0. mérés

A MÉRNÖK MÉR

1. Bevezetés

A mérnöki ismeretszerzés egyik klasszikus formája a *mérés*, és a mérési eredményekből levonható következtetések feldolgozása (a „mérnök” és a „mérés” szó közötti kapcsolat nyilvánvaló). A Gépészmérnöki alapismeretek tárgy első gyakorlatának az a célja, hogy ezt az ***alapvető mérnöki módszert*** megmutassa azoknak a hallgatóknak, akik most kezdik el tanulmányaikat a Műegyetemen.

Ezt az ismeretszerzési folyamatot egy jól ismert fizikai jelenség, az ún. „matematikai inga” lengési folyamatának vizsgálatával fogjuk Önöknek megmutatni,

Valószínűleg Önök közül sokaknak ez az első alkalom, hogy egy fizikai folyamat valamely jellemzőjét meg kell mérni, a mérést ki kell értékelni és az eredményekből következtetést kell levonni. Ezért részletesen be fogjuk mutatni, és Önökkel együtt végig fogjuk csinálni

- a mérési folyamat egyes lépéseit,
- a kiértékelés számítási és grafikonrajzolási fázisait,
- az eredmények elemzésének és a következtetés levonásának lehetséges módjait
- és (ez fontos) a mérés dokumentálását, a mérési jegyzőkönyv egyes részleteinek elkészítését is.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a mérési útmutató, eltérően a további mérés leírásoktól, többletinformációkat is tartalmaz az érdeklődő hallgatók számára. Ezek kisebb betűvel szedve, az adott szakasz megfelelő helyén bekeretezve találhatók.

Az első mérési gyakorlat teljesítéséhez sok sikert kívánnak a Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék munkatársai.

2. A mérés célja

A matematikai (vagy fonál-) inga lengésidejét leíró összefüggés felállítása mérési adatok alapján.

A ***matematikai inga*** *egy* ***L*** hosszúságú súlytalan fonálon lengő ***m*** tömegű tömegpont.

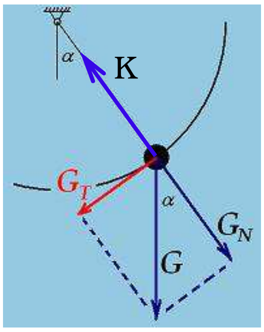
A gyakorlatban az inga ***L* hosszán** a felfüggesztési pont és a lengő test súlypontjának távolságát értjük. A laboratóriumban használt henger alakú súlyok esetén a súlypont a tengelyre esik (jó közelítéssel) a henger félmagasságában. Ezt a helyet a súlyokon egy körbefutó a testbe vésett vonal jelöli.

Az inga lengésének **periódusideje** az az idő, ami alatt a lengő test két egymást követő azonos (pl. szélső) kitérési állapotába tér vissza a lengés során. Mivel a szélső helyzetben a test sebessége nulla, ez igen jól megfigyelhető és mérhető helyzete a testnek.

3. A mérés előkészítése

A mérések (mind az egyetemen, mind az ipari gyakorlatban) általában sok időt és pénzt igényelnek. Fel kell építeni a laboratóriumban a berendezést (idő, pénz), a berendezést műszerezni kell (pénz), a mérést el kell végezni (idő), majd az eredményeket ki kell értékelni (idő). Így fontos, hogy a mérést előre megtervezzük, azonosítsuk a fontos és kevésbé fontos mennyiségeket, hiszen ezzel sok energiát takaríthatunk meg. Mielőtt tehát elkezdenénk a mérést, gondoljuk végig, hogy milyen ismeretek állnak rendelkezésünkre!

Az inga lengését a Newton-féle mozgásegyenletek írják le, használjuk a mellékelt ábra



jelöléseit! A testet gyorsító G_T tangenciális (vagy érintőirányú) erő a test G súlyából G_T=G·sin(α) módon számítható, ahol G=m·g. Felírva az említett Newton-törvényt, a testet gyorsító G_T erő és a test pályairányú gyorsulása: m·a_T=G_T, azaz

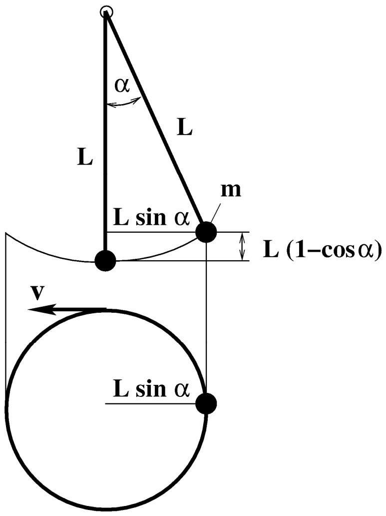
$$ma_T = mg\sin(\alpha)\,.$$

Mivel a tömeggel egyszerűsíthetünk, levonhatjuk a következtetést, hogy **a tömegpont tömege nem befolyásolja a tangenciális gyorsulást és ezzel együtt az inga lengésidejét**. Ez a mérés szempontjából igen fontos megállapítás, hiszen így elég egyetlen tömeggel elvégezni a méréseket. Ha az elmélet ellenőrzésének érdekében mégis több tömeggel végzünk méréseket, már a mérés megkezdésekor tudjuk, hogy milyen eredményre számíthatunk.

A mérés megtervezésére visszatérve, gondoljuk csak meg, mennyi időnkbe került volna a laboratóriumban „kimérni" ezt az eredményt!

Középiskolai tanulmányokból ismert, hogy egy fonálinga ***T*** periódusidejének (1) összefüggésében szerepel a ***g*** gravitációs térerősség, a ***π*** és az inga ***L*** hossza:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$



A ***matematikai inga*** *egy* súlytalan és nyúlhatatlan, ***L*** hosszúságú fonálon lengő ***m*** tömegű tömegpont. A légellenállást és a felfüggesztésnél ébredő súrlódást elhanyagoljuk. A kitérés szöge „kicsi" (lásd később).

Az alábbiakban a matematikai inga lengésidejének egy lehetséges levezetését ismertetjük. Az ***energia-megmaradás törvénye*** értelmében az inga helyzeti és mozgási energiájának összege (veszteségmentes esetben) állandó.
Teljesen kitérített helyzetben csak $E_h = mgL(1-\cos\alpha)$ helyzeti energiája, legalsó helyzetében pedig csak $E_m = mv^2/2$ mozgási energiája van. A kettő megegyezik, melyből a tömeggel való egyszerűsítés és átrendezés után adódik:

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}\ .$$

Tapasztalat szerint jó közelítés, hogy az inga árnyéka együtt mozog egy $L\sin\alpha$ sugarú, függőleges körpályán állandó v sebességgel mozgó pont árnyékával (ld. ábra). A forgómozgás szögsebessége tehát

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}{\sqrt{L^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}\frac{g}{L}}\ .$$

A teljes kör körbefutásának periódusideje és a fentiek értelmében az inga lengésideje:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}}\ .$$

Az $\alpha = 2\beta$ helyettesítést bevezetve és az $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ és $\cos\alpha = \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ***trigonometriai azonosságok***at egymásból kivonva kapjuk, hogy $1-\cos\alpha = 2\sin^2\beta$, mellyel $\underline{2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\beta}$.

Szintén ismert azonosság, hogy $\sin\alpha = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, amiből kapjuk, hogy $\underline{\sin^2\alpha = 4\sin^2\beta\cos^2\beta}$.

Mindezeket beírva a lengésidő képletébe, adódik, hogy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{4\sin^2\beta\cos^2\beta}{4\sin^2\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\cos^2\beta} \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

A közelítés abban az esetben jó, ha $\cos\beta \approx 1$, azaz β és ebből következően α ***kicsi***. ($\alpha = 10^\circ$ -nál kisebb szögek esetén a hiba 1,5 % -nál kisebb.)

A ***fizikai ingá***ról kiterjedéssel bíró, merev test egy adott, nem a test súlypontján átmenő forgástengely körüli lengésekor beszélhetünk. A szögkitérés itt is kicsi és a veszteségeket itt is elhanyagoljuk. Fizikai inga pl. egy motor forgórészéből és hozzákapcsolt póttömegből álló rendszer, vagy „krumpli kötőtűvel átszúrva".

Az összefüggésben T [s] az L [m], g [m/s²] mértékegységű mennyiség. A mérés során az egyik feladat ennek az összefüggésnek mérések alapján történő felállítása lesz.
Ha megnézzük, milyen kapcsolat van T és L között, akkor láthatjuk, hogy ez egy hatványfüggvény, ugyanis a fenti egyenlet írható

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} = A \cdot L^b \qquad (2)$$

alakban, ahol ***A*** és ***b*** egy-egy konstans. Feladatunk a mért adatokból ***A*** és ***b*** értékét és azok mértékegységeit meghatároznunk. Ehhez először végezzük el a mérést!

4. Az elvégzendő mérési feladatok

4.1 Különböző hosszúságú ingák és azonos lengő tömegek esetén lemérjük az inga lengésének periódusidejét.

4.2 Azonos hosszúságú ingák és különböző lengő tömegek esetén lemérjük az inga lengésének periódusidejét.

A gyakorlatvezető megmutatja az inga állványát, amelyre a különböző hosszúságú fonalak függeszthetők, végükön kis kampókkal és forgókapcsokkal, amelyekkel az állványhoz és a súlyokhoz rögzíthetőek a fonalak. A használt fonál fonott horgászzsinór, amely nagyon kis mértékű megnyúlást enged meg, emellett igen kis átmérőjű és tömegű. A zsinórt az állványhoz rögzítve, majd a tömegeket a zsinór másik végére függesztve elkezdhető a mérés. A mérést végző személy(ek) stopperórával megmérik a (max. 5°-ra) kitérített inga **minimum 20 teljes lengés**ét. A lengések számlálását nullával kezdjük, amikor elengedjük a kitérített tömeget. Amikor a test visszalendül a kiindulási helyzetébe és újra kezd egy újabb lengést, akkor eggyel növeljük (akár hangosan kimondva) a lengések számát (célszerűen: „null-egy-két-há-négy-öt-hat-…stb…”). Fontos, hogy a stopperórát akkor indítsuk, amikor a testet elengedjük és akkor állítsuk meg, amikor már elegendő számú lengés után éppen visszalendül a kiinduló helyzetébe. Ezért ugyanaz a személy végezze az idő mérését és az inga elindítását és figyelését. Ha párban végzik a mérést, egy mérés után cserélhetnek és ugyanazt az ingát a kollegájuk is mérje le egy alkalommal (pl.: több lengetést végezve). A mért adatokat (L: inga hossza, m: lengő test tömege, n: a számlált teljes lengések száma, $n*T$: a számlált teljes lengések összes lengésideje) a következő táblázat első négy üres oszlopában rögzítsék:

	Mért adatok				Számított adatok		
Sorszám	*L*	*m*	*n*	*n*T*	*T*	*logL*	*logT*
[-]	[m]	[g]	[-]	[s]	[s]	[-]	[-]
1							
2							
…							
12							

A táblázat utolsó négy oszlopát a mérés kiértékelése során, gyakorlatvezető segítségével a csoport közösen tölti ki. A mért adataikat a gyakorlatvezetőnek hangosan is be kell diktálniuk a mérés végén, hogy esetleges hiányzás esetén is rendelkezésre álljon az összes mért adat.

5. A mérési eredmények kiértékelése

5.1 A keresett együtthatók számértékének meghatározása

A bevezetőben szerepelt, hogy a keresett kapcsolat hatványfüggvény, amelyben szereplő két állandót (A és b) kell meghatároznunk a mért adatokból. Ehhez 5 ingán mért 10 adatsor áll rendelkezésre. A (2) egyenletet logaritmálva olyan alakú összefüggést kapunk, amely egy egyenes egyenlete:

$$\log T = \log A + b \cdot \log L \tag{3a}$$

Látható, ha bevezetjük az $x = \log L$ és $y = \log T$ változókat, valamint az $a = \log A$ jelöléseket, akkor a fenti (3a) egyenlet

$$y = a + b \cdot x \tag{3b}$$

alakban írható, ami az x-y koordinátarendszerben egy egyenest leíró egyenlet. A hiányzó együtthatók (a tengelymetszet (*a*) és a meredekség (*b*)) az egyenes felrajzolása után grafikus módszerrel meghatározhatóak. Mivel csak a logaritmált változók között ($y = \log T$ és $x = \log L$) igaz a lineáris kapcsolat, ezért a mérési táblázat utolsó oszlopaiban ki kell számítanunk ezeket az értékeket és ezeket a pontokat ábrázoljuk közös koordinátarendszerben.

A gyakorlatok során a diagramokat **A4-es méretű mm-papírra** kérjük elkészíteni **ceruzával**, esetlegesen **színeket alkalmazva** a különböző mennyiségek megkülönböztetéséhez.

A diagram legfontosabb részei a **tengelyek, megfelelő skálaosztással** és a skálaértékek növekedését jelölő **nyíl**lal, a **skálafeliratok**, a tengelyen szereplő **mennyiségek jelölése**, a tengelyen szereplő mennyiségek **mértékegységének jelölése**.

A diagramok skálaosztása akkor megfelelő, ha a tengelyen egy pont koordinátái könnyen leolvashatóak. Ezért az 1 egységet nem célszerű (sőt, tilos) három, hat, hét vagy kilenc részre osztani. Kerülendő az 1 egység négy, vagy nyolc részre osztása. **Gyakorlatban használható A4-es grafikonon 1 egység csak 1, vagy 2, vagy 5 cm lehet**.
A diagramon szereplő adatpontokat célszerűen két egyenes metszéspontjaként kell kijelölni (+ jellel). Nem megfelelő jelölő az, amelynek nincs egyértelműen azonosítható jellegzetes pontja (pl.: O jelnek nincs kitüntetett pontja). Gondoljuk meg, hogy a pont koordináták a tengelyektől vett távolságot jelentik. Egy egyenestől (tengelytől) adott távolságra egy vele párhuzamos egyenes helyezkedik el. Egy pontot a diagramban két ilyen egyenes metszéspontja egyértelműen jelöl.

A kapott diagramon látható, hogyan helyezkednek el az adatpontok. Amennyiben a mérés körültekintően végeztük el, akkor a pontok jó közelítéssel egy egyenes körül rendeződnek. A pontokra vonalzó segítségével egyenest illesztünk, úgy, hogy lehetőleg azonos számú pont essen az egyenes mindkét oldalára (nem kell megszámolni, természetesen…), valamint az egyes pontok egyenestől vett távolságai között ne legyenek kiugróan nagy és túlságosan kis értékek (az egyenes a pontok „között fusson”). A berajzolt egyenes tengelymetszete (a) könnyen leolvasható, ellenben a meredekséghez (b) az egyenes két, lehetőleg minél távolabbi pontjának a koordinátáit le kell olvasnunk és abból kiszámítani a meredekséget:

$$B = b \cong \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Az $\boldsymbol{a}$ értékét megrajzolt grafikonról leolvassuk (tengelymetszet!), és kiszámítjuk az $\boldsymbol{A}$ értékét:

$$A = 10^a$$

Természetesen a fenti grafikus illesztési módszer mellett többféle eljárással is illeszthetjük a mért pontokra az egyenesünket. Egyik, gyakran elterjedt módszer az ún. „**legkisebb négyzetek módszere**”. A módszer lényege, hogy a mért pontoknak az illesztendő egyenestől vett „y” irányú távolságait négyzetre emeljük, a kapott értékeket összeadjuk és az összeg minimalizálásával határozzuk meg az egyenes együtthatóit.

Hasonlóan alkalmazható módszer az ún. **Wald-módszer,** amelyet Abraham Wald, kolozsvári születésű matematikus fejlesztett ki. A módszer a mért adatpontokból képzett ponthalmazok súlypontjait használja fel az illesztendő egyenes együtthatóinak meghatározására.

A fenti hatványfüggvényen kívül megfelelő koordináta-transzformációval sok függvény **linearizálható**. Például a fenti módszer alkalmazásával egyenesre rendezhetőek az exponenciális függvény ($y=A\cdot e^{Bx}$), vagy a logaritmikus függvény ($y=A+B\cdot \log(x)$) pontjai.

5.2 Az együttható mértékegysége és a bennük szereplő fizikai mennyiségek

Tételezzük fel, hogy elég pontosan végeztük a mérésünket és megkaptuk a kitevő ***b*=½** értékét. A hatványozás fogalmának ismeretében mondhatjuk, hogy ***b*** mértékegysége egy. Nézzük meg, hogy milyen fizikai tartalommal rendelkező tagokat tartalmaz ***A*** értéke és igyekezzünk ezeket meghatározni. Az egyenletünk tehát

$$T = A \cdot \sqrt{L}$$

alakú, ahonnan kifejezve ***A***-t, megvizsgálhatjuk, milyen mértékegységűnek kell lennie, hogy az egyenletünk dimenzionálisan (a két oldal mértékegységei szerint) is helyes legyen:

$$[A] = \frac{[T]}{\left[\sqrt{L}\right]} = \frac{s}{\sqrt{m}}$$

Mérnöki képzelőerővel megáldva, a mértékegységek alapján arra következtethetünk, hogy az ***A*** és a gravitációs térerősség között a következő arányosság áll fenn:

$$A \sim \frac{1}{\sqrt{g}}$$

Az ismert arányossági tényező 2π , levezetésünkben ***A*** a következőképpen definiált mennyiség:

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Használjuk fel a grafikus illesztés alapján meghatározott ***a*** konstansból számolt ***A*** együtthatót, és becsüljük meg g gravitációs térerősség nagyságát, és hasonlítsuk össze ismert értékével.

$$g = \left(\frac{2\pi}{A}\right)^2$$

(Természetesen ennek értéke a mérési pontatlanság, grafikus illesztés hibái miatt csak közelítőleg g=9,81 m/s² értéket fog adni.)

Sok esetben segít a fenti módszeren alapuló, ún. „**dimenzióanalízis**” egy-egy jelenség vizsgálatában, ha tudjuk, milyen jellemzők fogják befolyásolni a vizsgált folyamatunkat. A módszernek fontos szerepe van akkor, ha a jelenséget leíró összefüggést mérési adatokból kívánjuk meghatározni, vagy éppen a jelenséget vizsgáló kísérletet tervezünk. A fent leírt eljárás elnagyoltan tartalmazza a módszer lényegét, későbbi tanulmányaik során minden bizonnyal találkozni fognak a használat feltételeivel és magával a pontos módszer leírásával is.

Ajánlott irodalom:

Szűcs Ervin: A hasonlóságelmélet alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967.
Szűcs Ervin: A hasonlóságelmélet alkalmazása - modellkísérletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969.

6. Az eredmények értékelése

6.1 A táblázat eredményei alapján megállapíthatjuk, hogy azonos fonalhosszúság, de különböző tömegek esetén a mért lengésidő közel azonos, az eltéréseket csak mérési hibák okozzák.

6.2 Eredményül kaptuk, hogy egy fonálinga ***T*** periódusidejének (1) összefüggésében szerepel a ***g*** gravitációs térerősség, a ***π*** és az inga ***L*** hossza:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}},$$

amint az a középiskolai tanulmányainkból ismert. Az összefüggésben T [s] az L [m], g [m/s^2] mértékegységű mennyiség.

6.3 Összességében megismertünk tehát egy olyan mérnöki módszert, amely a továbbiakban sok más folyamat-jelenség vizsgálatára alkalmas.

A MÉRÉSRE VALÓ FELKÉSZÜLÉS

- Hozzanak magukkal 1 db A4-es milliméterpapírt, ceruzát, vonalzót, számológépet.
- Töltsék ki otthon a biankó jegyzőkönyvet a 4. pontig (az 5-8 pontot majd a mérésen fogjuk).

A méréslelírással illetve a méréssel kapcsolatos észrevételeket a csizmadia@hds.bme.hu címre várjuk.