

1. MÉRÉS

FORDULATSZÁM, TEHETETLENSÉGI NYOMATÉK ÉS SÚRLÓDÁSI NYOMATÉK MÉRÉSE

1. Bevezetés

A MÉRÉS CÉLJA, hogy meghatározzuk egy elektromotor kikapcsolása és a teljes megállása között a forgórész n fordulatszáma és az eltelt t idő kapcsolatát (a menetábrát). További feladat a motor tengelyét lassító M_s súrlódási nyomaték meghatározása a fordulatszám függvényében. A feladat sikeres végrehajtásához meg kell ismerni néhány alapfogalmat (fordulatszám, tehetetlenségi nyomaték, menetábra) és ezek mérési módszereit.

A MÉRÉS RÖVID LEÍRÁSA: Az elektromotor fordulatszámfüggő súrlódási nyomatékának $M_s(n)$ meghatározásához szükségünk van a motor menetábrájára $n(t)$. A kikapcsolás után a motor forgórésze a súrlódási nyomaték hatására fokozatosan lassul, majd megáll. A motor tengelyére erősített fordulatszám jeladó és egy számítógép segítségével az $n(t)$ függvénykapcsolat meghatározható.

Ezután a menetábra pontjaihoz meghatározzuk a súrlódási nyomatékot Newton II. törvényét felhasználva:

$$M_s = \Theta \varepsilon,$$

ahol ε a szöggyorsulás, amit a menetábrából, Θ pedig a tehetetlenségi nyomaték, amit egy másik, de az előzővel azonos típusú elektromotor segítségével mérünk meg.

ÖSSZEFOGLALVA:

- Menetábra $n(t)$ és tehetetlenségi nyomaték Θ mérése. Ezt a két mérést lehet párhuzamosan végezni.
- Szöggyorsulás ε meghatározása a menetábra segítségével.
- Súrlódási nyomaték M_s kiszámítása.

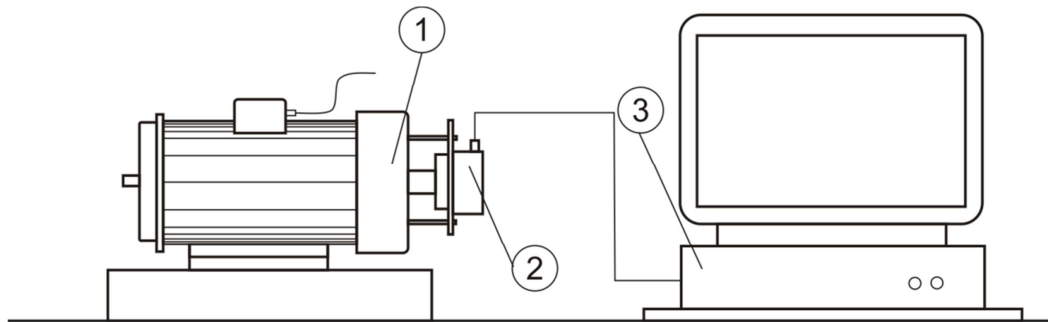
2. Menetábra és mérése

Egy motor tengelyére erősített gépalkatrész állandó fordulatszámú forgásban tartásához a hajtó motornak fedeznie kell a forgó alkatrészeire ható összes fékezőnyomatékot. Ez a fékezőnyomaték esetünkben a csapágyak súrlódásából M_s áll (a forgórész felületén ébredő légellenállásból adódó fékezőnyomatékot elhanyagoljuk).

Ha kikapcsoljuk a hajtó motort, a vizsgált gépalkatrész csökkenő fordulatszámmal fog forogni a súrlódás hatására, míg végül megáll. Ha a lassuló forgás során mérjük az n fordulatszám pillanatnyi értékét az idő függvényében és ezt diagramban ábrázoljuk, akkor az $n=n(t)$ menetábrát kapjuk. A menetábra esetünkben tehát a tengely fordulatszámát mutatja az idő függvényében.

A mérőberendezést a **1. ábra** mutatja. Az „1” jelű elektromotor tengelye össze van kapcsolva a „2” jelű fordulatszámmal arányos feszültség jeladóval, melynek analóg jelét a „3” jelű számítógép dolgozza fel. A jelfeldolgozás főbb

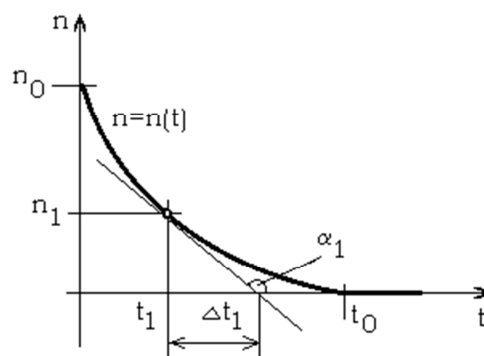
lépései: az analóg jel digitalizálása, szűrése és ábrázolása az idő függvényében. A mérés során a motort kikapcsoljuk és megvárjuk, amíg a megáll (kb. 35 s). Ezt követően a képernyőn megjelenik az $n=n(t)$ menetábra.



1. ábra Berendezés vázlat menetábra méréséhez

(Mérőberendezés részei: 1: elektromotor; 2: fordulatszám távadó; 3: számítógép)

Egy tipikus menetábrát láthatunk a **2. ábrán**. Az ábrából megállapítható, hogy a gépalkatrész a motor kikapcsolásától számított t_0 idő eltelte után megáll. A mérést regisztráló program segítségével a menetábra tetszőleges pontjában a t idő az n fordulatszám és az ε szöggyorsulás kiolvasható (a szöggyorsulást a program automatikusan számolja).



2. ábra Menetábra

A mérés során a kapott menetábrát milliméterpapíron meg kell rajzolni a program segítségével kiolvasott, egyenletesen elosztott 12 mérési pont segítségével. (Az ábrázolandó pontok száma csoportlétszám függvényében változhat.) A mérés elején a mérési pontokat a táblára felírjuk, így a menetábra $n(t)$ rögtön rajzolható.

3. A tehetetlenségi nyomaték és mérése

3.1. A tehetetlenségi nyomaték

Az r sugarú körön mozgó m tömegű tömegpont, és az r sugarú körön mozgó m tömegű körgyűrű (biciklikerék elhanyagolható tömegű küllőkkel) tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = mr^2.$$

Az r sugarú, m tömegű hengernek a saját forgástengelyére számított tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{1}{2}mr^2.$$

A tehetetlenségi nyomaték általános esetben függ a test alakjától, tömegeloszlásától és a forgástengely elhelyezkedésétől, értékét matematikai eszközökkel tudjuk kiszámítani. A szabálytalan alakú testet r_i sugarán fekvő Δm_i részekre bontjuk, egy ilyen rész tehetetlenségi nyomatékát a

$$\Delta\Theta_i = \Delta m_i r_i^2$$

összefüggéssel számolhatjuk ki. Az egész test tehetetlenségi nyomatéka ezek összege:

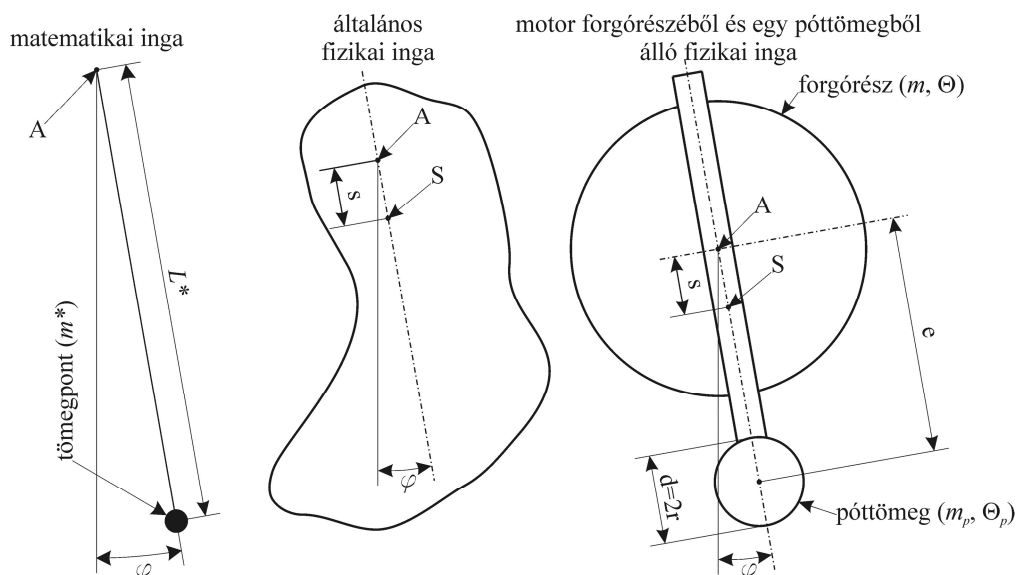
$$\Theta_i = \sum \Delta m_i r_i^2.$$

Fontos megjegyeznünk, hogy az egyes tehetetlenségi nyomatékok additívak. Tehát, ha pl. r_1 sugarú, m_1 tömegű körhengerre r_2 sugáron ($r_2 < r_1$) egy m_2 tömegű anyagi pontot erősítünk, akkor az eredő tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

3.2. Motor forgórész tehetetlenségi nyomatéka

A méréseink kiértékeléséhez szükségünk van a motor forgórészének tehetetlenségi nyomatékára (Θ). Ehhez alakítsuk át a forgórészt egy póttömeg segítségével fizikai ingává, lásd **3. ábra** jobb oldal. Általánosságban egy fizikai inga egy kiterjedéssel rendelkező **A** forgáspontban felfüggesztett test (**3. ábra** közép). A továbbiakban fizikai ingaként a motor forgórészből és a póttömegből álló ingára fogunk hivatkozni. A póttömeg egy $d=2r$ átmérőjű tömör henger, távolsága a forgásközépponttól e . A tömeg felerősítését segítő fémlap tömegét hanyagoljuk el, így a fizikai inga tehetetlenségi nyomatékában nem játszik szerepet. A póttömeg hatására a fizikai inga súlypontja az **A** pontból az **S** pontba tolódik el.



3. ábra Fizikai és matematikai inga összehasonlítása

A póttömeg Θ_p tehetetlenségi nyomatéka összetevődik a saját tengelyére számított értékből: $\frac{1}{2}m_p r^2$, és az e távolságra eltolt tengely miatti tagból (Steiner tétel: a Dinamika c. tárgyban fogják majd ismertetni), így összesen:

$$\Theta_p = \frac{1}{2}m_p r^2 + m_p e^2.$$

A motor forgórésze és a póttömeg által alkotott fizikai inga (**3. ábra** jobb oldal) együttes tehetetlenségi nyomatéka Θ_f a forgórész és a póttömeg tehetetlenségi nyomatékainak összege:

$$\Theta_f = \Theta + \Theta_p.$$

Ha a fizikai inga tehetetlenségi nyomatékát meg tudnánk határozni, akkor a forgórészé már könnyedén számítható lenne:

$$\Theta = \Theta_f - \Theta_p = \Theta_f - \frac{1}{2}m_p r^2 - m_p e^2.$$

Mivel a fizikai inga lengésideje T_f függ a tehetetlenségi nyomatékától, így a lengéside mérésével az számolható lenne. A probléma az, hogy bonyolult geometria esetén nem áll rendelkezésre képlet a lengéside meghatározására. Ezért a fizikai ingánkat egy vele egyenértékű matematikai ingával hasonlítjuk össze, lásd **3. ábra** bal oldal. A matematikai inga L^* redukált hosszát úgy kell beállítani, hogy a fizikai inga szöggyorsulása ε_f megegyezzen a matematikai ingáéval ε_m . Ebben az esetben ugyanis a lengésidek is meg fognak egyezni. A szöggyorsulásokat Newton II. törvénye segítségével határozhatjuk meg:

$$\varepsilon_f = \frac{M_f}{\Theta_f} = - \frac{(m + m_p) \cdot g \cdot s \cdot \sin \varphi}{\Theta_f},$$

$$\varepsilon_m = \frac{M_m}{\Theta_m} = - \frac{m^* \cdot g \cdot L^* \cdot \sin \varphi}{m^* L^{*2}} = - \frac{g \cdot \sin \varphi}{L^*}.$$

A két szöggyorsulás egyenlőségéből következik, hogy a redukált hossz értéke:

$$L^* = \frac{\Theta_f}{(m + m_p) \cdot s}.$$

Érdemes felhívni rá a figyelmet, hogy az egyenlet jobb oldalán csak a fizikai inga paraméterei szerepelnek.

A lengésidek egyezéséből és a matematikai inga lengéside képletéből írható, hogy

$$T = T_m = 2\pi \sqrt{\frac{L^*}{g}} = T_f = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_f}{(m + m_p) \cdot s \cdot g}}.$$

Mivel az S súlypont s távolságával nehézkes számolni, ezért az A pontra felírt nyomatéki egyensúlyból (az e hosszúság mérhető):

$$(m + m_p) \cdot s \cdot g = m_p \cdot e \cdot g.$$

Ezután a fizikai inga tehetetlenségi nyomatéka már meghatározható a lengéside megmérésével és a póttömeg paramétereinek segítségével:

$$\Theta_f = m_p \cdot e \cdot g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2.$$

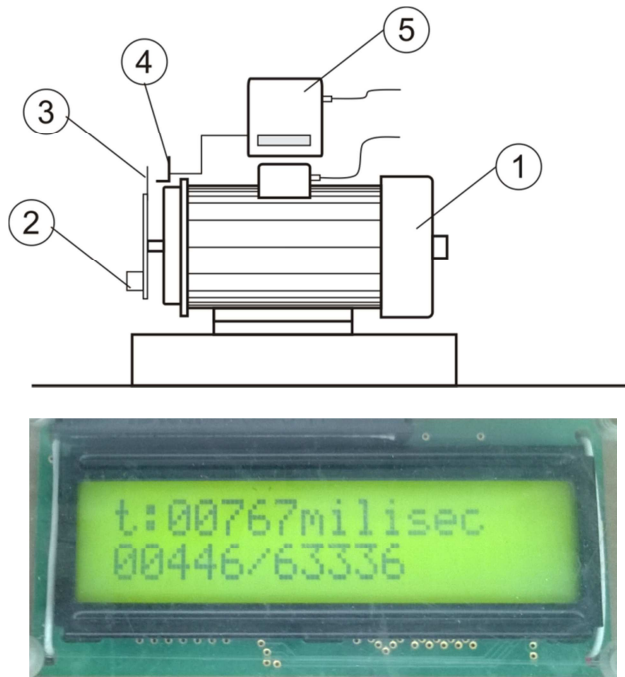
3.3. A tehetetlenségi nyomaték mérésének menete

A mérést 3 fős csoportokban fogjuk elvégezni. Minden csoport egymástól függetlenül megméri a motor forgórészének tehetetlenségi nyomatékát, ami összesen - 4 csoport esetén - 4 értéket jelent. Látni fogjuk, hogy a kapott eredmé-

nyek ingadoznak, ezért a 4 értéket átlagolva az átlagos (közepes) tehetetlenségi nyomatékkal Θ_K számoljuk ki a súrlódási nyomatékot.

Ez azt jelenti, hogy amíg nem végez minden csoport a tehetetlenségi nyomaték mérésével, addig a súrlódási nyomatékot nem tudjuk kiszámolni.

A **4. ábrán** bemutatjuk a mérőberendezést és vázlatát. Látható, hogy a motor tengelyére a „2” jelű m_p póttömeget erősítettük fel (vö. a **3. ábrával** is).



4. ábra Tehetetlenségi nyomaték mérése

(Felül: mérőberendezés részei: 1: elektromotor; 2: póttömeg; 3: lemez;
4: mágneses jeladó; 5: periódusidő mérő eszköz
Alul: a periódusidő mérő eszköz kijelzője)

Minden csoport kiválaszt egy adott póttömeget és leírja a paramétereit (átmérő d , tömeg m_p). A furatos fémlaphoz egy csavar segítségével a póttömeget rögzítjük. A rögzítés előtt ne felejtjük el lemérni az e távolságot! Az így összeállított fizikai ingát a „3” jelű lemezre karcolt jelig (5 fokos kitérés) kitérítjük. A lemezen lévő mágnes elhalad a „4” jelű mágneses jeladó előtt, ami az elhaladás irányát is figyelembe véve ad egy jelet (lengésenként mindig egyet). Ebből a lengés periódusideje közvetlen mérhető és az „5” jelű kijelzőről leolvasható. A T lengésidő ismeretében a tehetetlenségi nyomaték számítható az előzőek szerint.

4. Súrlódási nyomaték

Ha minden csoport végzett a tehetetlenségi nyomaték mérésével és megkaptuk a közepes tehetetlenségi nyomatékot Θ_K , továbbá mindenki kész van a menetábra rajzolással, akkor folytathatjuk a mérést a súrlódási nyomaték kiszámításával és ábrázolásával egy külön milliméterpapírra.

Természetesen nem kell mindenkinek mind a 12 mérési pontban kiszámolni a súrlódási nyomatékot. A gyakorlat megkezdése előtt mindenki kap egy sorszámot, és táblára felírt táblázatból csak a neki megfelelő sorszámú adatokkal fog dolgozni. Emlékeztetőül, a gyakorlat elején megcsináljuk a menetábrát és a program segítségével egyenletesen elosztva 12 mérési pontot rögzítünk a táblán, a sorszámot, az időt t , fordulatszámot n és a szöggyorsulást ε . A keregett súrlódási nyomaték Newton II. törvényéből határozható meg:

$$M_s = \Theta_K \varepsilon.$$

Az eredmény kiszámítása után az kapott értéket írjuk be táblán lévő táblázatba is!

4.1. Szöggyorsulás ellenőrzése

Mindenki az adott mérési pontjában (jelöljük az időt t_1 -el és a hozzátartozó fordulatszámot n_1 -el) ellenőrizze le úgy, hogy az $n=n(t)$ menetábrában a t_1 időpontban érintőt rajzolunk és kiszámoljuk az érintő meredekségét, lásd **2. ábra**. Az érintő meredeksége a t_1 időpontbeli szöggyorsulás értékét adja meg (lassul ezért negatív):

$$\varepsilon_1 \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = -2\pi \frac{n_1}{\Delta t_1} = -2\pi \cdot \tan \alpha_1,$$

ahol

$$\tan \alpha_1 = \frac{n_1}{\Delta t_1}.$$

A fenti képletben a szögsebesség és fordulatszám közötti $\omega=2\pi n$ összefüggést használtuk fel. Továbbá, hogy a szöggyorsulás a szögsebesség időegységeenkénti megváltozásával egyenlő ($\varepsilon \approx \Delta\omega/\Delta t$). A meredekségből számolt és a programból kiolvasott szöggyorsulásoknak közel azonosnak kell lenniük!

A MÉRÉSRE VALÓ FELKÉSZÜLÉS

- Hozzanak magukkal 2 db A4-es milliméterpapírt, ceruzát, vonalzót, számológépet.
- Mérés előtt ellenőrizni fogjuk a mérésre történő megfelelő felkészülést, a mérés során alkalmazott összefüggések ismeretét és helyes használatát elméleti, ill. rövid számpéldán keresztül. (Pl.: a mintakérdések a honlapon; megjegyzés: a beugrón ezektől eltérő kérdések is lehetnek.)
- Töltsék ki otthon a biankó jegyzőkönyvet a 4. pontig (az 5-8 pontot majd a mérésen fogjuk).

A mérésleírással illetve a méréssel kapcsolatos észrevételeket a csizmadia@hds.bme.hu címre várjuk.

Melléklet

6. A fordulatszám és mérése

6.1. A fordulatszám a forgó tengely időegységre eső fordulatainak száma. Jele leggyakrabban ***n***. Mértékegysége ford/s vagy ford/min, nagyon gyakran csak 1/min jelölést használjuk. Az ***ω*** szögsebesség és az ***n*** fordulatszám között ismert a kapcsolat:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

A mérési elv szempontjából a fordulatszámot mérő műszereket két csoportba oszthatjuk:

- **fordulatszámológok:** átlagfordulatszámot mérnek
- **tachométerek:** pillanatnyi fordulatszámot mérnek

6.2. Fordulatszámológok

a.) Kis fordulatszámok (120-150 1/min-ig) meghatározása a fordulatok szabad szemmel történő **számlálásával** és az idő **stopperrel** való mérésével történhet. Ha ***N*** a ***t*** idő alatti fordulatok száma, akkor az ***n*** fordulatszám:

$$n = \frac{N}{t} \left[\frac{1}{\text{s}}, \frac{1}{\text{min}} \right],$$

Ha a fordulatszám ingadozik, az utóbbi összefüggés a ***t*** időre vonatkozó átlagfordulatszámot adja. Egy mérés során minél hosszabb ideig számláljuk a fordulatokat, annál pontosabban határozhatjuk meg a fordulatszámot.

b.) Nagyobb fordulatszámok mérése esetén leegyszerűsbb műszer az ún. **ugró-számos fordulatszámológó**. (Ilyen van beépítve a villanyórában, magnetofonban, gépkocsik kilométer-számlálójában, stb.) Ennél a műszernél a forgó tengely magával visz egy számláló korongot, amely minden tíz körülfordulás után egytizeddel elfordítja a tízes számláló korongot, ennek minden tizedik körülfordulása egytizeddel elfordítja a százás számláló korongot, stb. A korongok palástjára egyenletes osztásban 0-tól 9-ig felrajzolt számokat leolvassva kapjuk a megtett fordulatok számát. Ha stopperóra segítségével megmérjük a számlálás idejét is, akkor az átlagfordulatszám számítható.

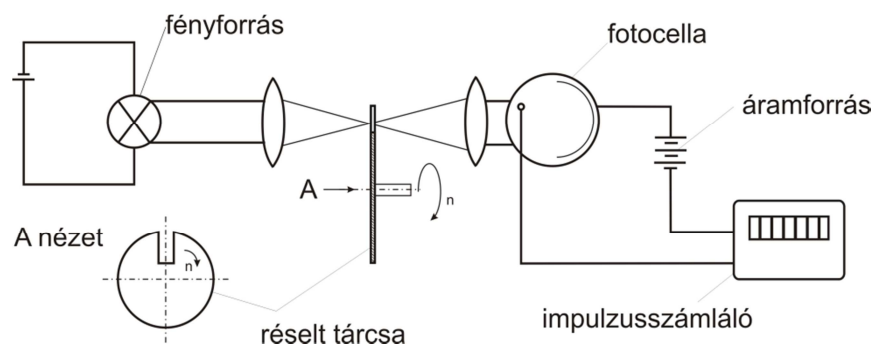


Gumi csatlakozó elemek

Felhúzó, nullázó, indító gomb

5. ábra Jaquet indikátor.

- c.) **Az óraműves fordulatszámoló (Jacquet indikátor, 5. ábra)** meghatározott ideig számlálja a fordulatokat. A műszeren lévő gomb megnyomásával óraszerkezetet húzunk fel, amely 6 másodpercig számolja a forgó tengely fordulatainak számát, ezen idő alatt a műszer mutatója mozog. A mérés befejeztével mutató megáll, és a skálán az egy percre eső átlagfordulatszámot olvashatjuk le. (Mérési sorrend: csatlakozás, gomb megnyomása, elengedése, mérés kb. 8 másodperc, kapcsolat bontás, leolvasás) *A műszert tilos nullázni, hiszen a gomb megnyomásával elindulna az óramű és egyben a következő mérés!*
- d.) **Az elektronikus fordulatszámoló** fordulatonként egy feszültségimpulzust szolgáltató jeladóból, impulzusszámlálóból és egy időmérő eszközből áll. A jeladó általában fotocella, amely előtt elforduló réselt tárcsa fordulatonként ad egy megvilágítást, s ezzel zár egy áramkört (lásd **6. ábra**). A pontosság növelése és a mérési időcsökkentése érdekében célszerű a rések számát növelni.



6. ábra Elektronikus fordulatszámoló.

- e.) **Az elektronikus stroboszkópok** változtatható (beállítható) frekvenciával villogó lámpával "világítják" meg a forgó testet. Ha a villogás frekvenciája megegyezik a forgó tárgy fordulatszámával, a tárgy állni látszik. A műszerről a beállított frekvencia, azaz a fordulatszám leolvasható (**7. ábra**).



7. ábra Stroboszkóp.

2.3. Tachométerek közül a legismertebb a villamos elven működő tachométer dinamó, amely a fordulatszámmal arányos feszültségjelet ad. Ha ismerjük a feszültség és a fordulatszám közötti kapcsolatot (kalibrálás), akkor a feszültséget mérve a fordulatszám megkapható.