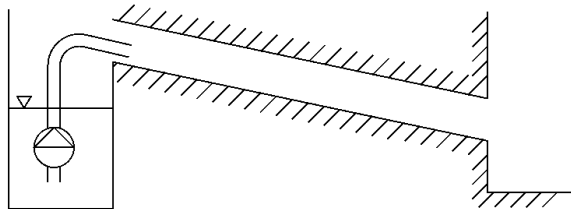


48. ábra. Tranziens számítás eredményei

Látható, hogy a stacionárius és a tranziens futtatás eredményei jó egyezést mutatnak, ez egy ellenőrzési pont a megoldók későbbi használata előtt.

5.2. Szivattyú

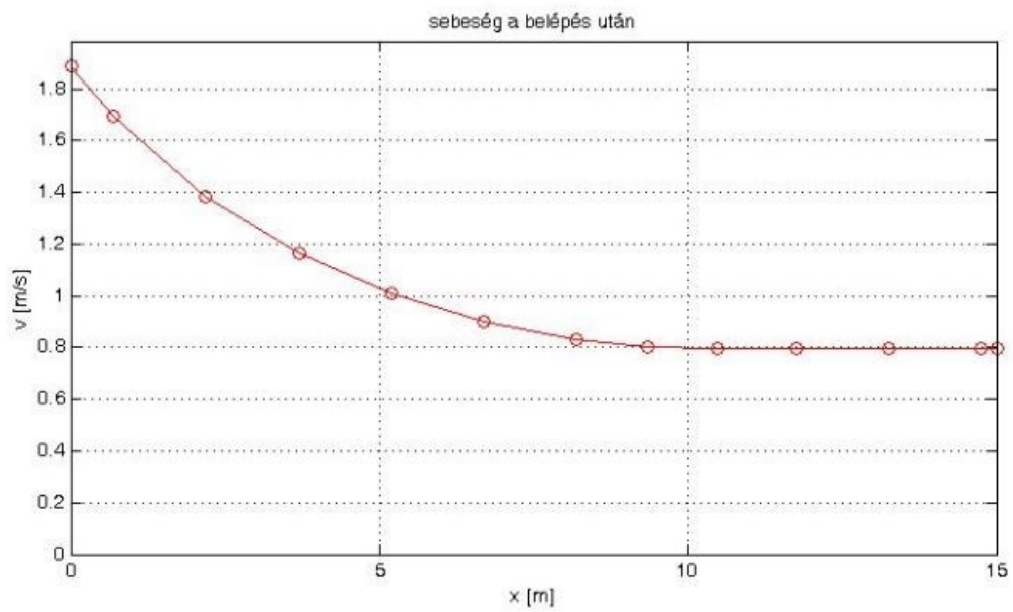
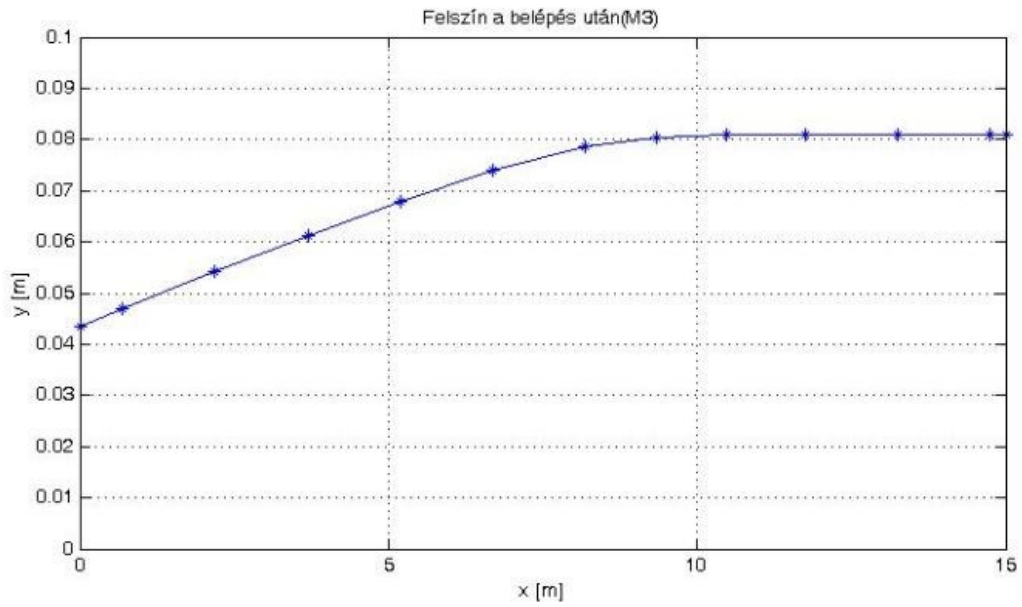
A 49. ábrán látható a feladat sematikus elrendezése.



49. ábra. Szivattyús példa vázlata

Egy 200 mm átmérőjű, 1000 m hosszú gravitációs csőcsatornába egy szivattyú, 80 mm belső átmérőjű nyomócsöve 9.5 l/s vízáramot 1.89 m/s sebességgel önt be.

Az elvégzett stacionárius számítás eredményeként vízmélység és sebesség a csatorna elején az 50. ábrán látható.



50. ábra. Szivattyús példa eredményei

A folyadék hamar (kb. 10 m hosszon) lelassul a normál áramlás 0.8 m/s sebességére, és kialakul a normáláramláshoz tartozó 81 mm-es mélység.