Áramlástechnikai gépek

Hibabecslés segédlet

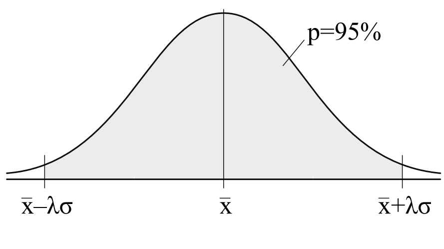
2019. február 6.

Bevezetés

Műszaki gyakorlatban sokszor nincs lehetőségünk bizonyos fizikai mennyiségek közvetlen mérésére (például hatásfok, térfogatáram), ezek értékeit közvetlenül mérhető mennyiségekből számoljuk. A mérés során a közvetlenül mért mennyiségeket valamilyen hibával tudjuk mérni, amely természetesen befolyásolja az ezekből számított mennyiségek eredményét is. Ilyen hibaforrás lehet a műszerek gyártási bizonytalansága, a leolvasási pontatlansága, illetve diszkrét leolvasási lehetősége (pl. digitális kijelző) miatti bizonytalanság. Mivel a közvetlenül mérhető mennyiségek is hibával terheltek, statisztikai számítás alapján becslést kell adni a közvetve mérhető mennyiségek hibájára is, hogy elemezni tudjuk az elvégzett mérés pontosságát. A mérőeszközök rendszeres hibája kalibrálással kiküszöbölhető, az elemzés a véletlen hibák megismerésére korlátozódik.

Alapok

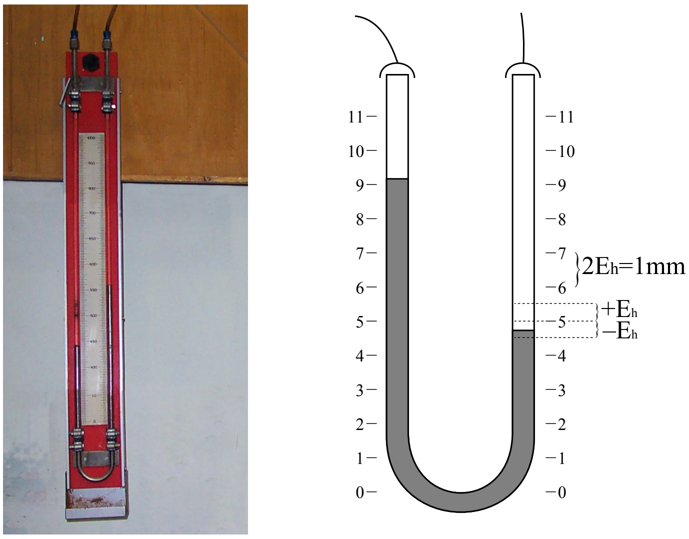
A természetben lejátszódó folyamatok legtöbbször normális eloszlást követnek. A megismételt mérésekből készített hisztogram a Gauss-görbét közelíti (lásd 1. ábra). Mérések esetén is a véletlen hiba hatását normális eloszlásúnak feltételezzük, így a számításokban is a normális eloszlás sűrűségfüggvényének tulajdonságait használjuk. A sűrűségfüggvény alatti terület adja a valószínűséget, így ha adott p valószínűség mellett kívánjuk a bizonytalanságot definiálni, akkor a mérés átlaga (vagy középértéke) körül egy a sugarú intervallumot kell meghatároznunk, amelyre a $(\overline{x}-a, \overline{x}+a)$ intervallumban a sűrűségfüggvény alatti terület p (pl. $p = 0,95$). Ez az intervallum a konfidencia intervallum a mérés átlaga körül, mely adott p valószínűség mellett tartalmazza a pontos értéket (várható érték). Az intervallum sugara $\pm a = \pm\lambda\sigma$. Standard normális eloszlás esetén $p = 95\%$ szignifikancia szint mellett $\lambda = 1,96 \approx 2$. Tehát a konfidencia intervallum sugara, ami tulajdonképpen az abszolút hiba korlátja (E), $a = E = 2\sigma$ lesz.



1. ábra. Normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Megfordítva a gondolatmenetünket, ha ismerjük, hogy mekkora a mérésünk abszolút hibakorlátja, akkor 95%-os valószínűségi szint mellett meg tudjuk mondani a szórást. Vegyük a következő esetet. U csöves manométerrel végzett nyomásmérés során (2. ábra) a higanyoszlop kitérést a skála egy diszkrét értékével közelítjük. A precíz felírás során a leolvasott névleges értékhez (h_n) megadjuk a mérés abszolút hibakorlátját (E_h) is. A fent leírtak alapján a σ_h szórás és az E_h abszolút hibakorlát között 95%-os szignifikancia-szinten fennáll az következő összefüggés $\sigma_h = E_h/2$. Mintapéldánkban, ha a leolvasás hibája $E_h = 0,5mm$ (hiszen

$4,5mm$ és $5,5,mm$ között minden értéket $5mm$-nek veszünk fel), akkor $\sigma_h = E_h/2 = 0.25mm$. A mérés pontosságára mutat rá a relatív hiba, mely az abszolút hiba és a névleges érték hányadosa ($e_h = E_h/h_n$).



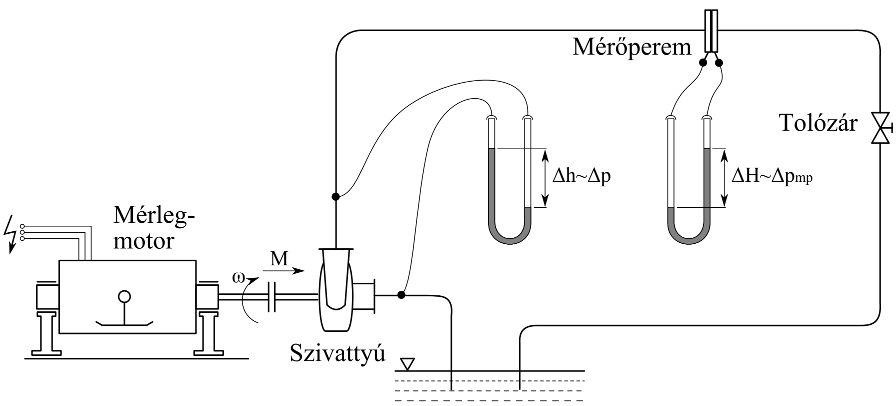
2. ábra. U csöves manométer esetén az abszolút hiba és a szórás szemléltetése.

Amennyiben a higanyszintek ingadoznak, akkor nem a leolvasási pontatlanság okoz hibát a mérésben, hanem maga a mért nyomásjel kváziperiodikussága. Ilyenkor is becslést kell adni a kitérés abszolút mértékére, ez lesz az abszolút hiba. Ha a higanyszint $3mm$ és $8mm$ között ingadozik, akkor azt mondjuk, hogy a névleges érték $h_n = 5,5mm$, kerekítve $h_n = 6mm$, a mérés abszolút hibakorlátja $E_h = 2,5mm$, a mérés szórása $\sigma = E_h/2 = 1,25mm$.

Kereskedelmi forgalomban kapható mérőműszerek esetén a relatív hibakorlátot a gyártó katalógusadatként adja meg. Szabvány alapján házilag gyártott műszereknél, mérőeszközöknél (Pitot-cső, Prandtl-cső, mérőperem stb.) a szabványból kapjuk meg a gyártásból, szerelésből adódó relatív hibakorlátot.

Példa hibaterjedésre

Adott a 3 ábrán látható rendszer. A szivattyú nyomásnövekedését U csöves manométerrel mérjük, a térfogatáramot mérőperemmel, míg a mechanikai teljesítmény mérése (szivattyúba vezetett teljesítmény) mérlegmotor segítségével történik. A szállított közeg víz, a mérőfolyadék az U csöves manométerekben higany.



3. ábra. A rendszer vázlata.

Szivattyúk fontos katalógusadata a hatásfok és a bevezetett teljesítmény a térfogatáram függvényében

($\eta = f_1(Q)$ és $P_{be} = f_2(Q)$). Ezek értékeit közvetlenül mérhető mennyiségekből számoljuk. A mért mennyiségekből származó leolvasási hibák halmozódva jelen vannak a számított mennyiségek értékében (hibaterjedés). A hibabecslés az alábbi kiértékelés szerint történik az adott esetben:

A szivattyú hatásfoka a hasznos és bevezetett teljesítmény hányadosa

$$\eta\left(P_h, P_{be}\right) = \frac{P_h}{P_{be}}. \tag{1}$$

A hasznos teljesítmény a szállított térfogatáram és a létrehozott nyomás szorzata

$$P_h\left(Q, \Delta p\right) = Q\ \Delta p. \tag{2}$$

A térfogatáramot mérőperemmel mérjük és az alábbi módon számítjuk

$$Q\left(\Delta p_{mp}\right) = \alpha A \sqrt{2\Delta p_{mp}/\rho}, \tag{3}$$

ahol Δp_{mp} a mérőperem kamrái között mérhető nyomáskülönbség

$$\Delta p_{mp}\left(\Delta H\right) = (\rho_{Hg} - \rho_v) g \Delta H, \tag{4}$$

A szivattyú nyomásnövekedését U csöves manométerrel mérjük

$$\Delta p\left(\Delta h\right) = (\rho_{Hg} - \rho_v) g \Delta h. \tag{5}$$

A bevezetett teljesítmény (tengelyteljesítmény) a tengelyen mérhető nyomaték és a szögsebesség szorzata

$$P_{be}\left(M, n\right) = M\ \omega = M 2\pi n, \quad M\left(m\right) = (m - m_0) g l. \tag{6}$$

Származtatott mennyiség ($w = f(x, y, z)$) szórása az alábbi módon számolható

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2. \tag{7}$$

Példánkban a hatásfok a hasznos és a bevezetett teljesítmény függvénye ($\eta = f\left(P_h, P_{be}\right)$). Hogy meghatározzuk a hatásfok szórását, a képlet alapján vennünk kell a hatásfok parciális deriváltját minden egyes változója szerint kiértékelve a mérési pontban, továbbá szükségünk van a bevezetett és a hasznos teljesítmény szórására:

$$\sigma_\eta^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial P_h}\right)^2 \sigma_{P_h}^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial P_{be}}\right)^2 \sigma_{P_{be}}^2. \tag{8}$$

Ezek a szórás értékek további mennyiségektől függnek (P_h függ Q-tól és Δp-től, P_{be} függ M-től és n-től), ezért szükséges az egyes szórásokat addig levezetni, amíg a közvetlenül mérhető mennyiségek szórása abszolút hibából vagy gépkönyvi adatból meg nem határozható (az alábbi levezetésben ezek alá vannak húzva).

Mérőperem esetében az α átfolyási tényező sok paramétertől függ (ld. örvényszivattyú mérések leírása), ezek együttesen befolyásolják a térfogatáram mérés hibáját. A mérőperemmel történő térfogatárammérés leírását a MSZ ISO 5167-1 szabvány rögzíti, mely a térfogatárammérés (q_{mp}) hibakorlátjára is becslést ad:

$$\frac{\delta q_{mp}}{q_{mp}} = \left[\left(\frac{\delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\delta \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{2\beta^4}{1-\beta^4}\right)^2 \left(\frac{\delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{2}{1-\beta^4}\right)^2 \left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta \Delta p}{\Delta p}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta \rho_1}{\rho_1}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Az itt levő tényezők hibájára a mérés során nem tudunk becslést adni, de a szabvány alapján a geometriai befolyásoló tényezők hatására $e_{mp} = 1,5\%$ relatív hiba vehető figyelembe, így a térfogatárammérés geometriából adódó relatív szórása:

$$\sigma_{\delta_{mp}} = \frac{e_{mp} \cdot Q}{2}. \tag{10}$$

Ezt figyelembe véve a térfogatáram szórását az alábbi összefüggéssel számoljuk:

$$\sigma_Q^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Delta p_{mp}}\right)^2 \sigma_{\Delta p_{mp}}^2 + \sigma_{\delta_{mp}}^2. \tag{11}$$

A mintapélda hibaszámításához szükséges képletek a következők:

$$\sigma_\eta^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial P_h}\right)^2 \sigma_{P_h}^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial P_{be}}\right)^2 \sigma_{P_{be}}^2, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial P_h} = \frac{1}{P_{be}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial P_{be}} = -\frac{P_h}{P_{be}^2}$$

$$\hookrightarrow \sigma_{P_h}^2 = \left(\frac{\partial P_h}{\partial \Delta p}\right)^2 \sigma_{\Delta p}^2 + \left(\frac{\partial P_h}{\partial Q}\right)^2 \sigma_Q^2, \qquad \frac{\partial P_h}{\partial Q} = \Delta p, \quad \frac{\partial P_h}{\partial \Delta p} = Q$$

$$\hookrightarrow \sigma_{\Delta p}^2 = \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta h}\right)^2 \sigma_{\Delta h}^2, \qquad \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta h} = \ldots, \quad \underline{\sigma_{\Delta h}^2 = \left(\frac{E_{\Delta h}}{2}\right)^2}$$

$$\hookrightarrow \sigma_Q^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Delta p_{mp}}\right)^2 \sigma_{\Delta p_{mp}}^2 + \sigma_{\delta_{mp}}^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \Delta p_{mp}} = \frac{\alpha A}{\rho_v \sqrt{2\Delta p_{mp}/\rho_v}}$$

$$\hookrightarrow \sigma_{\Delta p_{mp}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta p_{mp}}{\partial \Delta H}\right)^2 \sigma_{\Delta H}^2, \qquad \frac{\partial \Delta p_{mp}}{\partial \Delta H} = \ldots, \quad \underline{\sigma_{\Delta H}^2 = \left(\frac{E_{\Delta H}}{2}\right)^2}$$

$$\hookrightarrow \sigma_{P_{be}}^2 = \left(\frac{\partial P_{be}}{\partial M}\right)^2 \sigma_M^2 + \left(\frac{\partial P_{be}}{\partial n}\right)^2 \sigma_n^2 \qquad \frac{\partial P_{be}}{\partial M} = \ldots, \quad \frac{\partial P_{be}}{\partial n} = \ldots, \quad \underline{\sigma_n^2 = \left(\frac{E_n}{2}\right)^2}$$

$$\hookrightarrow \sigma_M^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2, \qquad \frac{\partial M}{\partial m} = \ldots, \quad \underline{\sigma_m^2 = \left(\frac{E_m}{2}\right)^2}$$

Ismert mennyiségek és paraméterek a 1. táblázatban találhatóak.

Megnevezés	Érték
Mérőperem belső átmérője	$d = 70mm$
Cső belső átmérője	$D = 100mm$
Mérőperem átfolyási tényezője	$\alpha = 0.62$
Ürejárási kiegyensúlyozási tömeg	$m_0 = 0.03kg$
Mérlegmotor karhossz	$l = 0.96m$
Víz sűrűsége	$\rho_v = 1000kg/m^3$

1. táblázat. Ismert mennyiségek.

Üzemi körülmények között azt tapasztaltuk, hogy a szivattyú csonkjaira és a mérőperem kamráira kapcsolt U csöves manométerekben a higanyszint ingadozik. Továbbá azt tapasztaltuk, hogy a mérlegmotor $\pm 10g$ tömeg ráhelyezésére/elvételére közömbösen viselkedett. Egy közbenső mérési pontban ezeket az abszolút hibákat leolvastuk. A fordulatszám mérést Jaquet indikátor segítségével végeztük, itt a leolvasási pontatlanság okozott hibát a mérés során. A mérőperem relatív hibáját gyártási, szerelési bizonytalanság okozza, ennek értékét szabvány rögzíti. Az egyes hibákat a 2. táblázatban gyűjtöttük össze.

Megnevezés	Érték
Δ_h abszolút hibája	$E_{\Delta_h} = 3mm$
Δ_H abszolút hibája	$E_{\Delta_H} = 5mm$
Fordulatszám (n) abszolút hibája	$E_n = 5rpm$
Kiegyensúlyozási tömeg (m) abszolút hibája	$E_m = 10g$
Mérőperem relatív hibája (szabvány)	$e_{mp} = 1,5\%$

2. táblázat. Mérés során megfigyelt abszolút hibák és mérőperem relatív hibája

A mért és számított mennyiségek a 3. táblázatban található kiemelve a legjobb hatásfokú pont adatait.

A hibaterjedés kiértékelését a legjobb üzemi pontra mutatjuk be. Először összegyűjtjük az ismert abszolút

	Mért						Számított						
No.	h_1	h_2	H_1	H_2	m	n	Δp	Δp_{mo}	M	Q	P_h	P_{be}	η
	$[mm]$	$[mm]$	$[mm]$	$[mm]$	$[kg]$	$[rpm]$	$[Pa]$	$[Pa]$	$[Nm]$	$[m^3/s]$	$[W]$	$[W]$	[-]
⋮													
7	820	180	412	588	1.08	1790	79107	21755	9.89	0.01574	1245.1	1853.6	0.672
⋮													

3. táblázat. Mért és számított mennyiségek táblázata

hibákat, ezután szórásnégyzetet és relatív hibát számolunk.

$$\sigma^2_{\Delta_h} = \sigma^2_{\Delta_h} = \left(\frac{E_{\Delta_h}}{2}\right)^2 = (1.5mm)^2, \qquad \rightarrow e_{\Delta_h} = 0,47\% \tag{12}$$

$$\sigma^2_{\Delta_H} = \sigma^2_{\Delta_H} = \left(\frac{E_{\Delta_H}}{2}\right)^2 = (2.5mm)^2, \qquad \rightarrow e_{\Delta_H} = 2,84\% \tag{13}$$

$$\sigma^2_m = \left(\frac{E_m}{2}\right)^2 = (5g)^2, \qquad \rightarrow e_m = 0,93\% \tag{14}$$

$$\sigma^2_n = \left(\frac{E_n}{2}\right)^2 = (2.5rpm)^2, \qquad \rightarrow e_n = 0,28\% \tag{15}$$

$$\sigma^2_{\delta_{mp}} = \left(\frac{E_{mp}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta_{mp}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e_{mp}Q}{2}\right)^2 \qquad (e_{mp} = 1,5\%) \tag{16}$$

Ezután az ismeretlen szórásokat az ismertek segítségével kifejezzük.

$$\sigma^2_{\Delta p} = ((\rho_{Hg} - \rho_v)g)^2\, \sigma^2_{\Delta_h} = (185Pa)^2, \qquad \rightarrow e_{\Delta p} = 0.47\% \tag{17}$$

$$\sigma^2_{\Delta p_{mp}} = ((\rho_{Hg} - \rho_v)g)^2\, \sigma^2_{\Delta_H} = (309Pa)^2, \qquad \rightarrow e_{\Delta p_{mp}} = 2,8\% \tag{18}$$

$$\sigma^2_Q = \left(\frac{\alpha A}{\rho_v\sqrt{2\Delta p_{mp}/\rho_v}}\right)^2 \sigma^2_{\Delta p_{mp}} + (1)^2\sigma^2_{\delta_{mp}} = (1.626 \cdot 10^{-4} m^3/s)^2, \qquad \rightarrow e_Q = 2.07\% \tag{19}$$

$$\sigma^2_{P_h} = \Delta p^2 \sigma^2_Q + Q^2 \sigma^2_{\Delta p} = (13,2W)^2, \qquad \rightarrow e_{P_h} = 2.1\% \tag{20}$$

$$\sigma^2_M = (gl)^2 \sigma^2_m = (0.047Nm)^2, \qquad \rightarrow e_M = 0.95\% \tag{21}$$

$$\sigma^2_{P_{be}} = (2\pi n)^2 \sigma^2_M + (M 2\pi)^2 \sigma^2_n = (13.5W)^2, \qquad \rightarrow e_{P_{be}} = 1.46\% \tag{22}$$

$$\sigma^2_\eta = \left(\frac{1}{P_{be}}\right)^2 \sigma^2_{P_h} + \left(\frac{P_h}{P^2_{be}}\right)^2 \sigma^2_{P_{be}} = (8,63 \cdot 10^{-3})^2, \qquad \rightarrow e_\eta = 2,57\% \tag{23}$$

A számítás során azt kaptuk, hogy a hatásfok az adott mérési pontban $\eta \pm E_\eta = 67.2 \pm 1,73\%$. A kiértékelésből megfigyelhető, hogy a mérési hibák halmozódása miatt a relatív hibakorlátok számértéke is nagyobb lesz. Például míg a szivattyú nyomásnövekedésének relatív hibája $e_{\Delta p} = 0,47\%$, addig a hasznos teljesítményé már $e_{P_h} = 2,1\%$, a hatásfoké pedig $e_\eta = 2,57\%$. Viszont azt is érdemes megfigyelni, hogy az egyes hibák más súllyal játszanak szerepet a származtatott mennyiség hibájában. A térfogatáram szórásának számításakor a nyomásmérés hibája kisebb súllyal játszik szerepet mint a gyártási pontatlanságból származó hibakorlát.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \Delta p_{mp}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha A}{\rho_v\sqrt{2\Delta p_{mp}/\rho_v}}\right)^2 = 1,308 \cdot 10^{-13}, \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial \delta_{mp}}\right)^2 = 1. \tag{24}$$

A kiértékelést a fenti módon minden mérési pontban el kell végezni (táblázatosan). Emellett a legjobb hatásfokú pontban a számításokat részletesen összefüggésekkel együtt a dokumentációban fel kell tüntetni és a számolt mennyiségeket, azok szórását, abszolút és relatív hibakorlátját táblázatban össze kell foglalni. A jegyzőkönyv részét képező diagramokban hibasávokat ábrázolni kell.