

Die Kenntnisse

1. Physikalische (mechanische) Grundgrößen
2. Grundbegriffe des Maschinenbauingenieurs (Drehbewegung, Arbeit, Energie, Axiome von Newton)
3. Gleichmäßiger Betrieb von Maschinen, Definitionen der Arbeit und des Wirkungsgrades
4. Reibrad-, Riemenrad-, Zahnrad-Antrieb, Schneckengetriebe, Übersetzung, Schlupf
5. Belastungsbeiwert, Verluste und Wirkungsgrade von mechanischen und elektrischen Maschinen
6. Die Gesetze von Archimedes und der Kontinuität
7. Bernoulli Gleichung und ihre Anwendungen, Venturi-Rohr
8. Grundlagen von thermischen Prozessen, Heizwert, spezifischer Verbrauch
9. Kreisprozess von thermischen Kraftwerken, der Begriff der Enthalpie und ihre spezifischen Formen
10. Zeitlich veränderlicher Betrieb von Maschinen
11. Kulissenantrieb, Kurbelantrieb, Kolbenpumpe
12. Grundlagen des Betriebes von thermischen Kolbenmaschinen, Vergaser, Indikatordiagramm
13. Kennlinien, Betriebspunkt
14. Anwendung des Impulssatzes an strömende Flüssigkeiten

1. Physikalische (mechanische) Basisgrößen

die physikalische Größe	die Dimension	die Basiseinheit	
Entfernung	Länge	<i>m</i>	<i>Meter</i>
Masse	Masse	<i>kg</i>	<i>Kilogramm</i>
Zeitdauer	Zeit	<i>s</i>	<i>Sekunde</i>
Temperatur	Temperatur	<i>K</i>	<i>Kelvin</i>
elektr. Stromstärke	Stromstärke	<i>A</i>	<i>Ampere</i>
Stoffmenge	Mol	<i>mol</i>	<i>Mol</i>

Tabelle 1 Dimension, Maßeinheit

Menge ist gleich Messzahl mal Maßeinheit.

Die Basiseinheiten sind häufig ungünstig, da die Messzahlen zu groß oder zu klein sind, so werden Bruchteile oder Vielfache der Basiseinheiten auch gebraucht. Die sind

die Größe	das Präfix, der Vorsatz <i>Abkürzung</i>	die Größe	das Präfix, der Vorsatz <i>Abkürzung</i>
10	Deka <i>da</i>	10^{-1}	Dezi <i>d</i>
10^2	Hekto <i>h</i>	10^{-2}	Zenti <i>c</i>
10^3	Kilo <i>k</i>	10^{-3}	Milli <i>m</i>
10^6	Mega <i>M</i>	10^{-6}	Mikro <i>μ</i>
10^9	Giga <i>G</i>	10^{-9}	Nano <i>n</i>
10^{12}	Tera <i>T</i>	10^{-12}	Piko <i>p</i>

Tabelle 2 Präfixe/Vorsätze

Beispiele: Durchmesser $D = 90 \text{ mm} = 0,09 \text{ m}$
 Taillenweite $w = 90 \text{ cm} = 0,9 \text{ m}$
 Entfernung $L = 90 \text{ km} = 90.000 \text{ m}$

Es gibt auch gebräuchliche Nicht-SI-Einheiten wie z.B. $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$;

$$1 \text{ Liter} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Man unterscheidet skalare Größen Vektorgrößen
extensive/intensive Größen

Beispiele: skalare Größen haben nur Betrag (Zahlenwert): Temperatur im Raum ist 22°C
Vektorgrößen haben Betrag und Richtung, sie werden mit fetten Buchstaben bezeichnet: durchschnittliche Geschwindigkeit des Donaustroms bei Budapest ist $\mathbf{v} = 3 \text{ km/h}$ in Nord-Süd Richtung.

Im Allgemeinen erzeugt die räumliche Änderung der intensiven Größen den Strom der extensiven Größen (z.B. räumliche Temperaturänderungen erzeugen Wärmestrom).

Physikalische Größen hängen oft miteinander durch die in mathematischer Form dargestellten, physikalischen Gesetze zusammen. Zum Beispiel die Schwingzeit T eines mathematischen Pendels

mit Fadenlänge l auf der Erdoberfläche ist $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Das **Fourier-Kriterium** sagt aus, dass die

notwendige jedoch nicht ausreichende Bedingung der Richtigkeit einer Formel ist, dass die Formel dimensional homogen sein muss. In dem eben angegebenen Beispiel ist tatsächlich auch auf der

rechten Seite $\sqrt{\frac{m}{\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{s^2} = s$, der Faktor 2π ist dimensionslos.

2. Grundbegriffe des Maschinenbauingenieurs (Drehbewegung, Arbeit, Energie, Axiome von Newton)

Die Lage (Position) eines Körpers, bezogen auf ein gegebenes Bezugssystem kann sich zeitlich ändern.

Das Bezugssystem kann festgelegt sein oder kann sich selbst bewegen. Ein Boot fährt auf der Donau. Er kann von der Petöfi-Brücke (festes Bezugssystem) oder vom Verkehrsschiff D11 beobachtet werden (bewegliches Bezugssystem).

Geschwindigkeit

Bei einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung ist der hinterlegte Weg (s) proportional zur Zeit (t)

$$s \sim t \Rightarrow s = v \cdot t.$$

Die gleichmäßige Geschwindigkeit v ist definiert durch $v = \frac{s}{t}$.

Die Dimension der Geschwindigkeit ist $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$, die Maßeinheit der Geschwindigkeit ist $\frac{m}{s}$.

Bei veränderlicher Bewegung hängt die Geschwindigkeit von der Zeit ab, $v = v(t)$, d.h., die obige Definition gilt nur für verschwindend kleine Zeitintervalle, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, im Grenzübergang strebt dieser

Bruch zur Ableitung des Weges nach der Zeit, $v = \frac{ds}{dt}$.

Ist v nicht konstant, so kann die Geschwindigkeit zunehmen (Beschleunigung) oder abnehmen (Verzögerung). Beide heißen im Allgemeinen **Beschleunigung** (positiv oder negativ) und beide werden mit a bezeichnet. Bei konstanter Beschleunigung ist $a = \frac{v}{t}$, bei veränderlicher

Beschleunigung gilt $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, bzw. in differentieller Form $a = \frac{dv}{dt}$ und ihre Dimension ist

$\frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$, ihre Maßeinheit ist $\frac{m}{s^2}$.

Der während der Zeit hinterlegte Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung können im Koordinatensystem mit der Abszisse Zeit und Ordinate der aktuellen Größe graphisch dargestellt werden. Wird die Zeit vom Beginn der Bewegung an gemessen, so stimmt der Ursprung des Koordinatensystems mit diesem Startpunkt überein.

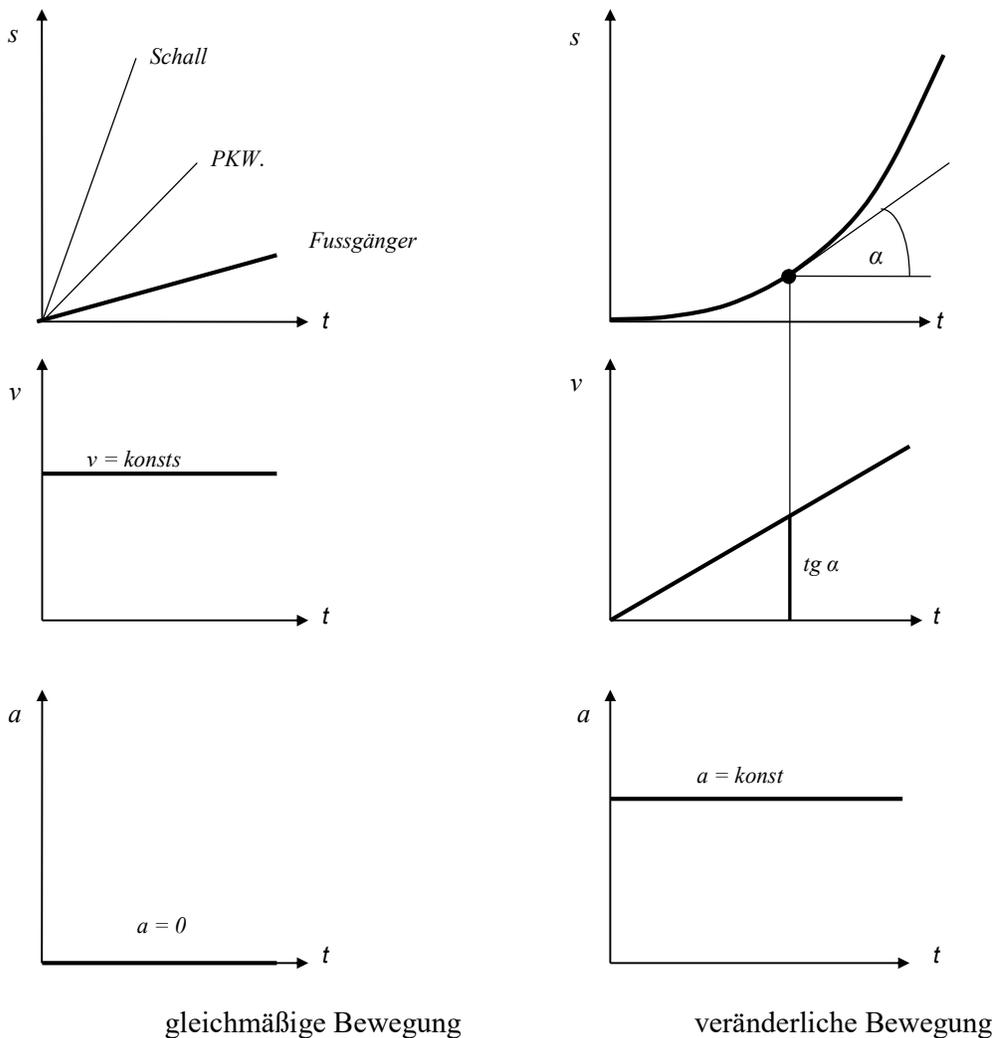


Bild 1 Bewegungsdiagramme

Kraft: Der Bewegungszustand eines Körpers kann durch eine äußere Kraft verändert werden. Die Beschleunigung des Körpers hängt von der Kraft ab. Sie wird mit F bezeichnet. Ihre Grundeinheit wurde nach dem Physiker Newton, N genannt. Das Verhältnis der Kraft und der Beschleunigung ist ein Maß der Trägheit des Körpers, sie heißt die Masse, wird mit m bezeichnet, sie ist eine Basismaßeinheit, die kg heißt.

Die Axiome von Newton.

Erstes Newtonsches Axiom: Jeder Körper mit konstanter Masse m verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, falls er nicht durch äußere Kräfte \mathbf{F} gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern: $\mathbf{v} = konst$ für $m = konst$ und $\mathbf{F} = 0$. (Geschwindigkeit und Kraft sind Vektorgrößen) Der Impuls ist als $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ definiert, seine Maßeinheit ist $\frac{kg \cdot m}{s}$. Eine alternative Form des ersten Axioms ist $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = konst$ für $\mathbf{F} = 0$.

Zweites Newtonsches Axiom: Die Beschleunigung ist der wirkenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung der Kraft. Das Verhältnis zwischen wirkender Kraft und erzielter Beschleunigung ist für

jeden Körper eine konstante Größe, seine Masse, $m = \frac{|\mathbf{F}|}{|\mathbf{a}|}$. So gilt $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, bzw.

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$. Mit Wörtern: Die zeitliche Änderung des Impulses ist der bewegendende Kraft proportional und erfolgt in Richtung der Kraft.

Drittes Newtonsches Axiom: Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft \mathbf{F}_{12} aus, so reagiert der Körper 2 auf den Körper 1 mit einer Gegenkraft \mathbf{F}_{21} und die sind einander entgegengesetzt gleich (*actio = reactio*): $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Das erste und das zweite Newtonsche Axiom kann für Drehbewegungen eines Massenpunktes folgendermaßen formuliert werden. Der Drehimpuls ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, hier ist der Radiusvektor auf einen ortsfesten Punkt bezogen. Bewegt sich der Massenpunkt entlang einer Kreisbahn, so ist $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Die Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{r} sind senkrecht aufeinander, so ist der Betrag der Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$ und der Betrag des Drehimpulses ist $L = mr^2 \cdot \omega = \Theta \cdot \omega$. Der Drehimpuls bleibt erhalten, wenn keine äußeren Drehmomente auf den Massenpunkt wirken: wenn $\mathbf{M} = 0$ ist, dann ist $\mathbf{L} = \text{const}$. Es gilt auch, dass die zeitliche Änderungsrate des Drehimpulses proportional zum wirkenden Drehmoment ist. Das Verhältnis der beiden Größen ist eine konstante Größe, das Trägheitsmoment des Körpers. $\Theta = \frac{|\mathbf{M}|}{|\boldsymbol{\varepsilon}|}$, wo $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ die Winkelbeschleunigung

bezeichnet. Es gilt also $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = \Theta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$

Arbeit

Mechanische Arbeit wird mit W bezeichnet, sie ist eine skalare Größe, wird als $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos \gamma$ berechnet. Hier bezeichnet γ den Winkel zwischen den Richtungen der Kraft und des Weges. Ihre Dimension ist *Kraft·Weg*, ihre Maßeinheit ist $J = Nm$ nach dem Physiker Joule genannt.

Die Schreibweise mN ist **falsch**, es würde Milli-Newton bedeuten.

Ändert sich die Kraft während der Bewegung in y -Richtung, so wird die Arbeit als die Summe der elementaren Arbeiten berechnet: $W = \sum_i F_i \Delta y_i$. Die Arbeit ist also proportional zur Fläche unter der

Kraft-Kurve im Kraft-Weg Diagramm.

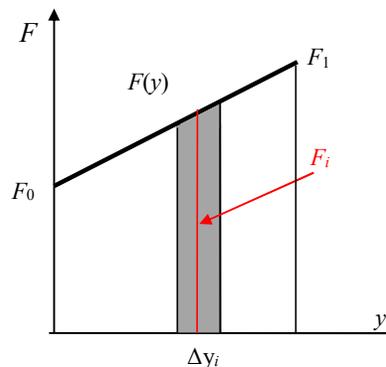


Bild 2 Kraft-Weg Diagramm, elementare Arbeitsfläche

Ein anschauliches Beispiel für das Kraft-Weg Diagramm bietet die Federkraft als Funktion der Federkompression/Dehnung dar (siehe Bild 3). Die Länge der Feder in unbelastetem Zustand sei L_0 ! Wenn die Federsteifigkeit mit s (N/m) bezeichnet wird, kann die aktuelle Länge L einer gedehnten

Feder als $L = L_0 + \frac{F}{s}$ berechnet werden. Bezeichne die Dehnung der Feder y , d.h. $y = L - L_0 = \frac{F}{s}$, so gilt $F = s \cdot y = s(L - L_0)$. Im Diagramm sieht es so aus:

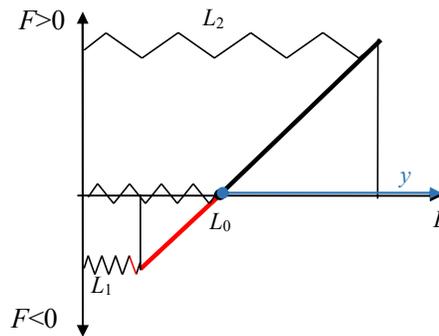


Bild 3 Chartakteristik einer **verkürzten (zusammengedrückten)/gedehnten (gespannten)** Feder, die Neigung der Kennlinie ist die Feder-Steifigkeit. Das Vorzeichen der Kraft ändert sich.

Der Kehrwert der Federsteifigkeit heißt Federkonstante und wird mit $c = \frac{1}{s}$ (m/N) bezeichnet.

Es können zwei (oder mehrere) Feder mit Federsteifigkeiten s_1 , bzw. s_2 parallel oder in Reihen geschaltet werden. Bei parallel geschalteten Federn ist die Längenänderung gleich, bei Reihenschaltung ist die Kraft gleich. Daraus lässt sich die resultierende Federsteifigkeit bestimmen.

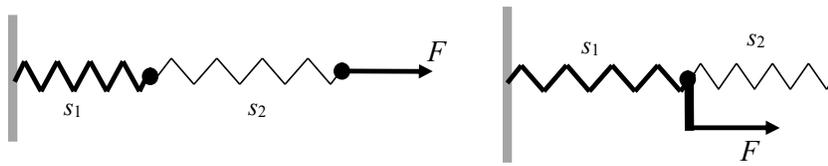


Bild 4 In Reihen und parallel geschaltete Feder

Für parallel geschaltete Feder ist die resultierende Federsteifigkeit $s_{res} = s_1 + s_2$.

Für reihengeschaltete Feder gilt $\frac{1}{s_{res}} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$, d.h. die resultierende Federsteifigkeit ist

$$s_{res} = \frac{1}{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}}$$

Mit den Federkonstanten (c_1 und c_2) lassen sich die resultierenden Federkonstanten für in Reihen geschaltete Feder als $c_{res} = c_1 + c_2$ und für parallel geschaltete Feder als $c_{res} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$ schreiben

in analoger Form zu den Ohm'schen Widerständen.

Energie

Man kennt verschiedene Energieformen, mechanische darunter kinetische oder Bewegungs-Energie und potentielle Energie, elastische, thermische, chemische, Kern-Energie, usw. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns hauptsächlich mit mechanischer und thermischer Energie beschäftigen.

Die kinetische Energie eines Körpers mit Masse m und Geschwindigkeit v ist $E_{kin} = m \frac{v^2}{2}$.

Die potentielle Energie eines Körpers mit Masse m in Höhe h vom Bezugsniveau gemessen ist im Schwerfeld der Erde auf der Erdoberfläche $E_{pot} = mgh$, $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ ist die Gravitationsbeschleunigung.

Graphisch ist die elastische Energie gleich der Arbeit, die zur Verlängerung oder zum Zusammendrücken der Feder verwendet werden muss (Fläche des Trapezes unter der Federcharakteristik im Bild 2). So ist die elastische Energie einer gedehnten oder zusammengedrückten Feder $E_{elastisch} = \frac{F_0 + F_1}{2} y = F_0 y + s \frac{y^2}{2}$. Hier bezeichnet F_0 die Vorspannkraft.

Leistung

Die zeitliche Rate der Arbeit heißt Leistung. So gilt $P = \frac{W}{t}$, die Maßeinheit ist $W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s}$ genannt nach Watt. $1W$ ist eine sehr geringe Leistung, man verwendet deswegen häufig das Tausendfache, kW .

Rotationsbewegungen, Kreisbewegung

Im Maschinenbau ist die Rotationsbewegung eine typische Bewegungen von Maschinenteilen (man denke an Fahrzeuge, Windturbinen, Werkzeugmaschinen, usw.).

Ein rotierender Maschinenteil hat meistens eine Welle und der Maschinenteil dreht sich um die Achse dieser Welle. Die Verdrehung wird in Winkelmaß gemessen und mit φ bezeichnet. Der Maßeinheit des Winkels ist Radian (rad) oder eventuell Grad ($^\circ$).

Um den Bewegungszustand eines rotierenden Körpers beschreiben zu können wird ein beliebiger Punkt am Körper betrachtet, der von der Achse (lokaler Koordinatenursprung) in der Entfernung r liegt. Er heißt Radius und ist ein Vektor.

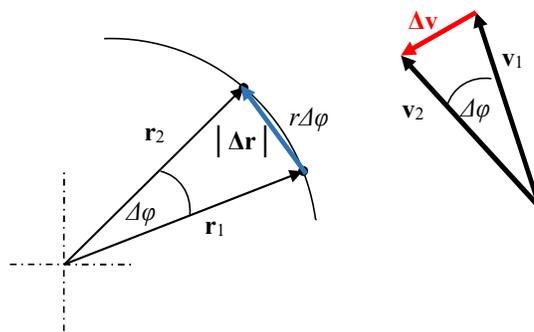


Bild 5 Rotationsbewegung
 Umfangsgeschwindigkeit Zentripetalbeschleunigung
 zeitliche Änderung des
 Radiusvektors Geschwindigkeitsvektors

Die Geschwindigkeit des ausgewählten Punktes ist v , sie wird, als zeitliche Änderungsrate definiert:

$v = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$. Es gilt weiter, dass die Sehnenlänge und die Bogenlänge bei kleinen „Sehwinkeln“

$\Delta\varphi$ zu einander nahe liegen: $|\Delta r| \approx |r| \Delta\varphi$, wie es vom Bild zu sehen ist. So gilt

$|\mathbf{v}| = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \approx \frac{|\mathbf{r}| \Delta \varphi}{\Delta t} = |\mathbf{r}| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = |\mathbf{r}| \omega$. Hier ist eine neue Größe, die **Winkelgeschwindigkeit** ω eingeführt worden. Ihre Maßeinheit ist *rad/s*.

Die Winkelgeschwindigkeit und die **Drehzahl** n (*U/min*) sind zu einander proportional $\omega = \frac{2\pi}{60} n$.

Die Beschleunigung ist auch bei konstanter Winkelgeschwindigkeit nicht Null, weil dann die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit sich ändert. Aus dem obigen Bild ist klar, dass $|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|$, die Richtung ändert sich jedoch um $\Delta \varphi$. So ist $|\Delta \mathbf{v}| \approx |\mathbf{v}| \Delta \varphi = |\mathbf{v}| \omega \Delta t$, woraus

$a_{zp} = |\mathbf{a}_{zp}| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = |\mathbf{v}| \omega = r \omega^2 \equiv \frac{v^2}{r}$. Sie heißt **Zentripetalbeschleunigung** und sie zeigt, wie man es im Bild sieht, zum Drehzentrum (zur Drehachse) hin.

Nach dem zweiten Axiom von Newton ist die Bedingung der gleichmäßigen Rotationsgeschwindigkeit des betrachteten Punktes am Körper, dass eine Zentripetalkraft wirkt, $\mathbf{F}_{zp} = m \cdot \mathbf{a}_{zp}$. Diese Kraft wird durch die Festigkeit des Rotationskörpers gewährleistet. Wir haben hier einen Index *zp* verwendet, da es auch eine Tangentialbeschleunigung \mathbf{a}_t existieren kann wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant bleibt. Ist das der Fall, so kann eine Winkelbeschleunigung ε definiert werden, $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \left(= \frac{d\omega}{dt} \right)$. So eine Tangential-Beschleunigung wird natürlich nach dem zweiten Newtonschen Axiom durch eine Tangentialkraft \mathbf{F}_t verursacht:

$$|\mathbf{F}_t| = m \cdot \|\mathbf{a}_t\| = m \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = m \frac{\Delta(r\omega)}{\Delta t} = mr \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = mr \varepsilon.$$

Da der ausgewählte Punkt ständig auf der Kreisbahn herumfährt, muss sich die Kraft \mathbf{F}_t ihre Richtung ständig ändern, sie muss immer senkrecht auf den Radius des Punktes sein. Das Produkt des Radius (Armlänge der Kraft) und der Kraft ist das Drehmoment M (*Nm*). $M = r \cdot |\mathbf{F}_t| = (mr^2) \cdot \varepsilon = \Theta \cdot \varepsilon$. Der Ausdruck $\Theta = mr^2$ ist ein Maß für die Trägheit des Rotationskörpers gegenüber Winkelbeschleunigung.

Da natürlich der Rotationskörper von unendlich vielen, auf verschiedenen Radien liegenden Punkten zusammengesetzt ist, ist das **Trägheitsmoment** des ganzen Körpers die Summe der Elementarträgheitsmomente: $\Theta = \sum_i m_i r_i^2 = \lambda m R^2$, m ist die volle Masse des Rotationskörpers, R ist sein Außenradius, und der Beiwert λ wird für verschiedenen Körperformen in Tabellen angegeben, für eine volle rotierende Scheibe oder für einen Walzen mit konstantem Durchmesser ist $\lambda = 0,5$.

Man erkennt Analogien zwischen geradlinigen und Rotations-Bewegungen. Man kann diese Analogie in einer Tabelle klar darstellen.

Wenn ein Rotationskörper, mit Trägheitsmoment Θ nicht um ihre geometrische Achse, sondern um eine Achse parallel zu jener in Rotation gebracht wird, kann das Trägheitsmoment Θ' auf diese neue Achse nach dem Satz von Steiner so berechnet werden: $\Theta' = \Theta + md^2$.

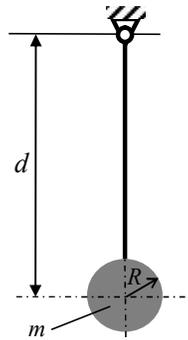


Bild 6 Verschiebung der Rotationsachse, Steiner-Satz

Hier bezeichnet d den Abstand zwischen den zwei parallelen Achsen und m die Masse des Rotationskörpers.

Da $\Theta = \lambda m R^2$ ist, erhält man $\Theta' = m(\lambda R^2 + d^2) = md^2 \left(\lambda \left(\frac{R}{d} \right)^2 + 1 \right) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} md^2$. Die so geschwungene, an einem sehr langen Faden hängende Masse verhält sich wie ein punktförmiger Körper.

Geradlinige Bewegung			Rotationsbewegung		
Weg	s	(m)	Verdrehung	φ	(rad)
Zeit	t	(s)	Zeit	t	(s)
Geschwindigkeit	v	(m/s)	Winkelgeschwindigkeit	ω	(rad/s)
Beschleunigung	a	(m/s ²)	Winkelbeschleunigung	ε	(rad/s ²)
			Zentripetalbeschleunigung	a_{zp}	(m/s ²)/
Masse	m	(kg)	Trägheitsmoment	Θ	(kgm ²)
Kraft	$F = m \cdot a$	(N)	Drehmoment	$M = \Theta \cdot \varepsilon$	(Nm)
Arbeit	$W = F \cdot s$	(J)	Arbeit	$W = M \cdot \varphi$	(J)
Leistung	$P = W/t = F v$	(W)	Leistung	$P = W/t = M \omega$	(W)

Tabelle 3 Analogie zwischen geradlinigen und Rotationsbewegung

3. Gleichmäßiger Betrieb von Maschinen, Definitionen der Arbeit und des Wirkungsgrades

Eine Maschine dient zur Änderung der Form oder zum Transport von Stoff, Information oder Energie. In der nächsten Tabelle sind einige Beispiele für Maschinen gegeben

	Stoff	Information	Energie
Formänderung	Drehbank	Rechner	Windturbine
Transport	Fließband	Netz	Pumpenstation

Tabelle 4 Beispiele für Maschinen

Es gibt auch andere Gesichtspunkte für die Gruppierung von Maschinen, z.B. das Verwendungsgebiet (Industrie, Verkehr, Landwirtschaft, IT) oder Betriebsprinzip (mechanisch, thermisch, hydraulisch, elektrisch).

Aus dem energetischen Gesichtspunkt wird eine komplette Maschine oft in Einzelkomponente zerlegt, Kraft-Maschine \Rightarrow Getriebe \Rightarrow Arbeits-Maschine.

Eine typische Kraftmaschine ist ein Elektromotor, der durch einen Zahnradantrieb (Getriebe) eine Dosierpumpe (Arbeitsmaschine) antreibt. Das Zahnradgetriebe dient dabei zur Verminderung der hohen Drehzahl des E-Motors. Die Wellen der einzelnen Komponenten sind miteinander gekoppelt.

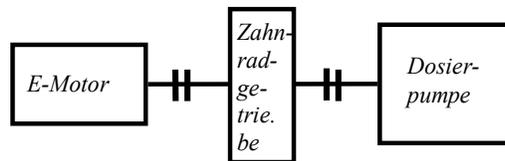


Bild 7 Komplettes Maschinenaggregat

Den **gleichmäßigen Betrieb** von Maschinen werden wir zunächst am Beispiel des geradlinigen, gleichmäßigen Schleppens von einem einfachen kleinen Wagen diskutieren. Dabei werden Leistungen, Verluste, Wirkungsgrade, der optimale Betriebspunkt erläutert.

Man braucht dazu den Reibbeiwert (μ), bzw. den Rollwiderstands-Beiwert (μ_r) zu wiederholen. Der Coulombsche Satz sagt aus, dass beim Gleiten eines Körpers an einer Bahn eine Reibkraft (F_r) entsteht, die die Bewegung des Körpers erschwert und proportional zur senkrechten Presskraft (F_p) zwischen Bahn und Körper ist: $F_r = \mu F_p$.

Für das Rollen kann ähnlicher Weise $F_{roll} = \mu_r F_p$ geschrieben werden. Hier darf jedoch nicht vergessen werden, dass μ_r nicht nur vom Materialpaar Rollbahn und Rad abhängig ist, sondern auch vom Radius des Rades, R . Die Materialeigenschaften werden mit der, auf die Drehachse des Rades bezogene Armlänge f der Stützkraft F_p berücksichtigt.

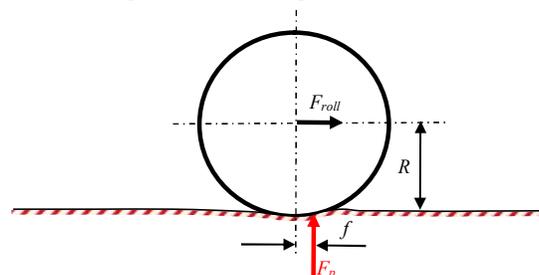


Bild 8.a Wirkende Kräfte beim Rollen

Es ist z.B. $f_{Stahl-Stahl} = 0,08cm$. Das Drehmoment des Rollwiderstandes F_{roll} ist $M = R F_{roll}$. Das Drehmoment der Stützkraft, womit die Bahn auf das Rad wirkt ist $M = f \cdot F_p$. Das Rad dreht

sich mit konstanter Geschwindigkeit nur dann, wenn diese zwei Drehmomente entgegengesetzt gleich sind. Es ist also $f \cdot F_p = R F_{roll}$. Von hier folgt $F_{roll} = \frac{f}{R} \cdot F_p$. Das Verhältnis $\mu_r = \frac{f}{R}$ heißt Rollwiderstandsbeiwert. Für das Stahl Rad eines Eisenbahnwaggons mit $R = 40\text{cm}$ Radius haben wir $\mu_r = \frac{f}{R} = \frac{0,08\text{cm}}{40\text{cm}} = 0,002$. Für das gleiche Stoffpaar, jedoch mit nur $R = 4\text{cm}$ Radius bekommt man den zehnfachen Wert für μ_r .

Die geneigte Bahn (Bild 8.a) schließe einen Winkel α mit der horizontalen Richtung ein, der kleine Wagen sei durch eine Ziehstange mit einer zunächst noch unbekanntes Kraft F gezogen die mit der Bahn einen Winkel β umschließe. Die Maße des Wagens ist m , so ist das Gewicht $G = mg$. Es wirke der Rollwiderstand F_{roll} !

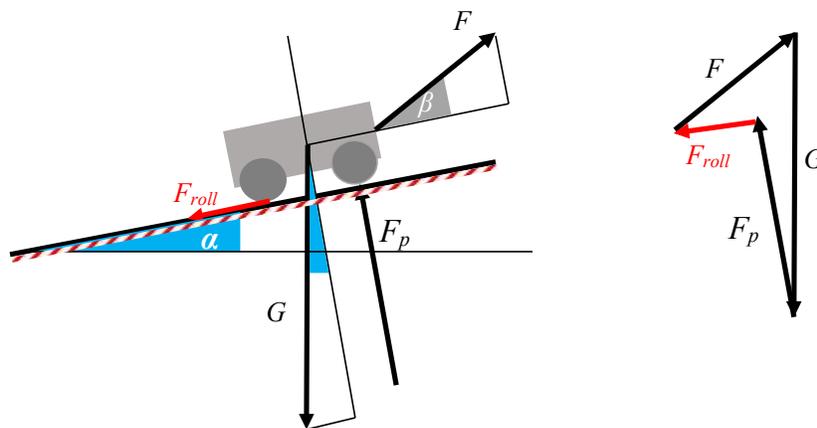


Bild 8.b An einer Rampe gezogener Wagen mit den wirkenden Kräften

Nach dem ersten Axiom von Newton ist die notwendige Bedingung der geradlinigen gleichmäßigen Bewegung des Wagens an der Rampe, dass die Summe aller wirkenden Kräfte Null sein soll. Die wirkenden Kräfte sind im Bild dargestellt:

- Gewicht G
- Stützkraft der Bahn F_p
- Roll-Widerstand F_{roll}
- Ziehkraft F

Da die Vektoren in verschiedenen Richtungen zeigen, soll die Summierung an den Komponenten durchgeführt werden. Die zwei, auf einander senkrechte natürliche Richtungen sind die tangentiale Richtung (parallel zur Rampe) und die Normalrichtung (senkrecht zur Rampe). So müssen die Kraftvektoren in diese Richtungen zerlegt werden. Es sind

in tangentialer Richtung: $G_t = G \sin \alpha$,

F_{roll} ,

$F_t = F \cos \beta$,

in Normalrichtung

$G_n = G \cos \alpha$,

F_p ,

$F_n = F \sin \beta$.

Die Kraftkomponente nach oben und nach rechts seien positiv, dann sollen gelten

$$F_t - F_{roll} - G_t = F \cos \beta - \mu_{roll} F_p - G \sin \alpha = 0,$$

$$F_n + F_p - G_n = F \sin \beta + F_p - G \cos \alpha = 0.$$

Die Bahnkraft kann aus der zweiten Gleichung ausgeklammert und in die erste eingesetzt werden $F_p = G \cos \alpha - F \sin \beta$ und damit ist

$$F \cos \beta - \mu_{roll} (G \cos \alpha - F \sin \beta) - G \sin \alpha = 0$$

Das Ergebnis für F ist also

$$F = G \frac{\sin \alpha + \mu_{roll} \cos \alpha}{\cos \beta + \mu_{roll} \sin \beta}.$$

Man sieht gleich, dass das Fourier Kriterium (siehe Kapitel 1) erfüllt ist, beide Seiten der Gleichung haben die Maßeinheit N .

Falls der Wagen mit **horizontal** gerichteter Ziehstange gezogen wird, ist $\beta = -\alpha$, so ist

$$F = G \frac{\sin \alpha + \mu_{roll} \cos \alpha}{\cos(-\alpha) + \mu_{roll} \sin(-\alpha)} = G \frac{\tan \alpha + \mu_{roll}}{1 - \mu_{roll} \tan \alpha} = G \frac{\tan \alpha + \tan \rho}{1 - \tan \alpha \tan \rho} = G \tan(\alpha + \rho), \quad \text{mit der}$$

Bezeichnung $\mu_{roll} = \tan \rho$.

Die **Gesamtarbeit** der Ziehkraft F entlang eines Fahrtweges s wird als $W_G = F_t s = F \cos \beta \cdot s$ berechnet.

Die Erhebung der Rampe und so auch die des Wagens entlang des Wegstücks s ist $H = s \cdot \sin \alpha$. Die **Nutzarbeit** ist also der Produkt $W_{Nutz} = G \cdot H = G \cdot s \cdot \sin \alpha = G_t \cdot s$.

Der **Wirkungsgrad** η wird, als das Verhältnis Nutzarbeit zu Gesamtarbeit definiert:

$$\eta = \frac{W_{Nutz}}{W_G} = \frac{G \sin \alpha \cdot s}{F \cos \beta \cdot s} = \frac{G \sin \alpha}{F \cos \beta} = \frac{\cos \beta + \mu_{roll} \sin \beta}{\sin \alpha + \mu_{roll} \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{1 + \mu_{roll} \tan \beta}{1 + \mu_{roll} \cot \alpha}.$$

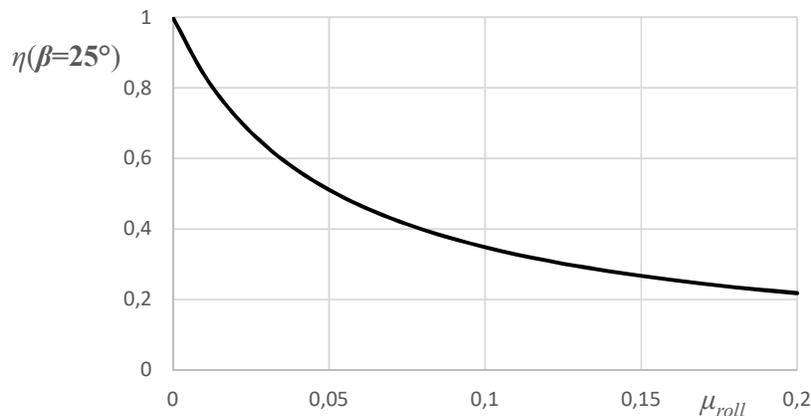


Bild 9 Bei erhöhtem Rollbeiwert nimmt der Wirkungsgrad des Ziehens stark ab. Neigung der Rampe im Beispiel ist $\alpha = 5\%$

Vom Bild 9 ist klar, dass es sich lohnt, den Wagen mit geringem Rollwiderstand (hoher Reifendruck, gut geschmierte Wellenlager) zu ziehen.

Der **Verlust**, das heißt die Arbeit, die verloren geht ist

$$W' = F_{roll} \cdot s = (F_t - G_t) \cdot s = W_G - W_{Nutz}.$$

Der Zähler des Ausdrucks von F ist bei einem gegebenen Neigungswinkel und Rollbeiwert konstant. Variiert werden kann dagegen der Winkel β . Es stellt sich die Frage, ob es einen optimalen Winkel gibt. Die Antwort ist ja, es gibt einen β_{opt} Wert. F wird am kleinsten, wenn der Nenner des Ausdrucks

für F sein Maximum erreicht. Das Maximum ist dort, wo die Ableitung des Nenners nach β Null ist.

$$\text{Es soll sein } \frac{d}{d\beta}(\cos \beta + \mu_{roll} \sin \beta) = -\sin \beta + \mu_{roll} \cos \beta = 0.$$

Daraus folgt $\mu_{roll} = \tan \beta_{opt}$, oder

$$\beta_{opt} = \arctan \mu_{roll}.$$

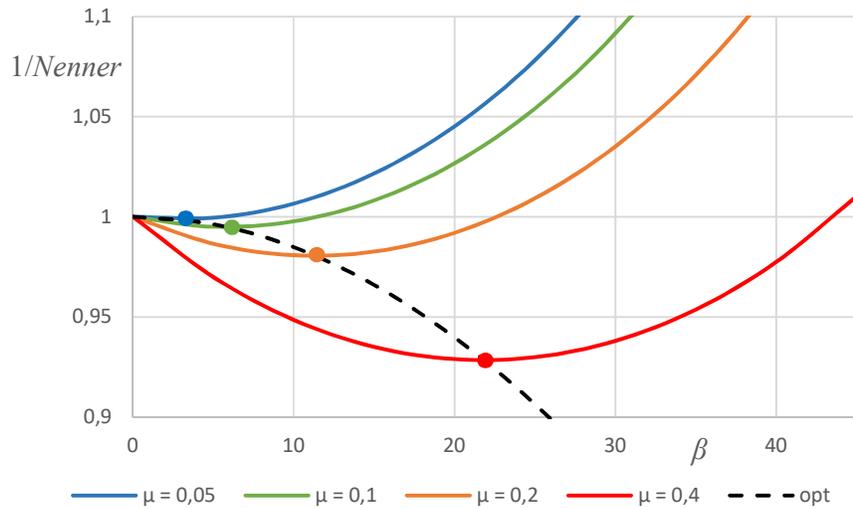


Bild 10 Abhängigkeit der Ziehkraft vom Winkel der Kraftrichtung.
Einfluss der Größe des Roll- bzw. Reibbeiwerts.
Die gestrichelte Linie stellt die optimalen Winkel dar

Vom Bild 10 ist klar, dass der Roll- bzw. Reibbeiwert auf die Werte des optimalen Zieh winkels (gestrichelte Linie) Einfluss haben.

Gut rollende Räder haben geringen Einfluss. Erst beim Gleiten von fester Last (wie z.B. ein Baumstamm) auf Erde oder Asphalt lohnt es sich, die optimale Ziehrichtung (Ziehstangenwinkel) zu finden.

Es soll betont werden, dass sich die wirkende Kraft entlang des Weges ändern kann, z.B. dadurch, dass sich der Neigungswinkel ändert oder die Qualität der Fahrbahn an verschiedenen Strecken verschieden ist. In solchen Fällen muss die Gesamtarbeit durch die Summierung der elementaren Arbeitsstücke berechnet werden. Die Trapezen Regel ist hierfür eine geeignete Methode, die auch in

Excel einfach angewendet werden kann. Die Regel heißt: $W_G \approx \sum_i \Delta W_i = \sum_i \frac{F_i + F_{i+1}}{2} \Delta s_i$.

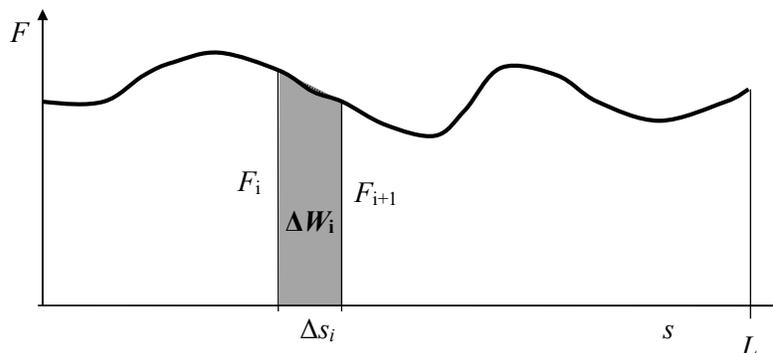


Bild 11 Arbeitsberechnung bei veränderlicher Kraft

Es wurde gezeigt, dass durch die Richtungsänderung der wirkenden Kraft ihre Größe verkleinert werden kann. Es kann auch günstig sein, die Krafrichtung deswegen zu ändern, damit die Ausführung der Arbeit bequemer wird. Eine Last zu heben kann direkt vertikal nach oben erfolgen, oder aber in horizontaler Richtung über die Vermittlung einer festen Rolle + Seil. Durch zusätzliche lose Rollen kann die Kraft sogar verkleinert werden.

Feste Rolle

Eine feste Rolle ist an der Decke befestigt. Sie dreht sich um ihre Welle, die im Lager leicht drehbar ist. Vernachlässigt man zunächst die Lagerreibung, dann ist die Ziehkraft gleich mit der Last. Diese Kraft ist gleichzeitig auch die Seilkraft.

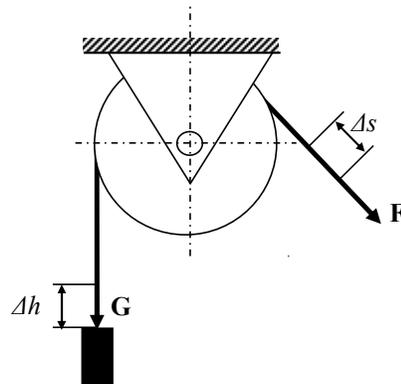


Bild 12 Gewicht G wird durch Seil und feste Rolle mit Kraft $F = G$ gehoben

Da die Armlängen der Kräfte G und F gleich sind (Rollenradien) so sind auch die Momente gleich, die Rolle dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (2-tes Axiom von Newton für Drehbewegungen). Das Seil dehnt sich nicht aus, so sind die Fortbewegungen gleich $\Delta h = \Delta s$. Man sieht, dass Arbeit nicht erspart werden kann. $|G| \cdot \Delta h = W = |F| \cdot \Delta s$. So sind natürlich auch die Leistungen gleich, der Wirkungsgrad scheint 100% zu sein.

Betrachtet man die Situation genauer, erkennt man, dass die Lagerreibung als Verlust mitberücksichtigt werden soll.

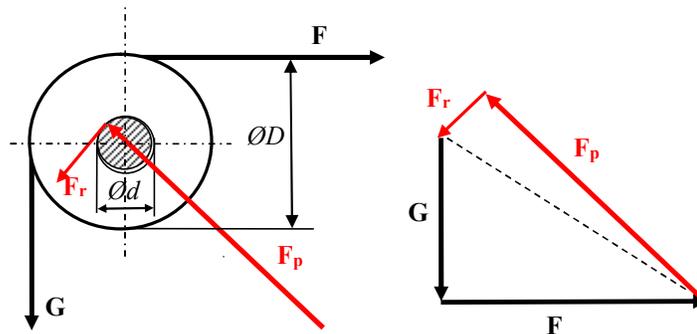


Bild 13 Feste Rolle mit Berücksichtigung der Lagerreibung
Kräftegleichgewicht an der Rolle

Bleibt die Drehzahl der Rolle auch weiterhin konstant, so muss die Summe aller, auf die Rolle wirkenden Momente Null sein. G und die Lagerreibungskraft drehen im Gegenuhrzeigersinn, F dreht im Uhrzeigersinn. Die Presskraft F_p geht praktisch durch die Drehachse. So gilt

$$G \cdot \frac{D}{2} + \mu F_p \cdot \frac{d}{2} = F \cdot \frac{D}{2}.$$

Multipliziert man mit $2/D$ durch, so folgt $G + \mu \frac{d}{D} \cdot F_p = F$. Ist zusätzlich, wie im Bild 13, F senkrecht auf G , so gilt im Bild 13 rechts für die mit gestrichelter Linie gezeichnete Hypotenuse nach der Pythagoras Regel $F_{Hyp} = \sqrt{F^2 + G^2}$. Mit der in Rot gezeichneter Presskraft F_p und Reibungskraft F_r lässt sich diese Hypotenuse auch berechnen: $F_{Hyp} = \sqrt{F_p^2 + F_r^2}$. Werden diese Ausdrücke gleichgesetzt, bekommt man $F^2 + G^2 = F_p^2 + (\mu F_p)^2 = (1 + \mu^2) F_p^2$. Aus der früheren Gleichung hat man $\mu \frac{d}{D} \cdot F_p = \delta \cdot F_p = F - G$. Hier wurde die Bezeichnung $\delta = \mu \frac{d}{D}$ eingeführt.. Die letzten zwei Gleichungen ergeben eine quadratische Gleichung für F :

$$\left(1 - \frac{\delta^2}{1 + \mu^2}\right) F^2 - 2GF + G^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{1 + \mu^2}\right) = 0. \text{ Die physikalisch sinnvolle Lösung ist}$$

$$F = G \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{1 + \mu^2}\right)^2}}{1 - \frac{\delta^2}{1 + \mu^2}}$$

Man sieht gleich, dass wenn $\delta = \mu \frac{d}{D}$ Null wird, ist tatsächlich $F = G$. Wenn nur μ , nicht aber auch

d/D klein wird, hat man die Näherungsformel $F = G \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \delta^2)^2}}{1 - \delta^2}$.

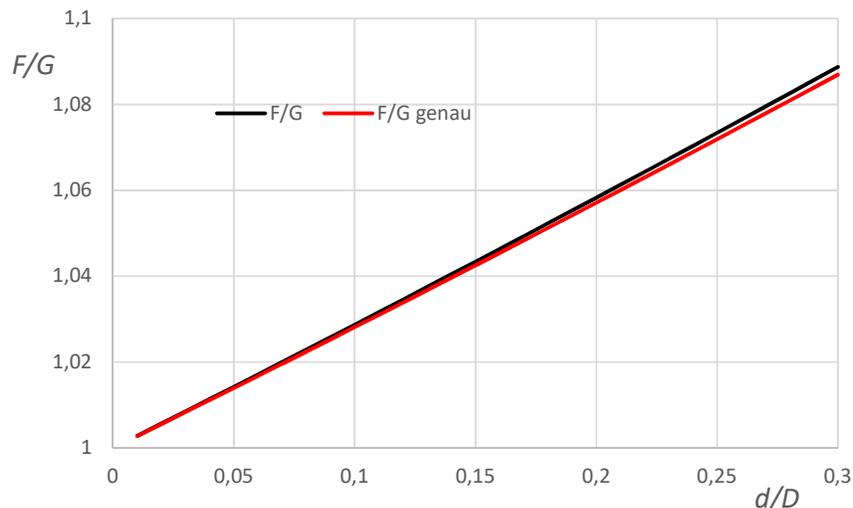


Bild 14 Verhältnis Ziehkraft zum Gewicht der Last beim Reibbeiwert 0,2 über dem Durchmesser Verhältnis: **Näherungsformel** – **genaue Formel**

Aus dem obigen Bild sieht man, dass z.B. beim Durchmesser Verhältnis $d/D = 0,15$ und $\mu = 0,2$ die Ziehkraft um etwa 4% grösser, als das Gewicht der gehobenen Last sein muss. Die Berücksichtigung der Reibkraft hat in diesem Beispiel geringen Einfluss.

Die notwendige Ziehkraft kann verkleinert werden, wenn auch eine oder mehrere lose Rollen eingebaut werden.

Die Last hängt auf der Welle der losen Rolle, die mit der, über die feste Rolle laufenden Seil bewegt wird. Damit die Last um Δh gehoben wird, müssen beide Seilstücke um Δh verkürzt werden, d.h. $\Delta s = 2 \cdot \Delta h$ Seilstück muss über die feste Rolle gezogen werden. Das Gewicht der Last ist G , um eine gleichmäßige Hebegeschwindigkeit zu erzielen, sollen in den beiden Seilstücken je $G/2$ Kräfte wirken. Die ist auch die notwendige Seilkraft F an dem losen Seilende, so ist $F = \frac{G}{2}$.

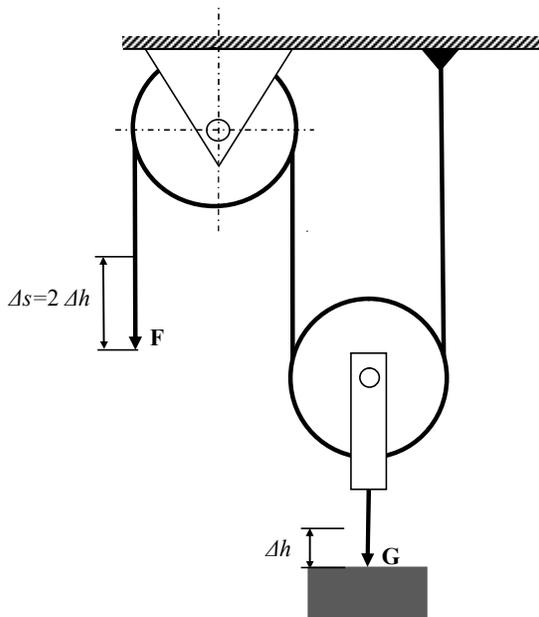


Bild 15 Feste und lose Rolle

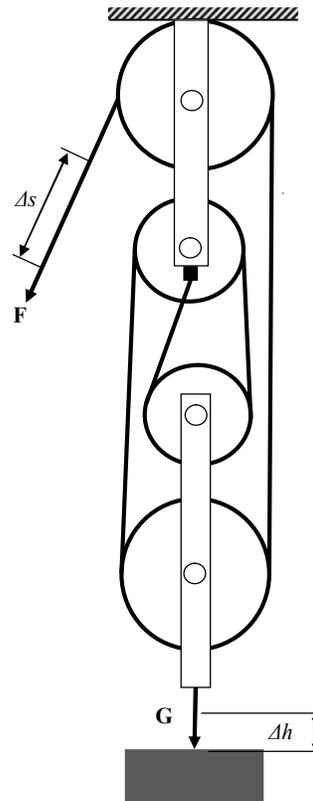


Bild 16 Flaschenzug mit je zwei losen und festen Rollen

Berechnet man die Gesamtarbeit des Hebens, bekommt man $W_G = F \cdot \Delta s = \frac{G}{2} \cdot 2\Delta h = G \cdot \Delta h$. Die Nutzarbeit ist selbstverständlich $W_{Nutz} = G \cdot \Delta h$. So wäre der Wirkungsgrad, ohne Berücksichtigung von Wellenreibung und anderen Verlusten 100%.

Mit einem Flaschenzug kann die notwendige Kraft weiter vermindert werden, die Fortbewegung des Seils wird dabei noch größer. Werden z.B. zwei lose und zwei feste Rollen eingebaut, so ist die Ziehkraft nur ein Viertel des Gewichts, es muss aber das Seil um eine Vierfache der Lasthebung weggezogen werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass alle die Last tragende Seilstücke vertikal sind.

4. Reibrad-, Riemenrad-, Zahnrad-Antrieb, Schneckengetriebe, Übersetzung, Schlupf

Die einfachste Methode der Drehmoment-Übertragung bei eventuell verschiedenen Drehzahlen ist durch einen **Reibradantrieb** verwirklicht. Es besteht aus zwei, einander am Umfang berührenden, an einander gepressten Rädern. Das eine heißt antreibendes, das zweite angetriebenes Rad. Die Drehrichtung der Räder ist gegenseitig. Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit der Räder muss gelten $r_1\omega_1 = u_1 = u_2 = r_2\omega_2$. Werden anstatt vom Radius und von Winkelgeschwindigkeit Durchmesser und Drehzahlen eingesetzt, so ist $\frac{d_1}{2} \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{d_2}{2} \frac{2\pi n_2}{60}$, bzw. $d_1 n_1 = d_2 n_2$. Das Drehzahlverhältnis des antreibenden und des angetriebenen Rades heißt Übersetzung, wird mit i bezeichnet, es ist $i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$. Es kann verzögernd, oder beschleunigend sein, abhängig von den Durchmessern der Reibräder.

Die Welle des antreibenden Rades wird mit Drehmoment M_1 angetrieben und am Umfang durch das gleichgroße Moment der Reibkraft $F_r = \mu F_p$ gebremst, so bleibt die Drehzahl konstant. Das andere Rad wird durch das Moment der gleichen Reibkraft angetrieben und durch das abzugebende Moment M_2 gebremst (die sind untereinander auch gleich).

Es gelten: $M_1 = F_r \frac{d_1}{2}$ und $F_r \frac{d_2}{2} = M_2$, so ist das Momentverhältnis $\frac{M_2}{M_1} = \frac{d_2}{d_1} = i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Nach Umformung erhält man $P_{Nutz} = M_2\omega_2 = M_1\omega_1 = P_G$. Wir haben hier von Verlusten abgesehen, so ist der Wirkungsgrad im idealen Fall $\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_G} = 100\%$.

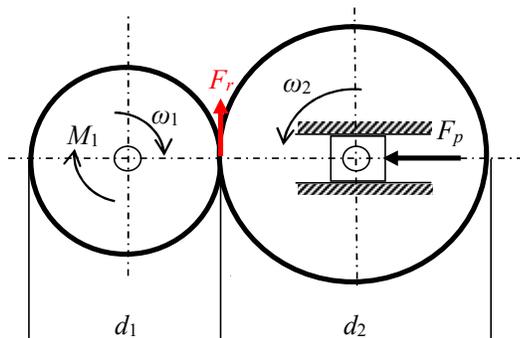


Bild 17 Reibradantrieb

In der Wirklichkeit bleibt die Umfangsgeschwindigkeit des angetriebenen gegenüber die des antreibenden Rades ein wenig zurück. $r_2\omega_2 = u_2 < u_1 = r_1\omega_1$. Das Verhältnis der relativen Geschwindigkeitsrücklage zu der Umfangsgeschwindigkeit des antreibenden Rades heißt Schlupf, wird mit s (aus dem englischen Wort slip) bezeichnet, typische Werte für s sind 2 – 3%. Er ist dimensionslos, kann aber auch als Prozentwert angegeben werden.

$$s = \frac{u_1 - u_2}{u_1} = 1 - \frac{r_2\omega_2}{r_1\omega_1} = 1 - \frac{d_2 n_2}{d_1 n_1} = 1 - \frac{d_2}{d_1} \frac{1}{i}$$

Von hier kann z.B. der erforderliche Durchmesser des angetriebenen Rades d_2 berechnet werden, wenn die erwünschte Übersetzung, der realisierbare Schlupf und der Antriebsraddurchmesser gegeben sind: $d_2 = d_1 \cdot i \cdot (1 - s)$.

Der Wirkungsgrad ist in diesem Fall $\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_G} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{F_r r_2 \omega_2}{F_r r_1 \omega_1} = 1 - s \leq 1$.

Der **Riemenrad Antrieb** ermöglicht einen größeren Wellenabstand. Die gekoppelten Wellen drehen sich in die gleiche Richtung. Auch bei diesem Antrieb muss mit einem Schlupf gerechnet werden,

dessen Größenordnung auch einige Prozente beträgt. Der herumlaufende Riemen soll unten gespannt sein, der ist der gespannte Zweig (Riemenkraft ist F_1), der obere, zurücklaufende Zweig ist lockerer (Riemenkraft ist $F_2 < F_1$). Die Definition des Schlupfs ist gleich mit der früheren:

$$s = \frac{u_1 - u_2}{u_1} = 1 - \frac{d_2 n_2}{d_1 n_1}.$$

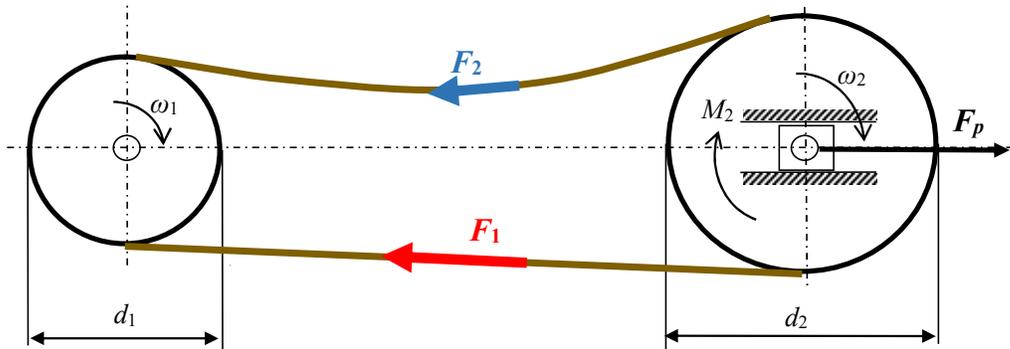


Bild 18 Riemenrad Antrieb

Die Differenz der Riemenkräfte multipliziert mit den entsprechenden Radien gibt die Drehmomente an: Im Bild sind die, auf den angetriebenen Rad wirkende Kräfte gezeichnet, so ist

$$P_{Nutz} = M_2 \omega_2 = (F_1 - F_2) \frac{d_2}{2} \omega_2.$$

Ganz ähnlich ist die Gesamtleistung $P_G = M_1 \omega_1 = (F_1 - F_2) \frac{d_1}{2} \omega_1$. Der Wirkungsgrad ist also

$$\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_G} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{d_2 \omega_2}{d_1 \omega_1} = 1 - s \leq 1, \text{ wie vorher.}$$

Die Riemenkraft baut sich stetig entlang des Umfangs des Riemenrades auf. Diese Kraft ist die Summe der Elementarkräfte, die eigentlich Reibungskräfte sind und so proportional zu $F_p = F_1 + F_2$ sind. Die frühere Version der Form des Riemens war ein flacher Band, die jetzt übliche Ausführung heißt Keilriemen, weil so die Presskraft erhöht werden kann und dadurch der Schlupf vermindert wird.

Der Querschnitt des Riemenrades und des Riemens bei diesen zwei Ausführungen sehen so aus:

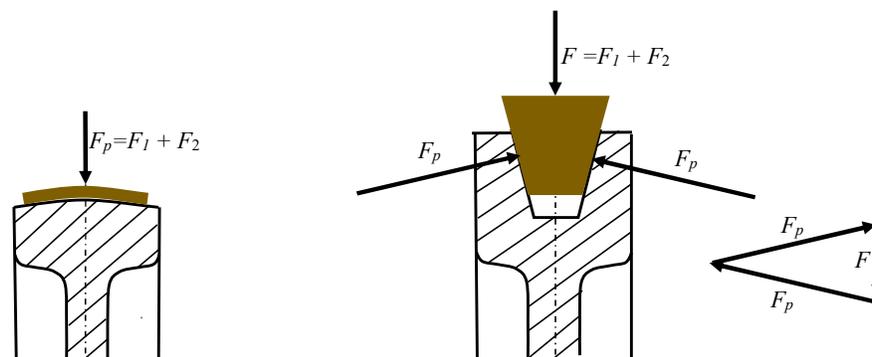


Bild 19 Flachriemen und Keilriemen

Beim Flachriemen ist $F_p = F_1 + F_2$, beim Keilriemen gilt $F_p \gg F_1 + F_2$

Der heute sehr verbreitete Antrieb ist der Zahnradantrieb, bestehend aus zwei Zahnradern mit unterschiedlichen Anzahlen von ineinandergreifenden Zähnen. Aus solchen Zahnradpaaren sind Zahnradgetriebe aufgebaut. Es gibt keinen Schlupf, beide Räder haben am „Rollkreis“ gleiche

Umfangsgeschwindigkeit, der Wirkungsgrad ist dadurch sehr hoch, jedoch kleiner als 100%, weil gewisse Reibungsverluste doch entstehen.

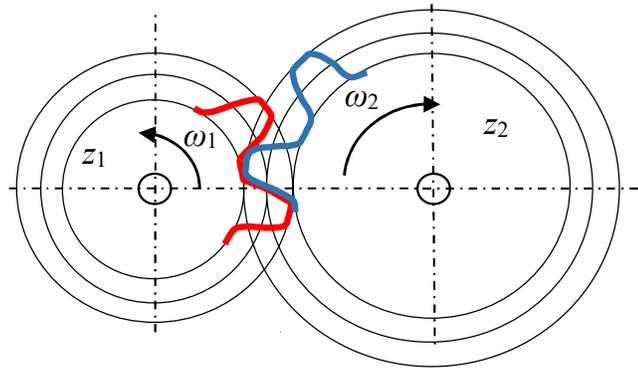


Bild 20 Zahnrad 1 treibt Zahnrad 2 an, Drehrichtungen sind gegensinnig

Da die Anzahl der Zähne (z_1 und z_2) zum Verhältnis der Durchmesser der Zahnräder am Teilkreis proportional ist, so ist die Übersetzung mit diesem Verhältnis umgekehrt proportional:

$$\frac{u_1}{u_2} = 1 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right) \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_1}{z_2} i. \text{ Daraus folgt: } i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

im Bild 20 ist die Übersetzung verlangsamernd.

Typische Werte für i von einem Zahnradpaar sind 2 bis 5.

Es ist auch möglich, senkrechte Wellen zu koppeln, dazu werden Kegelzahnradpaare gebraucht. Eine andere Möglichkeit bietet der Schneckenantrieb an, wobei auch die Übersetzung sehr groß sein kann.

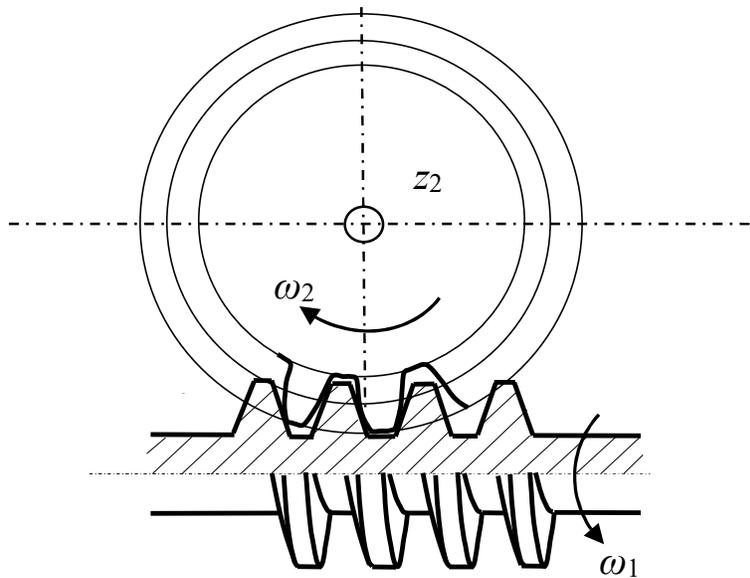


Bild 21 Schneckengetriebe (Drehachsen sind senkrecht aufeinander)

Zahl der Gewinde an der Schnecke: $z_1 = 1$

Zahl der Zähne am Schneckenrad: $z_2 = 16$

Das Schneckenrad hat z_2 Zähne, die in das Gewinde der Schnecke greifen. Die Schnecke kann mit einem einfachen Gewinde oder mit einem Doppelgewinde hergestellt werden. Die Anzahl der

Gewinde sei mit z_1 bezeichnet ($z_1=1$ oder 2). Die Übersetzung ist wie beim Zahnradantrieb $i = \frac{z_2}{z_1}$.

Im Beispiel des obigen Bildes ist $i = 16$. Es können Übersetzungen in einer Stufe bis zu etwa $30 \div 40$ erreicht werden. Es wird ausschließlich zur Reduzierung der Drehzahl verwendet.

5. Belastungsbeiwert, Verluste und Wirkungsgrade von mechanischen und elektrischen Maschinen

Der **Belastungsbeiwert** einer Arbeits- oder Kraftmaschine ist mit dem Verhältnis der Nutzleistung

$$P_{Nutz} \text{ zu Nennleistung definiert: } x = \frac{P_{Nutz}}{P_{Nenn}}.$$

Er ist eine, mit x bezeichnete dimensionslose Zahl. Die Nennleistung P_{Nenn} ist diejenige Nutzleistung, die von der Maschine dauerhaft abgegeben werden kann ohne sie zu überfordern. Das heißt, die Erwärmungen, der Verschleiß von einzelnen Maschinenteilen, eventuelle Vibrationen sind nicht gefährlich. Für kürzere Zeitdauer darf allerdings $x \geq 1$ sein, die Maschine ist dann überbelastet.

Der Arbeitsverlust ist schon am Beispiel der Bewegung des Wagens auf der Rampe erwähnt worden: $W' = W_G - W_{Nutz}$. So ist analog auch für Leistungen $P' = P_V(x) = P_G - P_{Nutz}$

Es stellt sich die Frage, wie hängt der Verlust vom Belastungsbeiwert ab? Man kann für diese Abhängigkeit elementare Ansätze formulieren, die einfachsten Formen für die Funktion $P_V(x)$ sind die lineare und die Quadratische Funktion. Auch beim Leerlauf der Maschine ist der Verlust größer als Null, dieser Wert wird mit P_{V0} bezeichnet. Bei der Erhöhung der Belastung wächst die Verlustleistung, so ist für Maschinen, deren Betrieb auf einfachen mechanischen Prinzipien aufgebaut ist

$$P_V(x) = P_{V0} + x \cdot P_{V,x=1}.$$

Wenn es sich um eine elektrische Maschine handelt, gilt

$$P_V(x) = P_{V0} + x^2 \cdot P_{V,x=1}.$$

Es ist einleuchtend, diese Funktionen graphisch darzustellen. Der zweite Parameter in den Funktionen ist der veränderliche Verlustanteil bei Nennbelastung, d.h. bei $x = 1$.

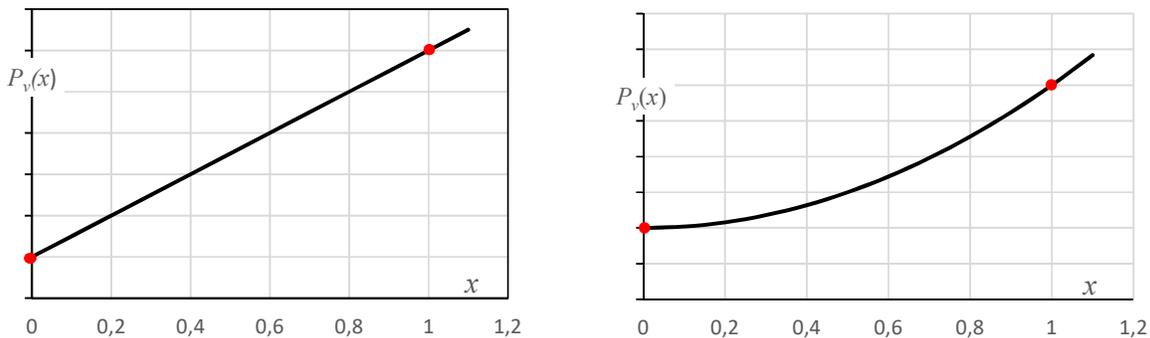


Bild 22 Verlust über dem Belastungsbeiwert für
mechanische, elektrische
Maschinen

Kennt man die Nennleistung P_{V0} , den bleibenden Verlust und den **veränderlichen** Verlustanteil bei Nennbelastung $P_{V,x=1}$ einer Maschine und ihren Typ, so kann man sowohl die momentane Nutzleistung, als auch den Verlust, und daraus die Gesamtleistung berechnen. Schließlich ergibt sich der Wirkungsgrad, als Funktion von x .

$$\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_G} = \frac{P_{Nutz}}{P_{Nutz} + P_V} = \frac{x \cdot P_{Nenn}}{x \cdot P_{Nenn} + P_{V0} + x \cdot P_{V,x=1}} = \eta(x) \quad \text{für mechanische,}$$

$$\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_G} = \frac{P_{Nutz}}{P_{Nutz} + P_V} = \frac{x \cdot P_{Nenn}}{x \cdot P_{Nenn} + P_{V0} + x^2 \cdot P_{V,x=1}} = \eta(x) \quad \text{für elektrische Maschinen.}$$

Diese Funktionen können wiederum graphisch dargestellt werden.

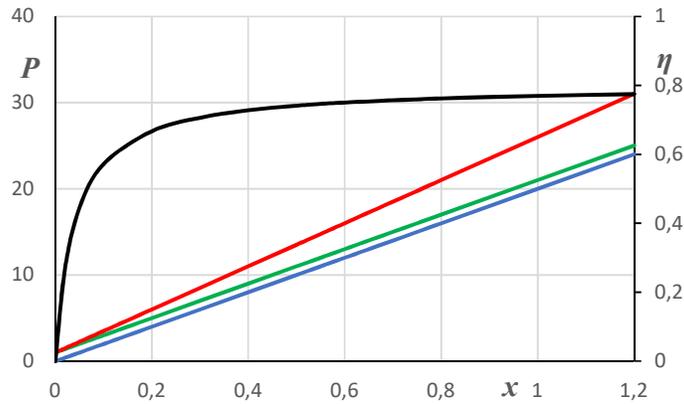


Bild 23 Leistungen von mechanischen Maschinen
 P_{Nutz} , $P_{Nutz} + P_{v0}$, P_G
 Wirkungsgrad $\eta(x)$

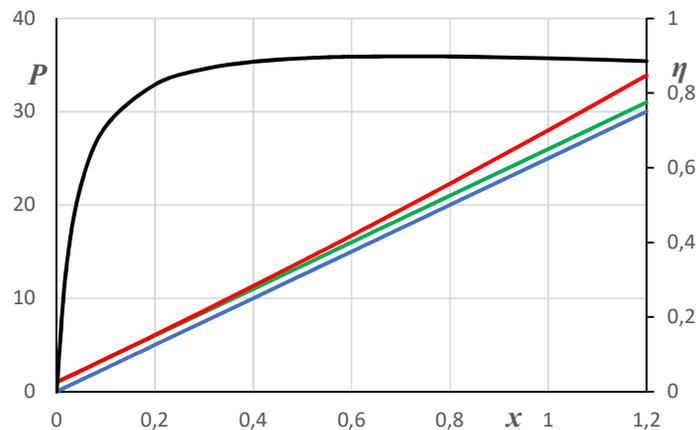


Bild 24 Leistungen von elektrischen Maschinen
 P_{Nutz} , $P_{Nutz} + P_{v0}$, P_G
 Wirkungsgrad $\eta(x)$

Das Diagramm des Wirkungsgrades im Bild 24 zeigt, dass der Wirkungsgrad im normalen Betriebsbereich ein Maximum besitzt. Die Lage dieses optimalen Betriebspunktes lässt sich durch die Ableitung der $\eta(x)$ Funktion nach x berechnen. Die notwendige Bedingung des Maximums ist, dass die Ableitung dort Null sein soll, $\frac{d\eta}{dx}(x_{opt}) = 0$, hier ist der Scheitel der Wirkungsgrad-Kurve.

Man kann berechnen, dass x_{opt} die Lösung der folgenden Gleichung ist

$$P_{v0} = x_{opt}^2 \cdot P_{v,x=1}, \quad \text{d.h.} \quad x_{opt} = \sqrt{\frac{P_{v0}}{P_{v,x=1}}}$$

Im Beispiel des obigen Bildes ist $P_{v0} = 1kW$, $P_{v,x=1} = 2kW$, so ist $x_{opt} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,71$ und der maximale Wirkungsgrad hier ist $\eta_{max} = 90\%$.

Maschinen arbeiten im größten Teil ihrer Betriebszeit unter veränderlicher Leistungsabgabe. So ändert sich der Belastungsbeiwert während der Betriebszeit, $x = x(t)$. So ändert sich auch der Wirkungsgrad mit der Zeit. Es ist interessant zu wissen, wie groß der mittlere Belastungsbeiwert \bar{x} und der durchschnittliche Wirkungsgrad $\bar{\eta}$ sind. Diese Größen sind nicht anhand von Leistungen, sondern auf Arbeiten basierend definiert. Man darf annehmen, dass die volle Zeitdauer auf kurze

Zeitintervalle aufgeteilt werden kann, innerhalb von den die Belastung, als konstant angesehen werden kann:

$$\bar{x} = \frac{W_{Nutz}}{W_{Nenn}} = \frac{\sum_i P_{Nutz,i} \cdot \Delta t_i}{\sum_i P_{Nenn} \cdot \Delta t_i} = \frac{\sum_i (P_{Nenn} x_i) \cdot \Delta t_i}{P_{Nenn} \sum_i \Delta t_i} = \frac{\sum_i x_i \cdot \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}.$$

$$\bar{\eta} = \frac{W_{Nutz}}{W_G} = \frac{\sum_i P_{Nutz,i} \cdot \Delta t_i}{\sum_i P_{G,i} \cdot \Delta t_i} = \frac{\sum_i P_{Nutz,i} \cdot \Delta t_i}{\sum_i \frac{P_{Nutz,i}}{\eta_i} \cdot \Delta t_i} = \frac{\sum_i P_{Nenn} x_i \cdot \Delta t_i}{\sum_i \frac{P_{Nenn} x_i}{\eta_i} \cdot \Delta t_i} = \frac{\sum_i x_i \cdot \Delta t_i}{\sum_i \frac{x_i \cdot \Delta t_i}{\eta_i}}.$$

Die letzte Definition versagt, wenn sich die Maschine teilweise keine Nutzleistung abgibt, d.h. leerläuft. Dann ist nämlich im Nenner ein Bruch in Form $\frac{0}{0}$, die nicht eindeutig ist. In diesem Fall ist die richtige Definition des durchschnittlichen Wirkungsgrades:

$$\bar{\eta} = \frac{W_{Nutz}}{W_G} = \frac{\sum_i P_{Nutz,i} \cdot \Delta t_i}{\sum_i P_{G,i} \cdot \Delta t_i} = \frac{\sum_i P_{Nenn} x_i \cdot \Delta t_i}{\sum_{k \text{ für } x_k=0} P_{v0} \cdot \Delta t_k + \sum_{j \text{ für } x_j \neq 0} \frac{P_{Nenn} x_j}{\eta_j} \cdot \Delta t_j}.$$

6. Die Gesetze von Archimedes und der Kontinuität

Die Mechanik von strömenden Fluiden (Flüssigkeiten oder Gasen) ruht auf einigen grundlegenden physikalischen Erhaltungsprinzipien.

Ruhende Fluide sind einfacher zu beschreiben. Das Grundprinzip für Gase ist, dass der Druck im ganzen, mit Gas gefüllten Raum gleich ist.

Der Druck ist die Kraft, die auf eine Fläche (z.B. an die Wand) wirkt dividiert mit der Größe der Fläche, seine Maßeinheit ist dadurch $\frac{N}{m^2} = Pa$ nach dem Physiker Pascal benannt. Der Druck ist eine skalare Größe, er ist nicht richtungsorientiert.

Bei Flüssigkeiten wächst der Druck im Behälter mit der Tiefe durch die Wirkung des Schwerfeldes. Der Druck in Flüssigkeiten heißt hydrostatischer Druck und kann auf dem ersten Axiom von Newton basierend berechnet werden. Eine Flüssigkeitssäule ist in Ruhe, wenn die Summe der äußeren Kräfte Null ist. Vertikal nach unten zeigt das Gewicht und die Druckkraft auf der freien Oberfläche. Vertikal nach oben zeigt die Druckkraft auf der Grundfläche. Die Kräfte in horizontaler Richtung gleichen sich aus, geben also keine resultierende Kraft.

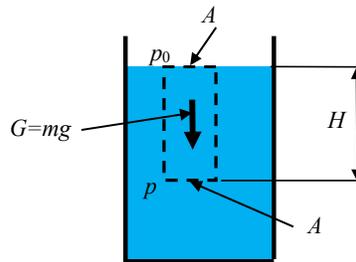


Bild 25 Gleichgewicht einer Flüssigkeitssäule im Behälter

Wir können schreiben $G + p_0 \cdot A - p \cdot A = 0$. Setzt man $G = mg = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot H \cdot g$ ein, so ist $\rho \cdot A \cdot H \cdot g + p_0 A - pA = 0$, woraus der Druck p in der Tiefe H $p = p_0 + \rho \cdot H \cdot g$ ist.

Der hydrostatische Druck ist: $\rho \cdot H \cdot g$. Hier bezeichnet g die Erdbeschleunigung, wie vorher, ρ die Dichte der Flüssigkeit (in $\frac{kg}{m^3}$, für Wasser ist $\rho_W = 1000 \frac{kg}{m^3}$) und p_0 den atmosphärischen Druck.

Da der atmosphärische Druck überall auf der Erde wirkt, rechnet man ihn oft nicht mit, man wählt eine relative Druckskale, die Überdruck heißt. Die absolute Druckskale wird vom Vakuum gemessen.

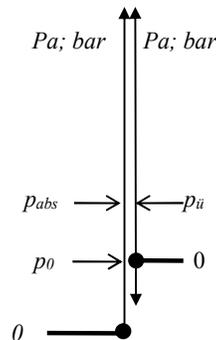


Bild 26 Druckskalen

Die Dichte von Flüssigkeiten ist vom Druck kaum anhängig, hängt in geringem Masse von der Temperatur ab, aber für verschiedene Flüssigkeiten kann sie sehr verschieden sein. Die Dichte des

Quecksilbers (*Hg*) ist sehr hoch, $\rho_{Hg} = 13600 \frac{kg}{m^3}$.

Die Gasdichte ist abhängig sowohl von der Temperatur, als auch vom Druck. Die Dichte der Luft bei 20°C und unter atmosphärischem Druck (100000 Pa = 1000 hPa = 1bar) ist

$$\rho_{Luft} = 1,188 \frac{kg}{m^3} \approx 1,2 \frac{kg}{m^3}.$$

Das **Gesetz der kommunizierenden Gefäße** behauptet, dass der Druck in gleichen Höhen in mit einander durchfahrbaren (kommunizierenden) flüssigkeitsgefüllten Behältern gleich ist und hängt von der Form des Behälters nicht ab. Das häufig angewendete Instrument für Druckmessung basiert auf diesem Gesetz, das ist das U-Rohrmanometer. Bis zur Höhe, wo in beiden Schenkeln des U-Rohres die gleiche Flüssigkeit sich befindet, sind also die Drücke in gleichen Höhen gleich. Da die offenen U-Rohr Enden an verschiedene Punkte des Raumes, oder an Geräte angeschlossen sind, lässt sich der Druck durch Vergleich berechnen.

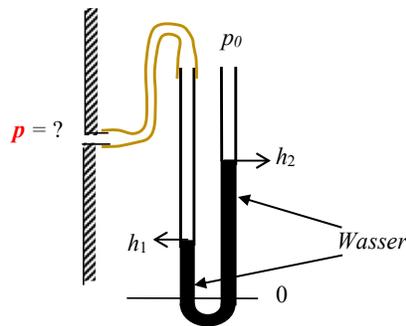


Bild 27 U-Rohrmanometer

Der **flexible Schlauch** verbindet das Manometer mit dem Raum, wo der Druck **p** zu bestimmen ist

Die Drücke in beiden Schenkeln des Manometers sind sowohl in der Höhe 0, als auch in der Höhe h_1 gleich. Man kann z.B. für die Drücke in der Höhe 0 schreiben, dass $p + \rho_W g \cdot h_1 = p_0 + \rho_W g \cdot h_2$. Von hier ist der absolute Druck im Raum $p = p_0 + \rho_W g \cdot (h_2 - h_1)$. Liest man also die Höhen h_1 und h_2 der Wasseroberflächen an einer Messskale ab und ist der lokale Luftdruck p_0 bekannt, erhält man den gesuchten Druckwert. Der Luftdruck wurde von Torricelli mit einem ähnlichen, nach ihm genannten Manometer gemessen. Ein mit seinem offenen Ende nach unten gerichtetes, mit Quecksilber gefülltes Glasrohr wird in einen, ebenfalls mit Quecksilber gefüllten Behälter eingetaucht. Die Quecksilbersäule läuft soweit herunter, bis ihr hydrostatischer Druck mit dem auf die freie Oberfläche des Behälters wirkenden Luftdruck gleich ist. Diese Säulenhöhe gibt in *Hgmm=torr* Maßeinheiten den Druckwert. Heute werden aber Digitalgeräte verwendet.

Ein, in eine Flüssigkeit getauchter prismatischer Körper, z.B. ein Würfel oder ein Zylinder erfährt an allen Seitenflächen die Kräfte, die aus dem hydrostatischen Druck resultieren. Die auf den Mantel wirkenden Druckkräfte sind ausgeglichen. Auf die horizontale Grundfläche wirkt eine vertikale, nach oben gerichtete Kraft, auf die horizontale Decke wirkt eine vertikale, nach unten gerichtete Druckkraft. Die beiden Flächen seien gleich groß. Die Grundfläche liegt tiefer, die Decke höher in der Flüssigkeit, die Drücke sind mit diesen Höhen proportional. Schließlich wirkt eine resultierende Auftriebskraft auf den Körper.

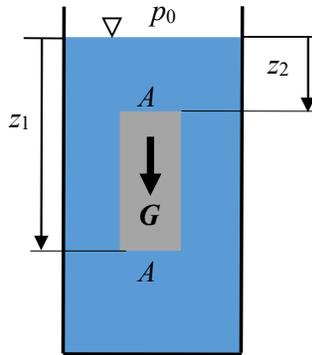


Bild 28 Ein in eine Flüssigkeit getauchter prismatischer Körper

Der Druck in der Tiefe z_1 ist $p_1 = p_0 + \rho g z_1$, bei z_2 : $p_2 = p_0 + \rho g z_2$. Die Druckkräfte sind dadurch $F_1 = p_1 A$ nach oben gerichtet und $F_2 = p_2 A$ nach unten gerichtet. Die resultierende Auftriebskraft ist $F_{auf} = F_1 - F_2 = [(p_0 + \rho g z_1) - (p_0 + \rho g z_2)] A = \rho g (z_1 - z_2) A = \rho g V$. V bezeichnet das Volumen des prismatischen Körpers. Das Gewicht des Körpers lässt sich mit seiner Dichte ρ_K als $G = \rho_K \cdot V \cdot g$ bestimmen.

Es gibt drei Möglichkeiten:

- $\rho_K < \rho$, der Körper schwimmt in der Flüssigkeit, er ragt von der Flüssigkeitsoberfläche aus.
- $\rho_K = \rho$, der ganze Körper ist in der Flüssigkeit im Gleichgewicht.
- $\rho_K > \rho$, der Körper sinkt in der Flüssigkeit bis zum Boden des Behälters hinunter.

Diesen Sachverhalt hat der griechische Wissenschaftler, *Archimedes* vor mehr als zweitausend Jahren erkannt, es ist nach ihm genannt.

Die Fluide sind meistens nicht in Ruhe, sondern sie strömen. Um Flüssigkeiten (wie Trinkwasser, Erdöl, Kühlmittel, usw.), oder Gase (frische Luft, Abgase, Erdgas, usw.) zu transportieren, werden Rohrleitungen gebraucht. Sind die Rohrwände dicht, so kann das Fluid nur am einen Ende des Rohres (Rohrquerschnitt 1) ein- und am anderen Ende (Querschnitt 2) ausströmen. Dadurch ist klar, dass die einströmende Masse pro Zeiteinheit (\dot{m} kg/s) mit der ausströmenden Masse pro Zeiteinheit gleich sein muss. Das ist die Aussage des **Massenerhaltungs-** oder **Kontinuitätsgesetzes**:

$$\dot{m}_1 = \rho_1 Q_1 = \rho_1 A_1 v_1 = \dot{m}_2 = \rho_2 Q_2 = \rho_2 A_2 v_2.$$

Hier bezeichnen Q den Volumenstrom in m^3/s und v die Strömungsgeschwindigkeit. Handelt es sich um eine Flüssigkeit oder ein Gas unter konstantem Druck, so sind die Dichten gleich

$$Q_1 = Q_2, \text{ bzw. } A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Sind auch die Rohrquerschnitte gleich, so ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohr konstant: $v_1 = v_2$.

Bei Verzweigungen oder Anschlüssen sind natürlich die *Summen* der einströmenden und die der ausströmenden Flüssigkeiten gleich.

7. Bernoulli Gleichung und ihre Anwendungen, Venturi-Rohr

Die Physik von strömenden fluiden wird im Rahmen der Vorlesung Strömungslehre ausführlich behandelt. Es ist wichtig, dass das Strömungsbild in einem Raum mit der *Strömungsgeschwindigkeit* (ein Vektor im Allgemeinen durch drei Komponenten definiert), *Druckverteilung* (Skalar) und *Dichte* (Skalar) beschrieben werden kann. Das sind fünf unbekannte Größen, die sowohl Funktionen des Ortes als auch der Zeit sein können. Man braucht also fünf Gleichungen. Die sind die drei Bewegungsgleichungen (Impulserhaltung), die eben behandelte Massenerhaltung und eine Zustandsgleichung, die die Dichte mit dem Druck verknüpft.

Im Rahmen dieser Vorlesung werden aber nur *eindimensionale, stationäre (zeitunabhängige) Rohrströmungen* behandelt, wobei die *Dichte* als *Konstant* angesehen werden kann. Das gilt auch für Gase, wenn die Strömungsgeschwindigkeit nicht mehr als ein Drittel der Schallgeschwindigkeit ist und die Druckänderungen 20% nicht überschreiten. So gibt es nur zwei abhängige Variablen, Druck und Geschwindigkeit, und eine unabhängige Variable, nämlich der Ort, d.h. die Lage des Rohrquerschnittes.

Es muss wiederholt betont werden, dass die Geschwindigkeit v immer die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt bezeichnet.

Rohrleitungen enthalten gerade Röhre, Ventile, Krümmen, Düsen, Diffusoren, T-Verzweigungen, usw. Bei Düsen (Verengung) und Diffusoren (Erweiterung) ändert sich der Rohrquerschnitt, so muss die Kontinuität berücksichtigt werden.

Die Impulserhaltung kann für ein Volumenelement formuliert werden. Wird es für das ganze Volumen integriert, erhält man die nach **Bernoulli** genannte **Gleichung**. Wird *keine äußere Arbeit oder Wärme* dem Volumen zu- oder abgeführt, sagt diese Gleichung auch die Erhaltung der Energie aus.

Man betrachte einen Krümmer mit Querschnittsänderung in zwei nahen Zeitpunkten. Die Gesamtenergie (kinetische und potentielle) wird durch die Arbeit der auf die Grenzquerschnitte wirkenden Kräfte geändert.

Wir fassen noch einmal die aufgezählten Bedingungen zusammen:

- stationäre Strömung
- eindimensionale Strömung entlang Stromlinien
- inkompressible Flüssigkeit, d.h. $\rho = \text{konst.}$
- adiabatische Strömung, keine Wärme zu- oder abgeführt
- verlustfreie Strömung
- das einzige wirkende Kraftfeld ist das Schwerfeld

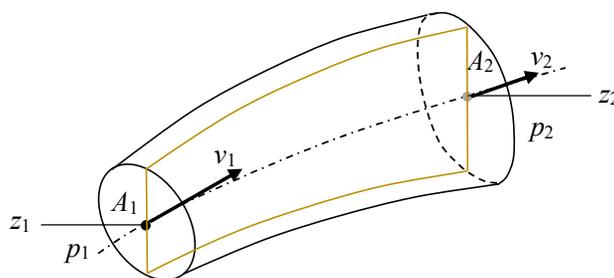


Bild 29 Krümmer-Diffusor mit **Längsschnitt**

Es kann die strömende Flüssigkeit in zwei nahen Zeitpunkten ($t = 0$ und $t = \Delta t$) in dem typischen **Längsschnitt** dargestellt werden. Dabei bewegt sich die Flüssigkeit in diesem Schnitt ein wenig nach rechts.

Die Energie bei $t = 0$ setzt sich aus den Energien von zwei Teilvolumina zusammen, dem Teil, der während Δt zuströmt, und dem restlichen Teil.

Die Energie bei $t = \Delta t$ setzt sich ebenfalls aus der Energien von zwei Teilvolumina zusammen, dem Teil, der während Δt ausströmt, und dem Teil, der sich immer noch im Krümmer befindet.

Es gibt zwei mechanische Energiearten, $E_{kin} = m \frac{v^2}{2}$ und $E_{pot} = mgz$.

Die Energieänderung ist die Folge der Arbeit der Druckkräfte $W = pA \cdot \Delta s = pA \cdot v\Delta t$.

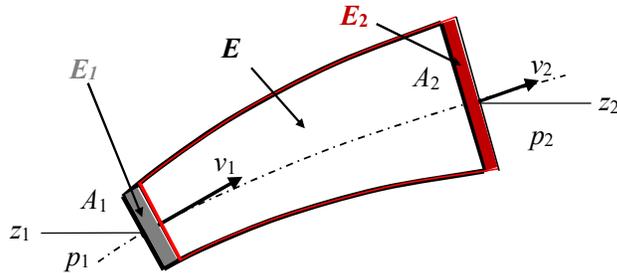


Bild 30 Flüssigkeitslage im Krümmer bei $t = 0$ und bei $t = \Delta t$

Die Gesamtenergie im Zeitpunkt $t = 0$ ist $E(t = 0) = E_1 + E = \rho A_1 (v_1 \Delta t) \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) + E$.

Die Gesamtenergie im Zeitpunkt $t = \Delta t$ ist $E(t = \Delta t) = E + E_2 = E + \rho A_2 (v_2 \Delta t) \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right)$.

Die Energieänderung ist

$$\Delta E = E + \rho A_2 (v_2 \Delta t) \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \rho A_1 (v_1 \Delta t) \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) - E = \rho Q \Delta t \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{v_1^2}{2} - gz_1 \right),$$

weil wegen der Kontinuität $A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$, der durch den Krümmer fließende Flüssigkeitsstrom ist.

Diese Energieänderung findet wegen der Arbeit der Druckkräfte statt.

Die Arbeit beim Einstromen ist $W_1 = p_1 A_1 \cdot (v_1 \Delta t)$ und sie ist positiv, wird zugeführt.

Die Arbeit beim Ausströmen ist $W_2 = p_2 A_2 \cdot (v_2 \Delta t)$ und sie ist negativ, wird abgeführt.

So gilt $\rho Q \Delta t \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{v_1^2}{2} - gz_1 \right) = \Delta E = W_1 - W_2 = p_1 A_1 \cdot (v_1 \Delta t) - p_2 A_2 \cdot (v_2 \Delta t) = (p_1 - p_2) Q \Delta t$. Es

kann mit $Q \Delta t$ gekürzt und die Gleichung geordnet werden:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2 = konst.$$

Damit wurde die Bernoulli Gleichung hergeleitet. Sie gilt entlang einer Stromlinie, die im Krümmer, oder im Rohr läuft.

Sie muss ergänzt werden, wenn die **Strömungsverluste** nicht vernachlässigbar klein sind. In diesem Fall soll der in Druckeinheiten angegebene Verlustglied zur rechten Seite addiert werden.

Die alternative Form der Bernoulli Gleichung: $\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = konst.$ wird für Flüssigkeitsströmungen

häufig angewendet. Es treten hier drei Höhenglieder auf, Druckhöhe, Geschwindigkeitshöhe und geodätische Höhe.

Ein anschauliches Anwendungsbeispiel bietet das **Venturi-Rohr** an. Es besteht aus einer Düse und einem darauffolgenden Diffusor, die durch ein kurzes Halsstück miteinander verbunden sind. Es dient zur Messung des Volumenstromes in einer Rohrleitung.

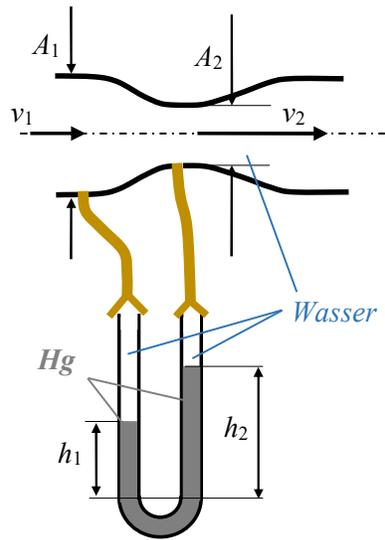


Bild 31 Venturi-Rohr und U-Rohrmanometer

Man schreibe die Bernoulli Gleichung auf die Querschnitte 1 und 2 auf!

$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$. Die Höhen der Rohrachse sind gleich $z_1 = z_2$. Die Kontinuität sagt, dass der Volumenstrom in den genannten Querschnitten gleich ist, $A_1 v_1 = A_2 v_2$. Nach Substitution

$$\text{ist } \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}, \text{ d.h. } \underline{p_1 - p_2} = \rho \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right).$$

Das Manometer Gleichgewicht kann für das U-Rohrmanometer wie folgt geschrieben werden:

$$p_1 + \rho g(h_2 - h_1) + \rho_{Hg} g h_1 = p_2 + \rho_{Hg} g h_2, \text{ oder umgeformt } \underline{p_1 - p_2} = (\rho_{Hg} - \rho) g (h_2 - h_1).$$

Die unterstrichenen Druckdifferenzen sind gleich, so gilt $\rho \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right) = (\rho_{Hg} - \rho) g (h_2 - h_1)$.

Von hier kann man v_2 berechnen:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1 \right) 2g(h_2 - h_1)}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}}.$$

Damit ist auch der Volumenstrom gegeben, wenn man den engsten Querschnitt des Venturirohres, kennt:

$$Q = A_2 v_2.$$

Da alle Größen in diesen Formeln bis auf $\Delta h = h_2 - h_1$ gegeben sind, kann man den Volumenstrom, als $Q = C \sqrt{\Delta h}$ sehr schnell messen und auswerten.

In realen Flüssigkeiten entstehen auch Strömungsverluste, die bis jetzt nicht berücksichtigt wurden.

8. Grundlagen von thermischen Prozessen, Heizwert, spezifischer Verbrauch

In thermischen Maschinen wird die chemische Energie irgendeines Brennstoffs freigesetzt und für Arbeitsabgabe verwendet, d.h. eine Arbeitsmaschine wird angetrieben. Dabei entstehen nicht weiter verwertbare Nebenprodukte und auch ein Wärmeanteil entweicht in die Umgebung. Das Schema sieht so aus:

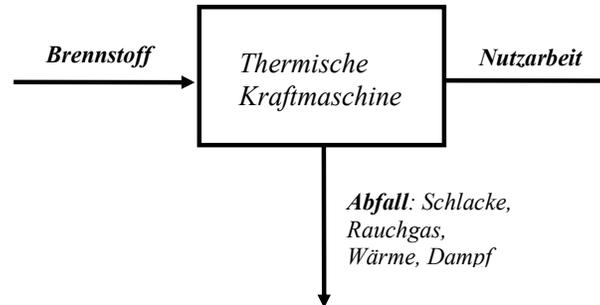


Bild 33 Schema einer thermischen Kraftmaschine

Man unterscheidet

gasförmige:	z.B. Erdgas, Methan
flüssige:	z.B. Erdöl, Rapsöl
feste:	z.B. Kohle, Holz

Brennstoff Arten.

Der Wärmehalt wird mit dem **Heizwert** H charakterisiert. Der Heizwert ist diejenige Energie, die bei der vollkommenen Verbrennung von 1 kg Brennstoff freigesetzt wird, wenn die Verbrennungsprodukte auf die Umgebungstemperatur abgekühlt sind aber die entstandenen Wassermoleküle im Dampfzustand vorhanden sind. Der SI-Maßeinheit ist J/kg , die aber eine sehr geringe Energie bedeutet, so wird hauptsächlich MJ/kg verwendet.

Die verbrauchte Brennstoffmenge wird bei stetig arbeitenden Kraftmaschinen mit dem Brennstoff Massenstrom \dot{m}_{Br} (kg/s) gegeben. Kraftwerke verbrauchen hohe Brennstoffströme, deswegen wird meistens der \dot{m}_{Br} -Wert in MJ/h angegeben. Die im Bild 33 angedeutete Nutzarbeit kann mit W_{Nutz} bezeichnet werden. Ein Maß für die Effizienz der thermischen Kraftmaschine ist **der spezifische Brennstoffverbrauch**, b (kg/kWh). Er ist so definiert: $b = \frac{m_{Br}}{W_{Nutz}} = \frac{\dot{m}_{Br}}{P_{Nutz}}$, d.h. als das Verhältnis

$$\frac{\text{Brennstoffmasse}}{\text{Nutzarbeit}} \text{ oder } \frac{\text{Brennstoffmassenstrom}}{\text{Nutzleistung}}.$$

Die durch den Brennprozess freigesetzte Gesamtleistung (eigentlich Wärmestrom) der thermischen Kraftmaschine kann als der Produkt vom Heizwert und Brennstoffmassenstrom berechnet werden:

$$P_G = \dot{m}_{Br} \cdot H.$$

Zur Analogie des spezifischen Brennstoffverbrauchs wird **der spezifische Wärmeverbrauch** definiert:

$$q = \frac{\dot{m}_{Br} \cdot H}{P_{Nutz}} \left(\frac{\text{MJ/h}}{\text{kW}} \right).$$

Er ist also das Verhältnis

zugeführter (freigesetzter) Wärmestrom / Nutzleistung. Setzt man hier im Zähler die Gesamtleistung ein,

bekommt man $q = \frac{P_G}{P_{Nutz}} \left(\frac{\text{MJ/h}}{\text{kW}} = \frac{\text{MJ}}{\text{kWh}} \right)$. Man erkennt gleich, dass hier der Kehrwert des

Wirkungsgrades steht, es ist nämlich $\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_G}$ (-). Damit $\eta = \frac{1}{q}$ auch Zahlenmäßig gelte, muss zuerst der Maßeinheit vom q umformt werden. Die Wechselzahl zwischen kWh und MJ ist $3,6MJ/kWh$. Es gilt nämlich: $1 kWh = 1000 Wh = 3600000 Ws = 3,6 \cdot 10^6 J = 3,6 MJ$.

Damit ist der **Wirkungsgrad** $\eta = \frac{3,6 \frac{MJ}{kWh}}{q \frac{MJ}{kWh}}$.

Alle bisher definierten Mengen hängen vom Betriebsbeiwert der thermischen Kraftmaschine ab.

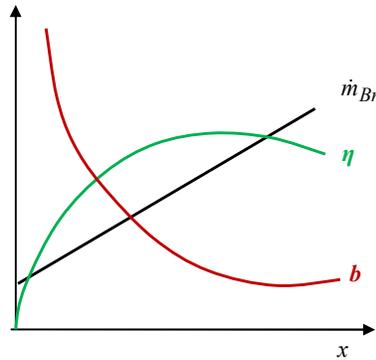


Bild 34 Kraftmaschinen Parameter in Abhängigkeit vom Belastungsbeiwert

9. Kreisprozess von thermischen Kraftwerken, der Begriff der Enthalpie und ihre spezifischen Formen

Außer den bisher behandelten Energieformen (kinetische, potentielle, elastische) Energie werden wir nun die **spezifische innere Energie** (u J/kg) diskutieren. Die kinetische (Translation, Rotation), bzw. eine Art der elastischen Energie (Schwingung um den Massenzentrum) charakterisieren die einzelne Gas oder Flüssigkeitsmoleküle. Diese Energieformen sind zur **absoluten Temperatur**, T (K) proportional, der Proportionalitätsfaktor heißt spezifische Wärme beim konstanten Volumen, c_v . Die spezifische Wärme beim konstanten Druck, c_p wird auch definiert. Bei Flüssigkeiten wird nur eine spezifische Wärme benutzt ohne Index, c .

Damit ergibt sich die spezifische innere Energie $u \approx c_v T$ für Gase, bzw. $u \approx cT$ für Flüssigkeiten.

Für Luft im Normalzustand ist $c_p \approx 1000 \frac{J}{kgK}$ und $c_v \approx 710 \frac{J}{kgK}$, für kaltes Wasser ist

$c = 4187 \frac{J}{kgK} \approx 4,2 \frac{kJ}{kgK}$. Da uns bei thermischen Prozessen immer die Änderungen, nicht die

absoluten Größen interessieren, kann die spezifische innere Energie auch vom Gefrierpunkt des Wassers in Grad Celsius ($^{\circ}C$) gerechnet werden, dann ist $u = c \cdot t$.

Um eine Dampfturbine zu betätigen, muss das Wasser nicht nur bis zur Siedetemperatur erwärmt, sondern auch vollkommen verdampft und zusätzlich überhitzt werden. Die Verdampfungswärme des Wassers ist $r = 2260$ kJ/kg. Dabei wird das Speisewasser des Kraftwerks durch Pumpen gefördert, erhält also kinetische Energie, eventuell auf eine höhere Lage gehoben, das bedeutet potentiellen Energiezuwachs und muss auch gegenüber der Umgebung Arbeit ausführen, Wassermassen (außerhalb der betrachteten Wasservolumen) müssen verdrängt werden. Die Summe der Arbeit und aller dieser Energieformen heißt **totale Enthalpie**, i_{tot} (J/kg), bezogen auf die Masse der Wassermenge.

$$i_{tot} = u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz.$$

Wir haben schon die letzten drei Glieder kennengelernt, ihre Summe bleibt durch ein Rohr gemäß der Bernoulli Gleichung konstant, sie wird manchmal **Bernoulli Enthalpie** genannt, sie wird bei „kalten“ Flüssigkeitsströmen gebraucht.

$$i_B = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz.$$

Bei Strömung von kalter Luft spielt die Änderung der potentiellen Energie keine Rolle, deswegen heißt die Summe der mittleren zwei Glieder einfach Totaldruck, jedoch nicht auf die Maße, sondern auf das Volumen bezogen:

$$p_{tot} = p + \frac{\rho}{2} v^2.$$

Die Summe der ersten Glieder heißt thermodynamische **spezifische Enthalpie** sie wird z.B. bei überhitztem Dampf gebraucht.

$$i = u + \frac{p}{\rho}.$$

Betrachten wir nun die wesentlichen Komponenten eines Wärmekraftwerks, das mit Wasser funktioniert! Es besteht aus einer oder mehreren Pumpen (Kondensatpumpe und Speisepumpe), Kessel, Überhitz-Wärmeaustauscher, Regelventil, Dampfturbine, Kondensator. In verschiedenen Formen (Dampf oder Flüssigkeit) *läuft das selbe Wasser herum*. Die spezifische Enthalpie ist im Bild 35 eingetragen. Die Änderung der Enthalpie in den einzelnen Komponenten erfolgt in Form von Druckerhöhung, Zuwachs der inneren Energie durch Erwärmung bzw. Verdampfung oder Kondensation. Die kinetische und die potentielle Energie ändern sich kaum. Die Röhren werden mit

einer durchgezogenen Linie in blau (Flüssigkeit) oder schwarz (Dampf) dargestellt. Die Symbole sind benannt.

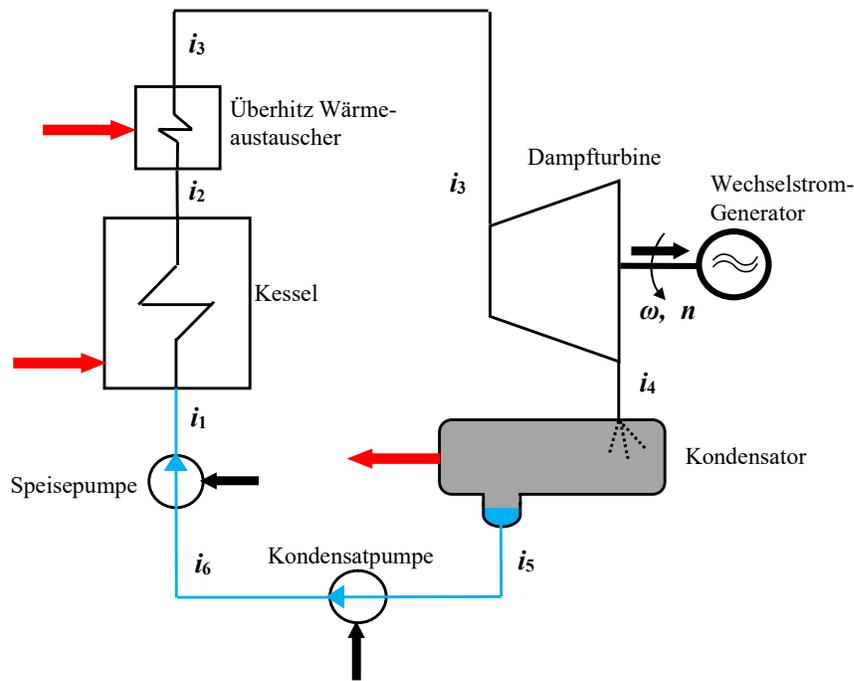


Bild 35 Schema eines Wärmekraftwerks
 Roter Pfeil bezeichnet Wärme Zu- oder Abfuhr
 Schwarzer Pfeil bezeichnet zugeführte, bzw. abgeführte mechanische Arbeit
 $i_5 < i_6 < i_1 < i_2 < i_3 > i_4 > i_5$

Enthalpie i_1 , sowie i_5 und i_6 soll in Form der Bernoulli Enthalpie bekannt sein: $i_B = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$

Enthalpien i_2 , i_3 und i_4 sind thermodynamische Total-Enthalpien $i_{tot} = u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$. Die Änderung von u erfolgt nicht nur wegen Temperaturänderung, sondern auch wegen Verdampfung, bzw. Kondensation. Die Dampfgeschwindigkeit ändert sich insbesondere in der Dampfturbine, sie ist in den Röhren, im Kessel und im Kondensator gering, so wird dort das Glied $\frac{v^2}{2}$ gegenüber $\frac{p}{\rho} + u$ meistens vernachlässigt.

Die einzelnen Komponenten des Kraftwerks nützen die zugeführte Wärme, mechanische Leistung mit verschiedenem Effizienz aus.

Der Kessel- und Überhitzerwirkungsgrad ist $\eta_{Kessel} = \frac{P_{Kessel, Nutz}}{P_{Kessel, G}} = \frac{\dot{m}_{Dampf} (i_3 - i_1)}{\dot{m}_{Brenn} \cdot H}$.

Der Turbinenwirkungsgrad ist $\eta_{Turbine} = \frac{P_{Turbine, Nutz}}{P_{Turbine, G}} = \frac{M \cdot \omega}{\dot{m}_{Dampf} (i_3 - i_4)}$.

Die Pumpenwirkungsgrade sind $\eta_{K-P} = \frac{\dot{m}_{Dampf} (i_6 - i_5)}{M_K \cdot \omega_K}$

bzw. $\eta_{Sp-P} = \frac{\dot{m}_{Dampf} (i_1 - i_6)}{M_S \cdot \omega_S}$.

Da der Massenstrom des Wassers mit dem des Dampfes identisch ist, muss man sie mit Indizes nicht unterscheiden.

10. Zeitlich veränderlicher Betrieb von Maschinen

Im ersten Kapitel haben wir schon die Bewegungsdiagramme bei zeitlich veränderlicher **geradliniger Bewegung** kennengelernt.

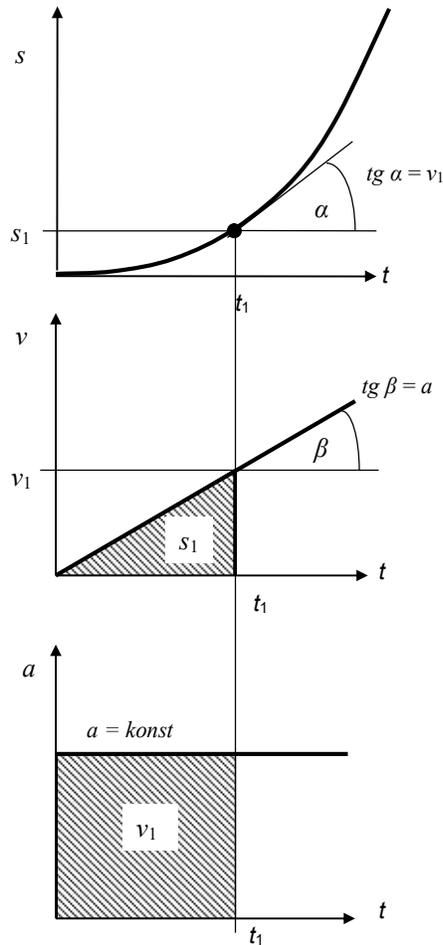


Bild 36 Bewegungsdiagramme bei veränderlicher Bewegung

Für den allgemeinen Fall, wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Weg im Anfangszeitpunkt s_0 ist, sind die notwendigen Formeln: $v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$.

Die Beschleunigung ist Folge der wirkenden Kraft F : $a = \frac{F}{m}$.

Die Formeln, die die **Drehbewegung** beschreiben sind völlig analog, wenn man anstatt von a Winkelbeschleunigung ε , anstatt von v Winkelgeschwindigkeit ω schreibt, F mit M und m mit Θ ersetzt.

So sind $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, und $\varepsilon = \frac{M}{\Theta}$. Der Winkel φ wird meistens nicht gefragt.

Die Arbeit, die zur Beschleunigung notwendig ist, kann bei der geradlinigen Bewegung als

$W = F \cdot s = ma \cdot s = m \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = E_{kin,2} - E_{kin,1}$ berechnet werden. Bei

Rotationsbewegung ist die entsprechende Formel $W = M \cdot \varphi = \Theta \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = E_{kin,2} - E_{kin,1}$. Daraus

ist klar, dass die kinetische Energie des rotierenden Körpers $E_{kin} = \Theta \frac{\omega^2}{2}$ ist.

Beispiel: Wie groß ist die kinetische Energie einer rollenden Scheibe, deren Radius R und Masse m ist? Wenn die Geschwindigkeit der Scheibenachse v ist, dann ist die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe von der Scheibenachse gesehen auch v , so ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{R}$. Das Trägheitsmoment der Scheibe ist $\Theta = \lambda m R^2 = \frac{1}{2} m R^2$. So ist der Energieanteil der Rotation

$E_{kin,rot} = \Theta \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot E_{kin,Forb}$, wo die kinetische Energie der Fortbewegung der Scheibe natürlich $E_{kin,Forb} = m \frac{v^2}{2}$ ist. So ist die Gesamtenergie

$E_{kin,G} = \frac{3}{2} \cdot m \frac{v^2}{2}$, das Anderthalbfache des sich nur fortbewegenden Körpers.

Bei rotierenden Maschinen wird meistens nicht nur der Anfahrvorgang, sondern auch der gleichmäßige Betrieb und das Bremsen bzw. freier Auslauf als einheitlicher, ganzer Prozess behandelt und sehr anschaulich in Diagrammen dargestellt.

- **Anfahrvorgang – t_A** : Der Rotationskörper wird von der Ruhe aus in Rotation versetzt.
- **Gleichmäßiger Betrieb – t_G** : Die Drehzahl des Rotationskörpers wird trotz Reibungsverluste konstant gehalten.
- **Bremsvorgang – t_B** : Die Drehzahl des Rotationskörpers wird wegen Reibung oder durch das zusätzliche Bremsmoment bis zum Halt verzögert.

Während des Anfahrvorgangs wird der Rotationskörper mit dem aktiven Antriebsmoment M_A beschleunigt, es wirkt jedoch das Reibmoment M_{Reib} dagegen, so wirkt nur die Differenz $M_A - M_{Reib}$ als beschleunigendes Moment, das eine Winkelbeschleunigung ε ermöglicht. Die Winkelgeschwindigkeit wächst vom Null auf ω_{Gleich} an.

Während des gleichmäßigen Betriebes wird der Rotationskörper mit dem aktiven Antriebsmoment M_{Gleich} angetrieben, dagegen wirkt das Reibmoment $M_{Reib} = M_{Gleich}$ dagegen, so ist die Differenz Null, $\varepsilon = 0$, die Drehzahl bzw. die Winkelgeschwindigkeit ω_{Gleich} bleiben konstant.

Während des Anhaltvorgangs wird der Rotationskörper mit dem Reibmoment M_{Reib} gebremst, es erfolgt eine Winkelverzögerung ε . Die Winkelgeschwindigkeit nimmt bis zum Stillstand ab. Um den Körper schneller bremsen zu können, braucht man ein aktives Bremsmoment M_{Brems} .

Die Leistung ist das Produkt des Momentes und der Winkelgeschwindigkeit ($P = M\omega$). Die Winkelgeschwindigkeit-Kennlinie ist stetig, aber das Drehmoment-Kennlinie hat Sprünge, so weist auch die Leistungskennlinie Sprünge auf.

Das orangefarbene Dreieck über dem Anfahrintervall ist die aktive Arbeit des Antriebs, die als kinetische Energie im Körper so lange gespeichert bleibt, bis im Anhaltvorgang diese Energie (das rechte Dreieck) wegen Reibung/Bremsen wieder verloren geht und in die Umgebung, als Wärme ausgestrahlt wird. Durch das zusätzliche Bremsmoment M_{Brems} wird der Rotationskörper in kürzer Zeit zum Stillstand gebracht. Die Bremsarbeit (grün schraffiertes Dreieck) ist aber identisch mit der des freien Auslaufs (orangefarbenes Dreieck).

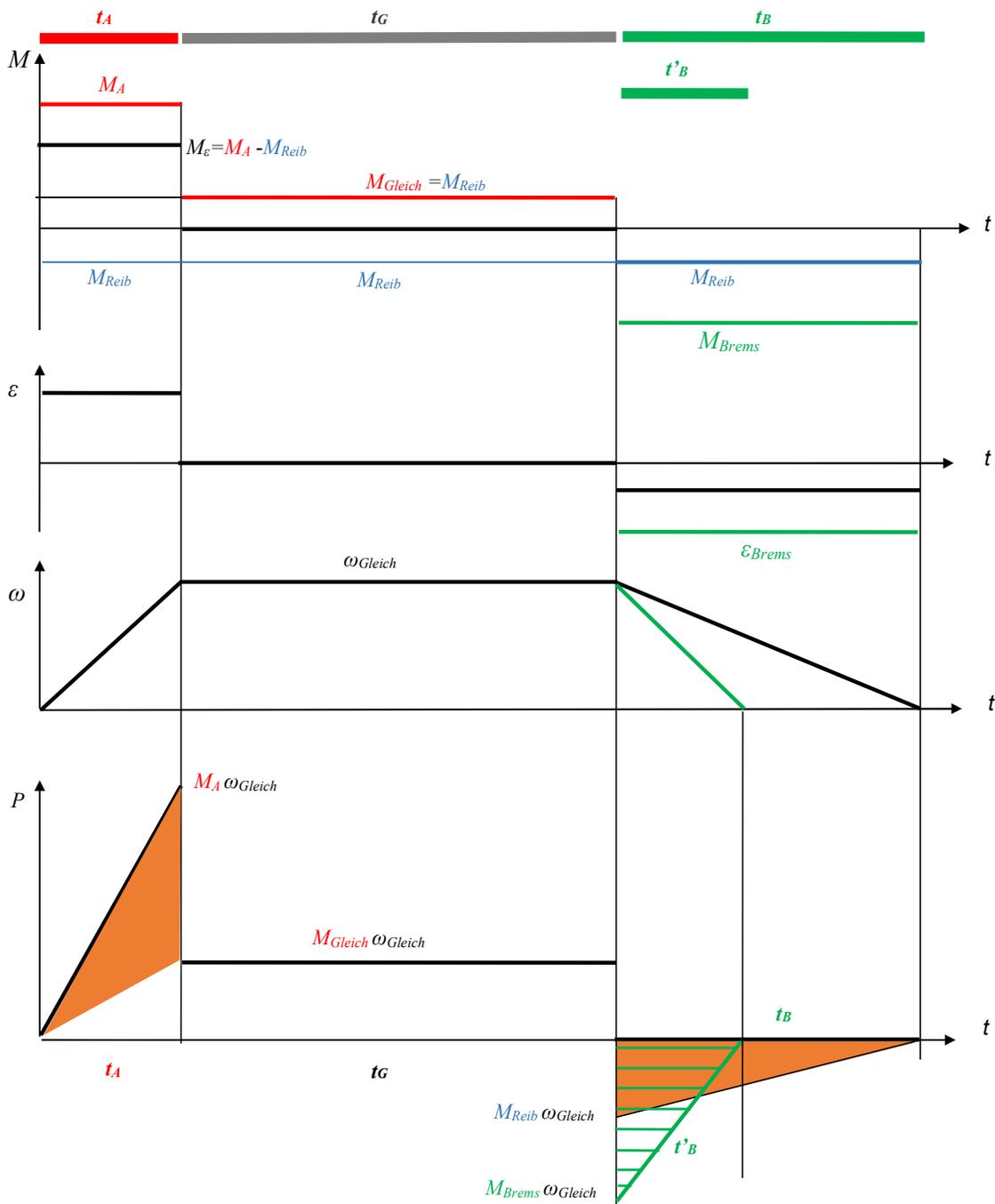


Bild 37 Anfahrvorgang, gleichmäßiger Betrieb, Bremsvorgang
 Drehmoment-, Winkelbeschleunigung-, Winkelgeschwindigkeit-, Leistung-Kennlinie
 über der Zeit aufgetragen

11. Kulissenantrieb, Kurbelantrieb, Kolbenpumpe

Die am häufigsten verwendeten Kraftmaschinen sind Elektromotoren, die ihre Leistung mittels einer rotierenden Welle abgeben. Diese Rotationsbewegung soll oft in lineare Bewegung umformt werden. Kulissenantriebe und Kurbelantriebe verwirklichen dieses Ziel. Der **Kulissenantrieb** besteht aus

1. einer an die rotierende Motorwelle befestigten **Kurbel**,
2. dem **Kulissenstein**, der sich entlang einer Kreisbahn
3. im **Kulissenrahmen** gleitend periodisch bewegt,
4. der **Kulissenstange**, der sich geradlinig,
5. in **Gleitlagern** hin und her bewegt.

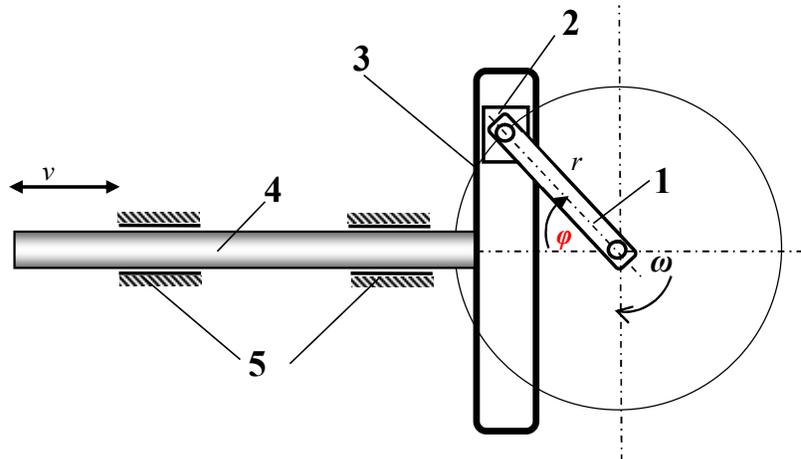


Bild 38 Kulissenantrieb

Der Bolzen im Kulissenstein bewegt sich an der Kreisbahn mit dem Radius r mit der Winkelgeschwindigkeit ω . So zeigt der Geschwindigkeitsvektor des Kulissensteins \mathbf{v} in Umfangsrichtung der Kreisbahn gerichtet. Ihr Betrag ist $|\mathbf{v}| = r\omega$. Die Kulissenstange bewegt sich mit der x-Komponente des Kulissensteins, v_x . Vom linken Totpunkt gemessen ist die Lage des Kulissensteins x .

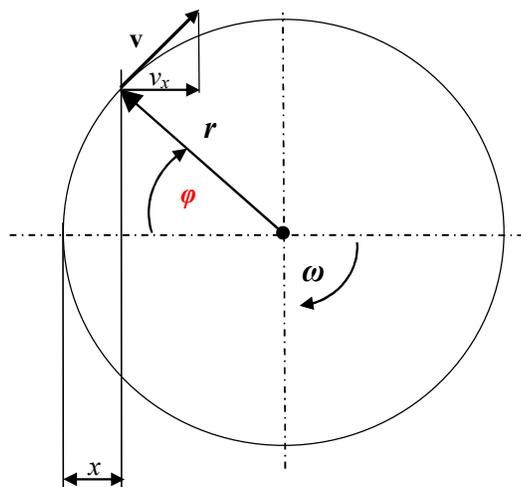


Bild 38 Kinematik der Bewegung des Kulissensteins

Es ist vom Bild 38 klar, dass im Zeitpunkt t der Kulissenstein mit der horizontalen Richtung den Winkel $\varphi = \omega t$ umschließt.

So ist $x = r - r \cos \varphi = r(1 - \cos(\omega t))$.

Wegen der Gleichheit der Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln ist

$$v_x = |\mathbf{v}| \sin \varphi = r\omega \sin(\omega t).$$

Die Zentripetalbeschleunigung des Kulissensteins kann auch berechnet werden. Man braucht ihren Wert, damit die die Bolzen beanspruchenden Kräfte berechnet werden können, $a_{zp} = r\omega^2$. Es ist weiter auch klar, dass sich die Kulissenstange mit der x -Komponente dieser a_{zp} beschleunigt:

$$a_x = a_{zp} \cos \varphi = r\omega^2 \cos(\omega t).$$

Die dimensionslosen Gleichungen der Kulissenbewegung sind also

$$\frac{x}{r} = 1 - \cos(\omega t), \quad \frac{v_x}{r\omega} = \sin(\omega t), \quad \frac{a_x}{r\omega^2} = \cos(\omega t).$$

Die Periodenzeit der Bewegung ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$, d.h. es genügt, die Bewegung nur für das Intervall $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} = T$ zu kennen.

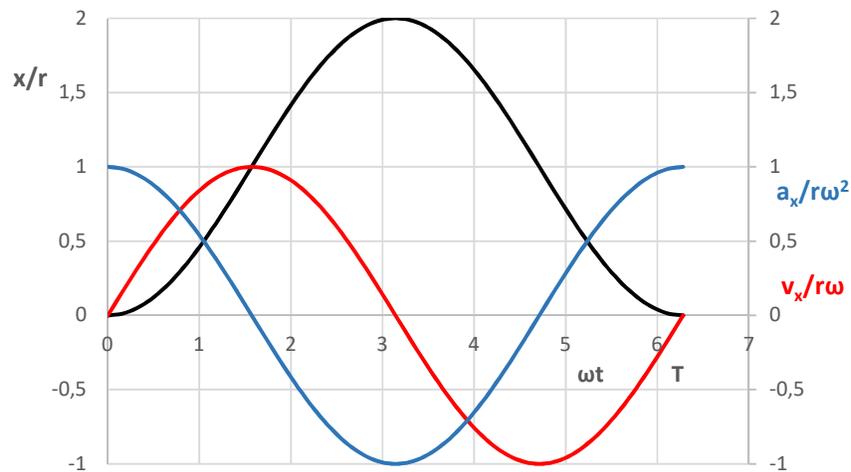


Bild 39 Bewegungsdiagramme des Kulissenantriebs in Abhängigkeit der Zeit

Anhand des Zusammenhangs zwischen den trigonometrischen Funktionen können die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auch als Funktion der Kulissensteinposition dargestellt werden.

Aus der Pythagoras Regel der trigonometrischen Funktionen folgt

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 = \left(\frac{v_x}{r\omega}\right)^2 + \left(\frac{r-x}{r}\right)^2.$$

Die umrahmte Formel ist die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen r und $r\omega$, vom Koordinatenursprung in x -Richtung um r verschoben. Die $a_x(x)$

Funktion ist linear. $\frac{a_x}{r\omega^2} = 1 - \frac{x}{r}$. Diese Funktionen sind im Bild 40 dargestellt.

$$\frac{a_x}{r\omega^2} = 1 - \frac{x}{r}$$

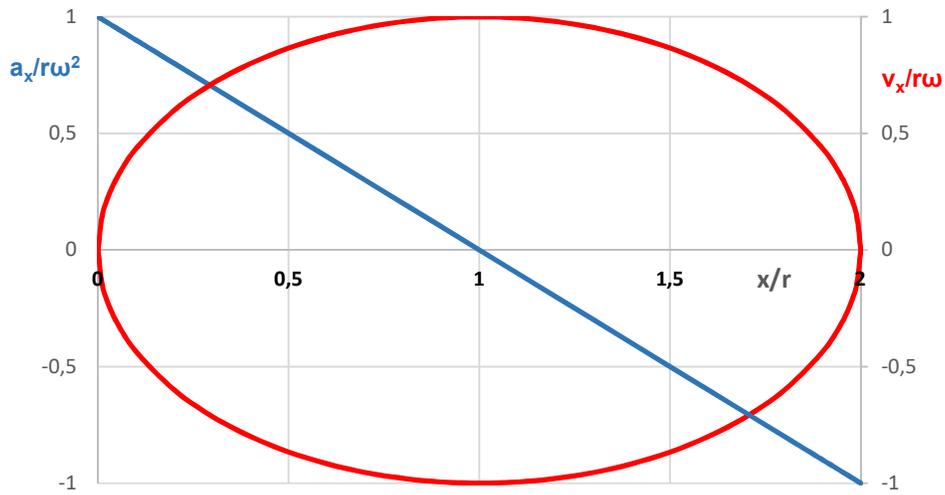


Bild 40 Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Position bei Kulissenantrieb

Beim **Kurbelantrieb** verbindet die Schubstange/Pleuel die Kurbel mit dem geradlinig bewegenden Maschinenelement (z.B. Kolben). Das eine Ende des Pleuels bewegt sich also entlang einer Kreisbahn, das andere Ende entlang einer Gerade alternierend hin und zurück. Die Bewegungsdiagramme sind im Bild 41, die Anordnung selbst im Bild 42 dargestellt.

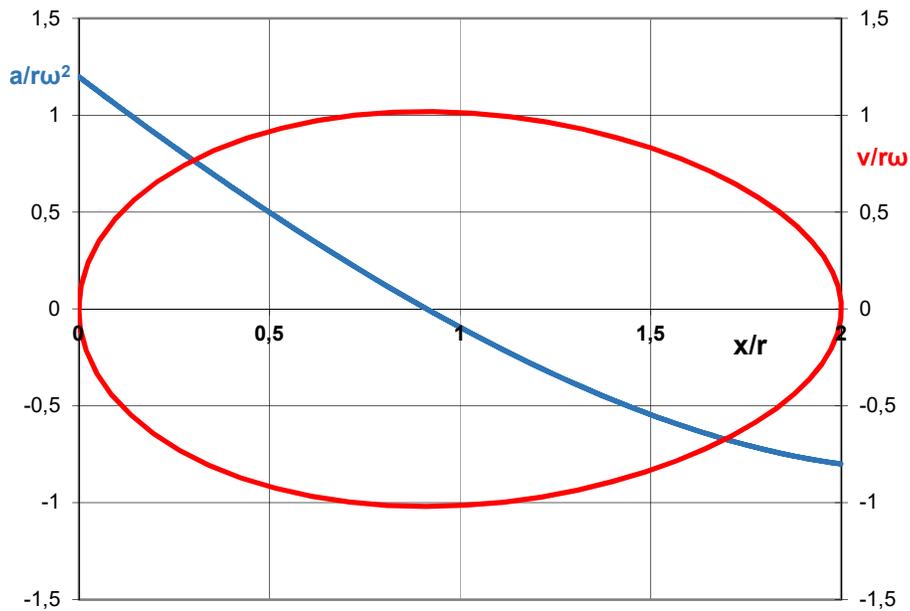


Bild 41 Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Position beim Kurbelantrieb
Das Verhältnis r/l ist im Bild 0,2

V gefördert. Der mittlere Volumenstrom ist $\bar{Q} = \frac{V}{T} = Vn = \frac{A_k \cdot s}{2\pi} \omega = \frac{A_k \cdot 2r\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi} A_k r \omega$. Der

maximale Volumenstrom ist $Q_{\max} \approx A_k r \omega$, weil die maximale Geschwindigkeit des Kolbens etwa die Umfangsgeschwindigkeit des im Bild mit einem roten Kreis markierten Kurbelbolzens gleich ist.

Der minimale Volumenstrom ist natürlich Null. So ist das Verhältnis $\delta = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{\bar{Q}} = \pi$. Die

Flüssigkeitsförderung ist sehr unausgeglich, ein Nachteil dieser Pumpenart. Der hohe δ -Wert kann durch Parallelschaltung mehrerer Zylinder deutlich reduziert werden.

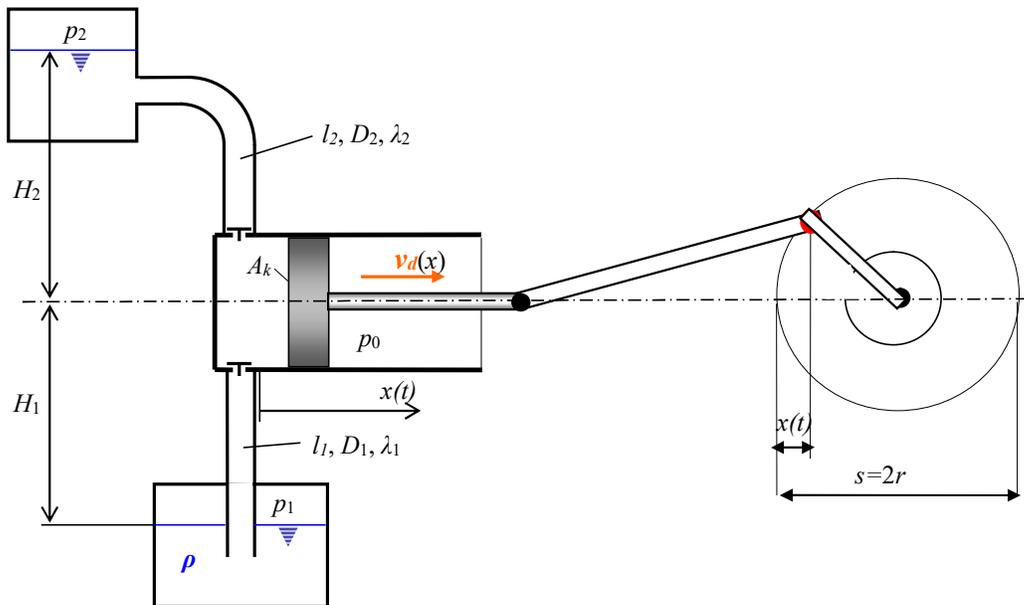


Bild 43 Kolbenpumpe mit einem Zylinder

Es wird vom unteren Behälter ins obere Behälter Flüssigkeit gepumpt.

Der Kolben ist durch das Kurbelgetriebe angetrieben

Die auf den Kolben wirkende Kraft beim Ansaugen der Flüssigkeit ist $F_s = A_k (p_0 - (p_1 - \rho g H_1))$.

Die auf den Kolben wirkende Kraft bei Verdrängung der Flüssigkeit ist $F_d = A_k (p_2 + \rho g H_2 - p_0)$.

Beide Kräfte müssen entlang des Schubes s wirken, so sind die Arbeiten

$$W = W_s + W_d = s A_k (p_0 - (p_1 - \rho g H_1) + p_2 + \rho g H_2 - p_0) = s A_k \rho g \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + H_1 + H_2 \right).$$

Der Ausdruck im Klammer heißt Förderhöhe, sie wird mit H bezeichnet: $H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + H_1 + H_2$.

Die Nutzleistung der Kolbenpumpe ist $P_{\text{Nutz}} = \frac{W}{T} = W \cdot n = n s A_k \rho g H = \bar{Q} \rho g H$.

Die Gesamtleistung ist wegen mechanischen, hydraulischen Verlusten und wegen des sogenannten Leckstroms durch Spalten höher. Der Pumpenwirkungsgrad erreicht, sogar überschreitet 80%.

Die Förderkurve der Kolbenpumpe ist im Bild 44 gezeichnet.

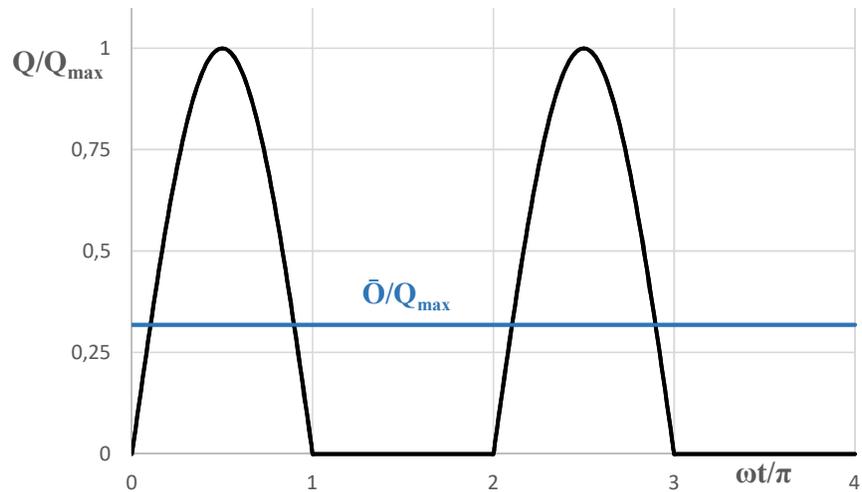


Bild 44 Förderstrom Diagramm einer Kolbenpumpe

Man beachte die große Differenz zwischen mittlerem und maximalem Volumenstrom!

Die Grundkennlinie einer Pumpe ist die $H - Q$ Kennlinie: es wird die Änderung der Förderhöhe über dem Volumenstrom im Diagramm aufgetragen. Die Kennlinie einer Kolbenpumpe ist im Bild 45 sowohl im Idealfall (dünne Gerade), als auch im realen Fall (dicke Linie) gezeigt.

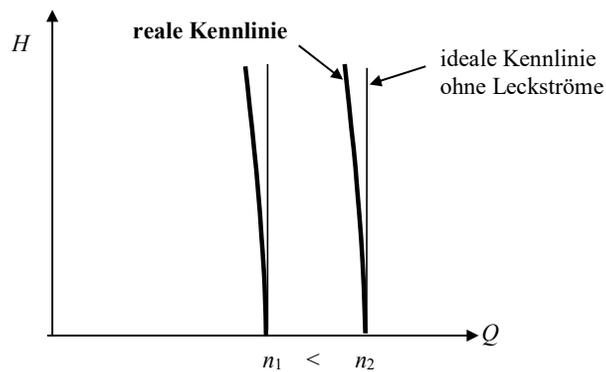


Bild 45 Ideale und reale $H(Q)$ Kennlinien einer Kolbenpumpe

Mit Erhöhung der Drehzahl verschiebt sich die Kennlinie zu größeren Volumenströmen

12. Grundlagen des Betriebes von thermischen Kolbenmaschinen, Vergaser, Indikatordiagramm

Fahrzeuge werden hauptsächlich mit Elektromotoren (Lokomotive, Straßenbahnen, PKW-s) oder mit Verbrennungsmotoren (Lokomotive, Schiffe, LKW-s und PKW-s) angetrieben.

Die zwei, am häufigsten verwendeten Motortypen sind die Ottomotoren und die Dieselmotoren. Die Tabelle 5 fasst die wesentlichsten Eigenschaften der zwei Motortypen zusammen.

Eigenschaft \ Typ	Ottomotor	Dieselmotor
Kraftstoff	Benzin	Dieselloil
Kompressionsverhältnis	1 : 7	1 : 18
Druck am Ende der Kompression	8 – 18 bar	30 – 50 bar
Temperatur am Ende der Kompression	400 – 600 °C	700 – 900 °C
Angesaugt wird	Brennstoff-Luft Gemisch	reine Luft
Zündung	Fremdzündung durch Funke	Selbstzündung
Zustandsänderung während Verbrennung	Isochor	Isobar
Maximale Temperatur	2000 °C	2000 °C
Abgastemperatur	hoch	geringer
Abgase enthalten	CO ₂	Ruß
Wirkungsgrad	25 %	33 %
Gewicht/Leistungs-Verhältnis	0,5 – 5 kg/kW	5 – 6 kg/kw
Preis	niedriger	höher
Allgemeine Vorteile	größerer nutzbarer Drehzahlbereich, sportlicheres Fahren	geringer Kraftstoffverbrauch, großes Drehmoment

Tabelle 5 Unterschiede zwischen Ottomotoren und Dieselmotoren

Die Arbeitsweise und die Zustandsänderungen der Viertakt-Verbrennungsmotoren sind bei beiden Motortypen:

- | | |
|---------------------------|-------------|
| 1. Takt: Ansaugtakt | Isobar |
| 2. Takt: Verdichtungstakt | Adiabatisch |
| 3. Takt: Arbeitstakt | Adiabatisch |
| 4. Takt: Auspufftakt | Isobar |

Der wesentliche Unterschied, wie schon in Tabelle 5 zu sehen ist, dass bei Ottomotoren – angezündet durch einen Funken – verbrennt sich der angesaugte Kraftstoff-Luft Gemisch explosionsartig, der Kolben bewegt sich kaum, so ändert sich das Zylindervolumen nur geringmässig, die Zustandsänderung ist deshalb *isochor*. Bei Dieselmotoren erwärmt sich die angesaugte reine Luft und der eingespritzte Kraftstoff wird durch die hohe Temperatur angezündet und verbrannt, dabei bleibt der Druck etwa konstant, d.h. der Verbrennungsprozess ist *isobar*.

Die Gemischbildung kann im Vergaser stattfinden, Professor Donát Bánki – er hat den Lehrstuhl für Hydrodynamische Systeme, damals Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen genannt, gegründet – patentierte vor etwa 100 Jahren den „Karburator“. Er besteht aus einem Kraftstoffbehälter der durch ein Ventil mit einem Mischraum verbunden ist. Der Luftstrom im Mischraum ist durch das Gaspedal geregelt, die Luft reißt Benzin mit und zerstäubt ihn gleich. Das Ventil öffnet sich durch einen

Schwimmer geregelt, wenn Benzin verbraucht wurde, so bleibt das Benzinniveau im Halsquerschnitt, wo die Luftgeschwindigkeit am höchsten ist, etwa gleich. Die Anordnung ist im Bild 46 zu sehen.

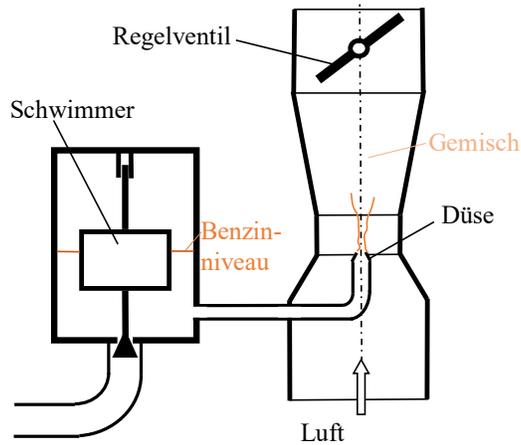


Bild 46 Vergaser

Die Zustandsänderungen des Gemisches im Zylinder während den vier Takten können im $p - V$ Diagramm dargestellt werden, hier bezeichnet p den Druck im Zylinder und V das momentane Volumen des Zylinders zwischen Kolben und Zylinderdeckel.

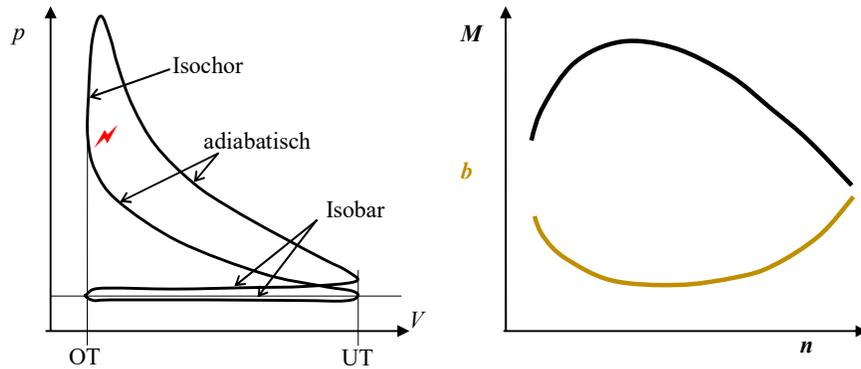


Bild 47 Indikatordiagramm des Ottomotors, Kennlinien

OT: oberer Totpunkt – Deckelseite, UT: unterer Totpunkt – Kurbelseite, ⚡: elektrischer Funke
Drehmoment (M), bzw. spezifischer Kraftstoffverbrauch (b) über der Drehzahl (n)

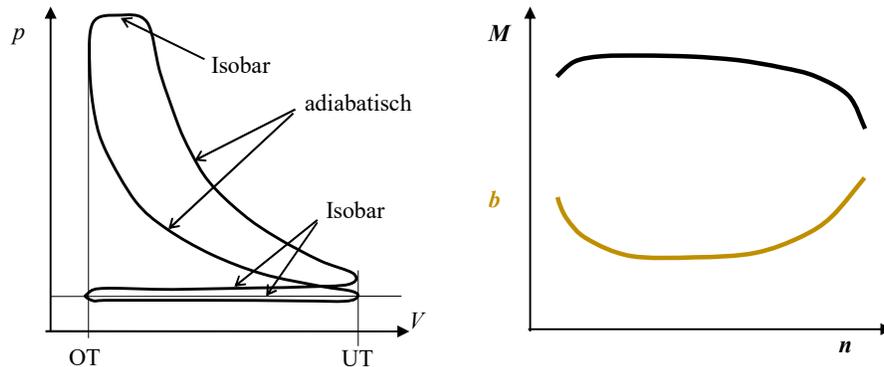


Bild 48 Indikatordiagramm des Dieselmotors, Kennlinien

OT: oberer Totpunkt – Deckelseite, UT: unterer Totpunkt – Kurbelseite

Drehmoment (M), bzw. spezifischer Kraftstoffverbrauch (b) über der Drehzahl (n)

13. Kennlinien, Betriebspunkt

In den häufigsten Fällen zeigen die Kennlinien von Kraftmaschinen den Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehzahl, oder Treibkraft und Fahrgeschwindigkeit. Es gibt jedoch bei Arbeitsmaschinen auch andere Darstellungen, wie z.B. die $H(Q)$ Kennlinie von Pumpen.

Handelt es sich um $M(n)$ Kennlinien von **Kraftmaschinen**, so können wir drei verschiedene Arten unterscheiden, diejenige,

1. die das **Drehmoment konstant** halten (z.B. Dieselmotoren),
2. bei denen die **Drehzahl erhalten bleibt** (z.B. asynchron Elektromotoren) und
3. die, wo sich die **Leistung näherungsweise nicht ändert** (z.B. Wasserturbinen).

Im Bild 49 sind diese Typen in der eben aufgezählten Reihenfolge mit den Nummern 1, 2 und 3 bezeichnet.

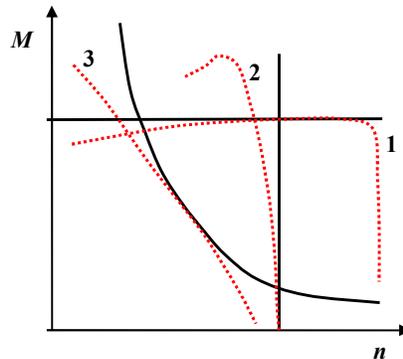


Bild 49 Die Grundtypen von Maschinenkennlinien

Durchgezogene Linie: **ideale Kennlinie**; rote punktierte Linie: **reale Kennlinie**

Da die Leistung zum Produkt des Drehmoments und der Drehzahl proportional ist, also $P \approx M \cdot n$, so folgt, dass $M \approx \frac{P}{n} = \frac{\text{Konstante}}{n}$, die $M(n)$ Kennlinie **3** ist also eine Hyperbel.

Arbeitsmaschinen haben teilweise andere Kennlinien. Das Drehmoment-Aufnahme einer Zentrifugalpumpe steigt mit der Drehzahl und zwar quadratisch über einen bleibenden (konstanten) Anteil. Ein Hebewerk oder eine hydrostatische Pumpe benötigt ein von der Drehzahl unabhängiges Drehmoment. Solche Kennlinien sind im Bild 50 dargestellt.

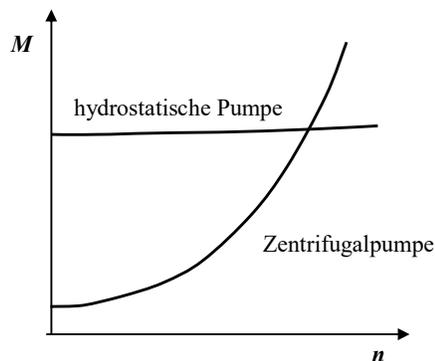


Bild 50 Arbeitsmaschinenkennlinien, Zentrifugalpumpe, hydrostatische Pumpe

Ein Maschinenaggregat besteht aus einer Kraftmaschine, die eine Arbeitsmaschine antreibt und eventuell auch noch aus Getrieben, damit die Drehzahl geändert werden kann. Im einfachen Fall wird die Arbeitsmaschine direkt angetrieben. Dann stellt sich ein Gleichgewicht mit einer Betriebsdrehzahl

ein, bei der die Drehmomentanforderung der Arbeitsmaschine und die Drehmomentabgabe der Kraftmaschine gleich sind. Wenn sich dieser Zustand auch bei kleinen Störungen erhalten bleibt, spricht man über einen stabilen **Betriebspunkt**. Wenn das nicht der Fall ist, ist der Betriebspunkt instabil. Im Bild 51 sind die Kennlinien einer Zentrifugalpumpe und die des sie antreibenden asynchron Elektromotors dargestellt. Der Betriebspunkt ist der Schnittpunkt beider Kennlinien.

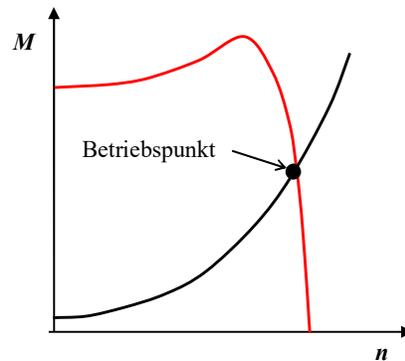


Bild 51 Stabiler Betriebspunkt des **Zentrifugalpumpe-Elektromotor** Aggregats

Der im Bild 51 gezeigte Betriebspunkt ist stabil, da bei kleinen Störungen, die z.B. eine kleine Drehzahlerhöhung zur Folge haben, fällt das Antriebsmoment des Elektromotors und wächst die Drehmomentaufnahme der Pumpe, so kann die erhöhte Drehzahl nicht erhalten werden, sie fällt zurück. Bei primärem Drehzahlabfall gibt es dagegen einen Drehmomentüberfluss von der Seite des Motors, die rotierenden Maschinenteile beschleunigen sich wieder.

Im Bild 52 zeigen wir ein Beispiel, wo eine Zentrifugalpumpe – als Kraftmaschine – durch einen Filterblock – als Arbeitsmaschine in einen Hochdruckbehälter Flüssigkeit fördert. Die zwei $H(Q)$ (Förderhöhe–Volumenstrom) Kennlinien, sowie ein **stabiler** und ein **labiler** Betriebspunkt sind im Bild gezeigt.

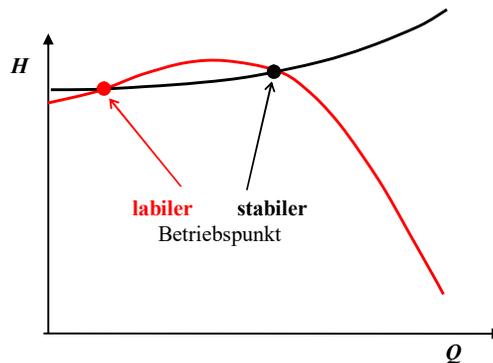


Bild 52 Stabiler und labiler Betriebspunkt des **Zentrifugalpumpe Filter-Behälter** Systems

Wenn man bedenkt, dass die Förderhöhe H eigentlich eine auf den Flüssigkeit-Gewichtstrom bezogene spezifische hydraulische Leistung bedeutet und der Volumenstrom Q zum Gewichtstrom proportional ist, so ist es klar, dass es sich hier auch um ein energetisches Gleichgewicht handelt. Als Folge von kleinen Störungen kann sich der Volumenstrom z.B. erhöhen. Damit der Betriebspunkt stabil wird, soll die Förderhöhe der Pumpe weniger anwachsen, als die Förderhöhenanforderung des Filters, oder sie soll sogar abfallen.

14. Anwendung des Impulssatzes an strömende Flüssigkeiten

Das zweite Axiom von Newton kann als der Zusammenhang zwischen wirkende Kraft und Beschleunigung formuliert werden, $m = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{a}}$, oder als ein Zusammenhang zwischen der Kraft und der

durch sie erzeugten zeitlichen Änderung des Impulses ($\mathbf{I} = m\mathbf{v}$), $\sum \mathbf{F}_K = \frac{d\mathbf{I}}{dt}$. Die zweite

Formulierung ist allgemeingültiger, da sie nicht nur für Körper mit konstanter Masse gilt, sondern auch an strömende Flüssigkeiten angewendet werden kann. Es können auch mehrere Kräfte wirken, das Summenzeichen Σ weist darauf hin.

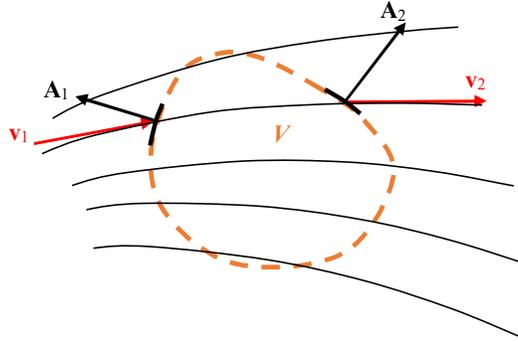


Bild 53 Schematisches Bild für die Anwendung des Impulssatzes

Bei strömenden Flüssigkeiten wird der Impulssatz auf ein Kontrollvolumen V aufgeschrieben.

An den Oberflächenstücken A_i strömt die Flüssigkeit mit Geschwindigkeit \mathbf{v}_i in das, oder aus dem Volumen.

Das Flächenelement A_i ist ein Vektor, der immer aus dem Volumen hinaus gerichtet ist und dessen Betrag dem Flächeninhalt des Elementes gleich ist.

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v}_i ist die mittlere Geschwindigkeit durch das Flächenelement A_i . Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist tangential zur Strömungsrichtung, d.h. sie zeigt in das Volumen V beim Einstromung und hinaus aus dem Volumen bei Ausströmung.

Bei endlich vielen Ein- und Ausströmungen gilt $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \sum_i \dot{m}_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \rho (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i)$.

Definieren wir als Impulskraft, die zum Flächenelement A_i gehört als \mathbf{F}_{fi} :

$$\mathbf{F}_{fi} = -\mathbf{v}_i \rho (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i).$$

Man merke das negative Vorzeichen!

Die äußeren Kräfte \mathbf{F}_A die auf das Flüssigkeitsvolumen wirken, ergeben sich aus Drücken, diese Kraft zeigt immer in das Volumen V oder sie können als Wirkung mancher festen Körper betrachtet sein.

Die Bedingung der stationären Strömung ist, dass die Summe aller Kräfte Null sein soll,

$$\sum \mathbf{F}_A + \sum_i \mathbf{F}_{fi} = 0.$$

Die Anwendung des Impulssatzes wird **an Beispielen** erläutert.

In den Beispielfällen wird immer vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit ins Volumen durch solche Querschnitte ein- oder austritt, die senkrecht zur Strömungsrichtung sind, $(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \mp A_i v_i$, so sind Flächenvektor und Geschwindigkeitsvektor parallel und beim Einstromen entgegengerichtet, beim Ausströmen gleichgerichtet.

Dann ist $\mathbf{F}_{fi} = \pm \rho A_i v_i^2$, das positive Vorzeichen gilt beim Ein-, das negative Vorzeichen beim Ausströmen. Dadurch zeigt \mathbf{F}_{fi} immer ins Innere des Volumens V .

1. **Beispiel** Welche Kraft wirkt auf einen horizontalen 90° Krümmer, durch den Wasser mit 2 m/s Geschwindigkeit strömt, und dessen Durchmesser 100 mm ist? Der Wasserdruck im Krümmer ist 0,1 bar Überdruck. Das Wassergewicht soll vernachlässigt werden.

Lösung:

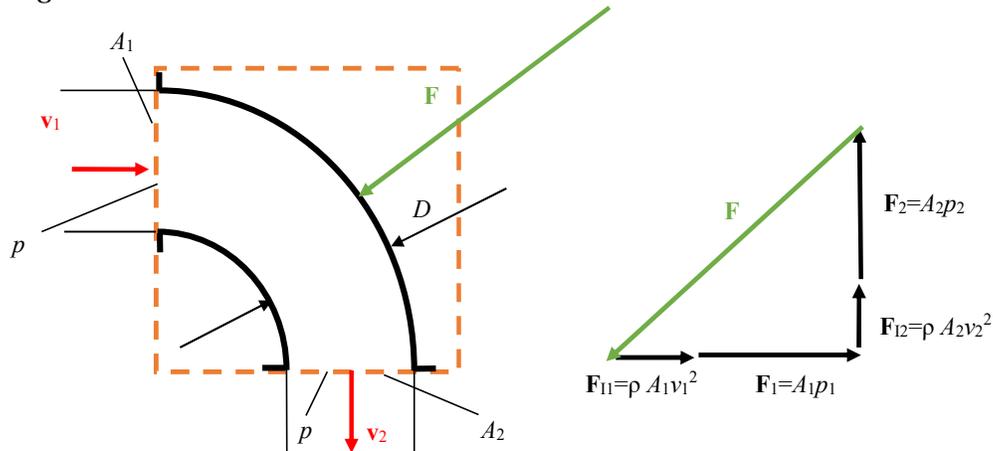


Bild 54 Kräfte die auf den Krümmer wirken

Das Wasser tritt an den Schnittflächen des Krümmers und des Kontrollvolumens ein und aus.

Der Rohrquerschnitt ist $A_1 = A_2 = \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{0,1^2 \pi}{4} = 0,00785 m^2$, so sind die Beträge der

Impulskräfte $F_{I1} = \rho A_1 v_1^2 = 1000 \cdot 0,00785 \cdot 2^2 = 31,4 N$ und $F_{I2} = \rho A_2 v_2^2 = 31,4 N$.

Die Beträge der Druckkräfte sind gleich, $F_1 = A_1 p = 0,00785 \cdot 10000 = 78,5 N$ und $F_2 = 78,5 N$. Die Richtungen der Kräfte sind im Vektorpolygon im Bild 54 zu sehen. Kraft **F** ist im Gleichgewicht mit diesen Kräften, ihre Größe ist

$$F = \sqrt{(31,4 + 78,5)^2 + (31,4 + 78,5)^2} = \underline{\underline{155,4 N}}.$$

Diese Kraft ist durch die Verbindungsschrauben an den Krümmer-Flanschen gesichert.

2. **Beispiel** Welche Kraft muss auf eine Düse wirken, die am Ende des Rohres mit 100 mm Durchmesser befestigt ist, und die auf 50 mm verengt ist? Das Wasser strömt in die Düse mit 2 m/s Geschwindigkeit ein und tritt ins Freie, so herrscht dort atmosphärischer Druck, d.h. 0 bar Überdruck. Das Wassergewicht soll vernachlässigt werden!

Lösung:

Der Impulssatz wird auf das, im Bild 55 mit gestrichelter Linie brandete Kontrollvolumen angewendet. Es wirken zwei Impulskräfte, **F_{I1}** und **F_{I2}**, eine Druckkraft, **F_{p1}** und die in den Verbindungsschrauben wirkende Kraft **F**. Da beim Ausströmen der Überdruck 0 ist, wirkt dort keine Druckkraft.

Es sind jedoch weder die Austrittsgeschwindigkeit noch der Eintrittsdruck bekannt. Diese müssen mit der Kontinuitätsgleichung und mit der Bernoulli Gleichung bestimmt werden.

$A_1 v_1 = A_2 v_2$, von hier ist $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$. Damit gilt

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = 0 + \frac{\rho}{2} v_2^2 = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2, \text{ d.h. } p_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right].$$

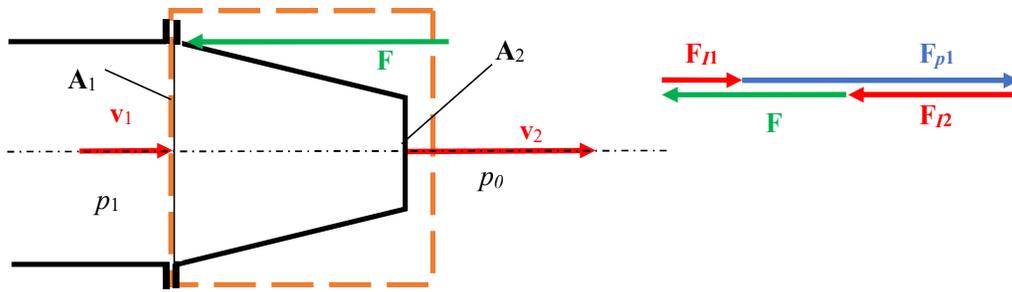


Bild 55 Auf eine Düse wirkende Kräfte

Die Krafrichtungen sind im Bild zu sehen, ihre Größen sind

$$F_{I1} = \rho A_1 v_1^2; \quad F_{I2} = \rho A_2 v_2^2 = \rho A_1 v_1^2 \frac{A_1}{A_2}; \quad F_{p1} = p_1 A_1 = \rho A_1 v_1^2 \frac{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}{2}.$$

Addiert man die drei Kräfte mit den gültigen Vorzeichen und klammert man das gemeinsame Glied aus, bekommt man

$$F = -(F_{I1} + F_{p1} - F_{I2}) = -\rho A_1 v_1^2 \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}{2} - \frac{A_1}{A_2} \right\} = -\rho A_1 v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right) \left(1 - \frac{\frac{A_1}{A_2} + 1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \rho A_1 v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right)^2 = -\frac{1}{2} 1000 \cdot 0,00785 \cdot 2^2 (4 - 1)^2 = \underline{\underline{-141N}}$$

Man erkennt gleich, dass das Vorzeichen des Ergebnisses vom Flächenverhältnis der beiden Querschnitte unabhängig ist, ihre Richtung ist immer zur Kraft F_{I1} entgegengesetzt, zeigt also im Sinne der im Bild 55 gezeichneten Kraft F . Die Haltekraft ist durch Schrauben gesichert.

3. **Beispiel** Welche Stützkraft F ist notwendig, damit eine senkrecht gestellte, ebene Platte in Position gehalten werden kann, wenn ein horizontaler Wasserstrahl mit 5m/s Geschwindigkeit und 4 cm^2 Querschnitt gegen die Platte stößt? Wie ändert sich die Kraft, wenn sich die Stauplatte mit Geschwindigkeit $u = 1\text{ m/s}$ entfernt?

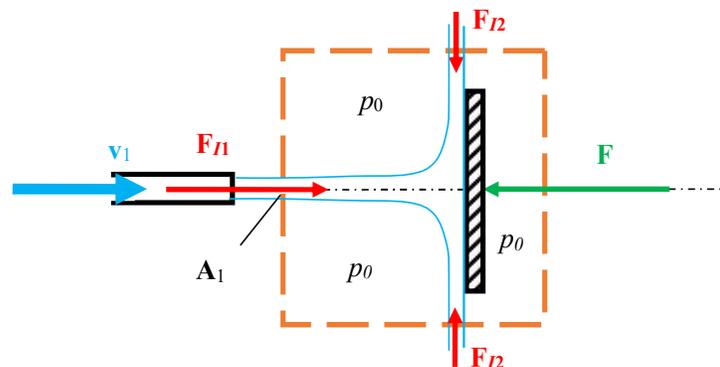


Bild 56 Die auf eine, gegen einen Wasserstrahl gestellte Platte wirkenden Kräfte

Im Bild 56 sieht man, dass sich die Impulskräfte des ringsherum austretenden Wassers ausgleichen, weiterhin hat dieser Wasserfilm auch keine in Fließrichtung gestellten

Kraftkomponente. So ist $F_{I1} + F = 0$, daraus folgt $F = -F_{I1} = \rho A_1 v_1^2$, die Krafrichtung ist im Bild eingetragen. $F = 1000 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5^2 = \underline{10N}$. Die Platte muss mit dieser Stützkraft gehalten werden.

Wenn sich die Platte mit Geschwindigkeit u bewegt, bleibt die Strömung innerhalb des Kontrollvolumens nicht mehr stationär. So soll auch das Kontrollvolumen mit Geschwindigkeit $u = 1 \text{ m/s}$ bewegt werden. Dadurch tritt der Wasserstrahl ins Kontrollvolumen mit der Geschwindigkeitsdifferenz $v_1 - u$ ein. Das aus dem bewegten Kontrollvolumen austretende Wasser hat auch jetzt keine in Strahlrichtung zeigende Impulskraft.

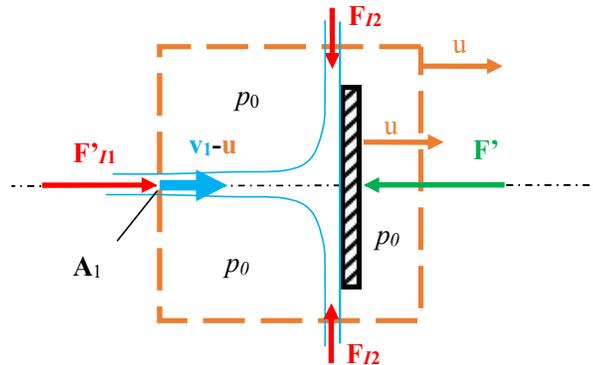


Bild 57 Kräfte, die auf eine bewegte Platte wirken

Die benötigte Stützkraft ist jetzt $F' = \rho A_1 (v_1 - u)^2 = 1000 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (5 - 1)^2 = \underline{6,4N}$.

Wenn mit der Stauplatte ein kleiner Wagen getrieben wird, dann ist die Leistung des treibenden Wasserstrahles $P = F' \cdot u = \rho A_1 (v_1 - u)^2 \cdot u$. Diese Leistung ist Null, wenn der Wagen steht, oder wenn er sich mit der Strahlgeschwindigkeit v_1 rollt, dann ist nämlich $v_1 - u = 0$.

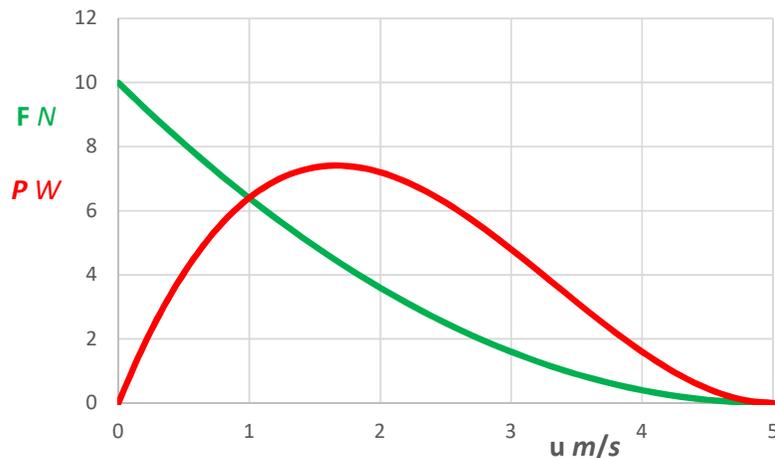


Bild 58 Auf eine bewegte Stauplatte wirkende **Kraft** und ihre **Leistung**, als Funktion der Fahrgeschwindigkeit

- Beispiel** Ein in einen Fluss getauchtes, unten benetztes Wasserrad besteht aus herumdrehenden Schaufeln. Wenn die Umfangsgeschwindigkeit der Schaufeln u , ihre Oberflächen A sind, dann ist die Situation ähnlich zu der im Beispiel 3. Es gibt aber einen **wesentlichen Unterschied**. An die Stelle der fortschreitenden Schaufeln tritt immer eine neue Schaufel, so muss das in den Fluss getauchte Kontrollvolumen nicht bewegt werden. Der Fluss strömt mit Geschwindigkeit v in das Kontrollvolumen ein, wird gebremst und verlässt

es mit Geschwindigkeit $u \leq v$, gleichzeitig wird das Wasser auch seitlich verdrängt, was aber keine Impulskraft erzeugt. Die Anordnung ist im Bild 59 dargestellt.

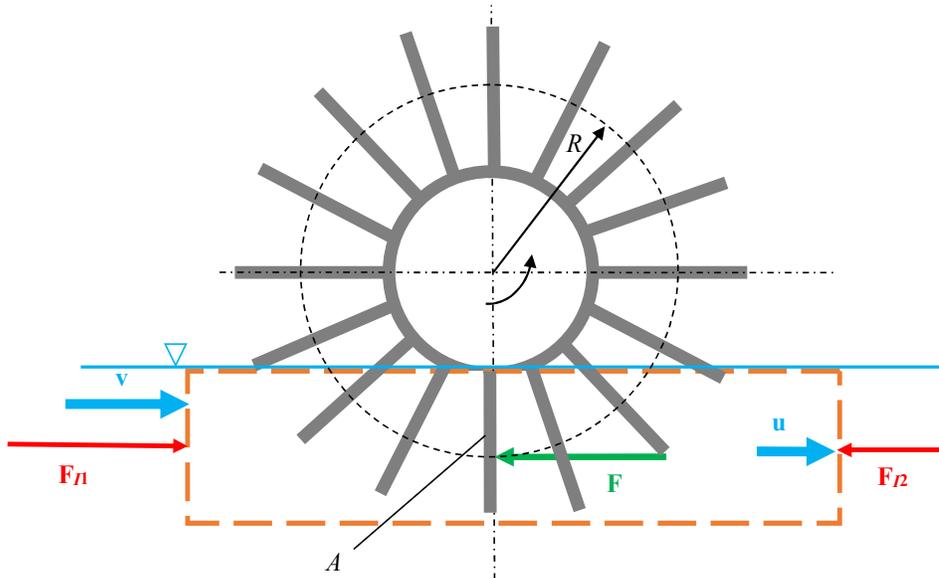


Bild 59 Kräfte, die auf die Schaufel eines Wasserrades wirken

Die Impulskraft des ins Kontrollvolumen eintretenden Wassers ist $F_{I1} = \rho A v \cdot v$.

Die Impulskraft des vom Rad wegströmenden Wassers ist $F_{I2} = \rho A v \cdot u$.

Die das Wasser aufstauende Kraft ist $F = F_{I1} - F_{I2} = \rho A v \cdot (v - u)$.

Leistung des Wasserrades: $P = F \cdot u = \rho A v (v - u) \cdot u$.

Jetzt fällt die Kraft linear mit der Umfangsgeschwindigkeit des Wasserrades.

Die Leistung ist bei $u = 0$, bzw. bei $u = v$ null.

Das Maximum der Leistung wird bei $\frac{dP}{du} = \rho A v \frac{d(vu - u^2)}{du} = \rho A v (v - 2u) = 0$, also **bei**

$u = \frac{v}{2}$ **erreicht.**

Das Drehmoment des Wasserrades mit mittlerem Radius R ist

$M = R \cdot F = R \cdot \rho A v \cdot \left(v - R \frac{2\pi}{60} n \right)$, also tatsächlich eine fallende Gerade im $M - n$

Diagramm, wie wir es im Bild 49, punktierte Linie 3, gesehen haben.