

## 4. MÉRÉS

### HŐMÉRSÉKLET MÉRÉSE (VÍZMELEGÍTŐ)

#### 1. Bevezetés, a mérés célja

A mérés célja egy átfolyósos háztartási villamos vízmelegítő (villanybojler) jelleggörbéinek megmérése:

- A kifolyó víz hőmérsékletének változása az idő függvényében - a bekapcsolás pillanatától kezdve – (felmelegedési folyamat mérése).
- Az állandósult kilépő víz hőmérséklet változása az átfolyó tömegáram függvényében (állandósult állapotok mérése).

A felkészülés során megismerkedünk az összentalpia fogalmával és a hőmérők legelterjedtebb fajtáival. A mérésen megvizsgáljuk a háztartási villanybojler működését és tulajdonságait.

#### 2. Elméleti alapok

Ebben a fejezetben a mérés megértéséhez szükséges ismeretekről lesz szó. Elsőként definiáljuk az összentalpiát, megvizsgáljuk tagjainak jelentését, szó lesz áramlástechnikai gépek teljesítményének meghatározásáról és bemutatjuk a leggyakoribb hőmérőtípusokat.

##### 2.1. Az összentalpia

Az összentalpia fogalma - az általában **áramló** közegekkel dolgozó - **áramlástechnikai gépek** és **kalorikus gépek** nagy családjának tanulmányozásakor játszik fontos szerepet.

Az **összentalpia** az

$$i_{\sigma} = \frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} + u \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (1)$$

összeg, ami az áramló közeg tömegegységére vonatkoztatott

- külső nyomás munkájának,  $(p/\rho)$ ,
- helyzeti energiájának,  $(gh)$  és
- mozgási energiájának  $(v^2/2)$
- belső energiájának  $u$

összege, amely a folyadék áramlásakor állandó marad, ha az áramló közeg és környezete között termikus kölcsönhatás miatti energiaáramra (egyszerűbben mondva hőcserére) nem kerül sor. **Az összeg** (az összentalpia) **megváltoztatása** azonban **határozott célunk** is lehet, pl.: a mostani mérés során.

A belső energia az anyag molekuláris szerkezetének, a molekulák haladó, forgó- és rezgőmozgásának a következménye, és **az anyag hőállapotával** jellemezhető. Az ideális gázok és a folyadékok belső energiájának megváltozása az állandó térfogaton bekövetkező hőmérsékletváltozással arányos. A helyzeti energiához hasonlóan a belső energiának is csak viszonylagos értékeit tudjuk megadni, csak a megváltozását tudjuk figyelemmel kísélni. A tömegegységre vonatkoztatott fajlagos belső energia jele  $u$ , mértékegysége [J/kg].

Ha a belső energia változása nem jelentős, ez a tag elhagyható az összentalpiából. Így az úgynevezett Bernoulli-entalpiát ( $i_B$ ) kapjuk:

$$i_B = \frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (2)$$

amely a Bernoulli-egyenletből ismerős számunkra. Az ideális folyadék áramlása közben ez az összeg (egy áramvonalon) **állandó** marad.

## 2.2. Teljesítmény meghatározása

- a) Ha az áramló közeg **energiahordozóként** szerepel egy műszaki folyamatban, akkor célunk éppen az, hogy munkát, vagy hőt szolgáltatson az összentalpia **csökkenése** révén.
- b) Ha az áramló közeg munkaképességét bármely okból növelni (pl. fel-emelni, felgyorsítani, melegíteni) akarjuk, akkor az a célunk, hogy az összentalpia **növekedjék**. Ez a közegen való munkavégzéssel, vagy a közeggel való hőközléssel érhető el.

Az áramlástechnikai és kalorikus gépeknél az összentalpia megváltozásából ( $\Delta i_\sigma$ ) a tömegáram ( $\dot{m}$ ) ismeretében **teljesítményt** ( $P$ ) számíthatunk:

$$P = \dot{m} \Delta i_\sigma \left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \right]. \quad (3)$$

Ez a teljesítmény lehet akár bevezetett, akár szolgáltatott, hasznos teljesítmény, aszerint, hogy az áramló közeg - az előbbieket szerint - a gép melyik "oldalán" vesz részt a műszaki folyamatban. Ha ezt a teljesítményt **mérni** akarjuk, akkor feladatunk a fenti szorzat **két tényezőjének** meghatározása, a továbbiakban ezt fogjuk tárgyalni.

A **tömegáram** ( $\dot{m}$ ) meghatározását állandó sűrűségű közegek esetén általában térfogatáram ( $q$ ) mérésére - lásd a 3J anyaga - vezetjük vissza. A sűrűség ( $\rho$ ) ismeretében a tömegáram:

$$\dot{m} = \rho q \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad (4)$$

Az **összentalpia** ( $\Delta i_t$ ) megváltozását a (2) összefüggés szerint négy tag megváltozása okozhatja. Általában nincs szükségünk mind a négy tag megváltozásának ismeretére. Az alábbi egyszerűsítéseket jegyezzük meg!

- a) **Cseppfolyós** (azaz összenyomhatatlan) anyagok szállításánál, emelésénél (szivattyúk), vagy energiahordozóként való felhasználásánál (vízturbinák) a hőmérséklet-változás jelentéktelen, a belső energia gyakorlatilag változatlan marad. Így ezeknél csak a **Bernoulli-entalpia** megváltozását kell vizsgálnunk, azaz nyomásokat ( $p$ ), sebességeket ( $v$ ) és magasságokat ( $h$ ) kell mérnünk.
- b) **Légnemű közeg** (gáz, gőz) összentalpiájának vizsgálatakor a gázok kis sűrűsége - csekély súlya - miatt **a fajlagos helyzeti energiát**, illetve annak megváltozását **mindig elhanyagoljuk**. Így az

$$i_t = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \left[ \frac{J}{kg} \right] \quad (5)$$

összeg tagjait vizsgáljuk légnemű közeg munkaképesség változása esetén. Ezt az összeget **torlóponti entalpiának** is hívjuk, és nagy sebességű, hőátadással is járó gázáramlások esetén használjuk. Ilyen esetben nyomásokat ( $p$ ), sebességeket ( $v$ ) és hőmérsékleteket ( $t$ ) kell mérnünk. Példa: kompresszor, gázturbina.

- c) Ez utóbbi összeg első és utolsó tagjának változása mértékadó általában a **viszonylag lassan** lejátszódó, **hőközléssel**, vagy **hőelvonással** járó feladatoknál. E **két tag** a fajlagos **termodinamikai entalpia**, vagy - röviden - fajlagos **entalpia**:

$$i = \frac{p}{\rho} + u \left[ \frac{J}{kg} \right] \quad (6)$$

Az ennek megváltozásával jellemezhető munkaképesség változást okozó gépek vizsgálatakor hőmérsékleteket ( $t$ ) és nyomásokat ( $p$ ) kell mérnünk. Példa: belsőégésű motor, kazán.

- d) **Légnemű közeg** munkaképessége változhat úgy is, hogy a viszonylag kis nyomásváltozás mellett **a hőmérséklet megváltozása elhanyagolható**, viszont a **mozgási energia változásával** számolnunk kell. Így szélenergia-nál (a levegő energiahordozó), vagy a ventilátoroknál (a levegőt szállítjuk) a

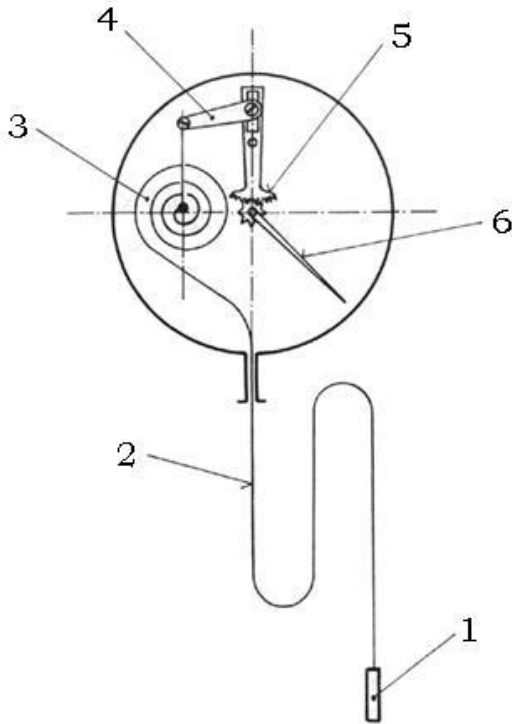
$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} v^2 \left[ \frac{J}{m^3} \right] \quad (7)$$

tagok megváltozása jellemző a munkaképesség változásra. Itt hagyományosan az **egységnyi térfogatra** vonatkoztatott munkavégző képességet használjuk, és ezt **össznyomásnak** hívjuk.

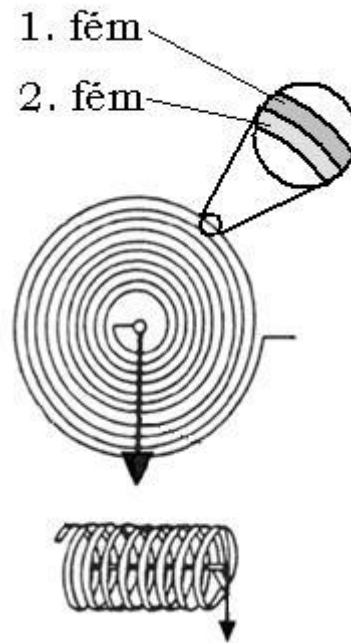
### 2.3. Hőmérséklet mérése

A hőmérsékletet hőmérőkkel mérjük. Ezek sokféle kialakításúak lehetnek. Mi az alábbiakat soroljuk fel:

- a) **Üveghőmérők:** Az ipari üveghőmérők egyszerű, kényelmes és igen elterjedt hőmérsékletmérő műszerek. Működésük alapja a hőmérőbe töltött folyadék és a hőmérő anyagát alkotó üveg stb. hőtágulási tényezője közötti különbség. Az üveghőmérő egy, a végén beforrasztott hajszálcsőben folytatódó kis üvegedény. A mérőfolyadékot a kis edénybe töltik; ha ezt melegítik, a folyadék kiterjed, és a hajszálcsőben fölemelkedik. Lehűléskor a folyadék térfogata csökken és visszahúzódik a hajszálcsőben. A hajszálcső mögött elhelyezett skálán leolvasható a hőtágulással arányos hőmérséklet.
- b) **Folyadéknyomásos hőmérők:** A folyadéknyomásos hőmérőknél egy bezárt térben lévő folyadék (hőmérséklet-változás hatására létrejövő) nyomásváltozása mozgatja a jelzőszerkezetet. A folyadék nyomásváltozása egyenesen arányos a hőmérséklet-változással. Ennek a típusnak egy lehetséges megvalósítása a **csőrugós higanytöltésű hőmérő**, amelynek elvi vázlata látható a 4.1. ábrán. Ennél a hőmérőnél az 1 jelű érzékelő edény, a kapilláris cső (2) és a spirális csőrugó (3) higannyal van töltve. A hőmérséklet emelkedésének hatására kiterjedő folyadék elhajlítja a csőrugót, ennek kitérését a csuklóskar (4) és a fogasív (5) viszi át a mutatóra (6).
- c) **Kettősfém (bimetál) hőmérők:** A kettősfém tulajdonságainál fogva felhasználható érzékelő és mozgató elemként hőmérőkben. Kétféle kivitel látható a 4.2. ábrán. A kettősfém két fémből álló szalag (lásd a kinagyított részt az ábrán), az egyik fém hőtágulási tényezője viszonylag kicsi a másikéhoz képest. A két fém hosszanti irányban egymáshoz van rögzítve, hő hatására a szalag a kisebb hőtágulású fém felé görbül. Az alakváltozás mutatóra vihető.

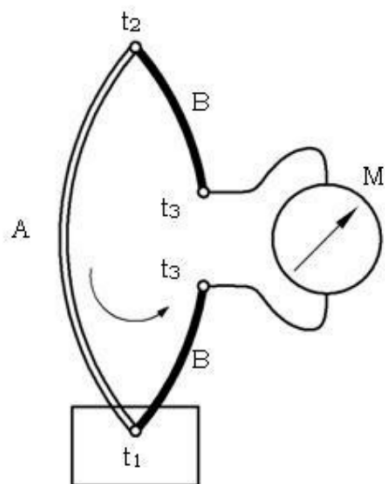


4.1. ábra: folyadéknyomásos hőmérő



4.2. ábra: bimetál hőmérő

- d) **Hőelemek:** A hőelemekkel való hőmérsékletmérés azon a jelenségen alapszik, hogy a két különböző fémből készült vezető két végét összeforrasztjuk (vagy akár csak erősen összenyomjuk), akkor a vezetők másik végei között az ún. kontaktpotenciálnak megfelelő mértékű feszültség jelentkezik, mely függ az összeérintett fémek **fajtájától** és azok **hőmérsékletétől**. A 4.3. ábrán a hőelem és a mérőműszer kapcsolása látható.



- $t_1$ : az érzékelő hely hőmérséklete  
 $t_2$ : a hidegpont hőmérséklete  
 $t_3$ : a műszer csatlakozási helyének hőmérséklete  
M: mérőműszer  
A,B: a hőelem ágai

4.3. ábra: hőelemek és bekötésük

A hőelem felhasználási területe általában 300-tól 1600 °C-ig terjed. E műszerek előnye nagy pontosságukon kívül az, hogy maga a hőérzékelő rész kicsiny, s ezért igen kis kiterjedésű helyeken mérhető a hőmérséklet.

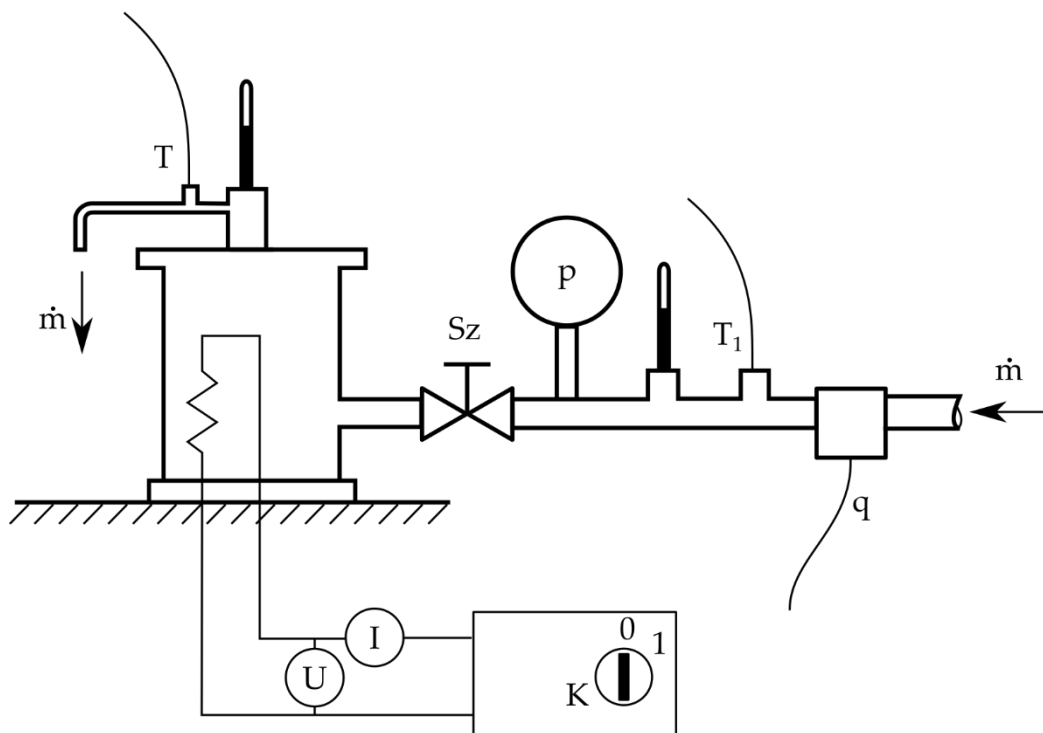
A hőelemeket a következőképpen használják: az összehasonlító hely (hidegpont) hőmérsékletét állandó értékre állítják (vagy legalábbis értékét ismerik), legpraktikusabban olvadó jégbe teszik. A forrasztási hely (érzékelő hely) a tulajdonképpeni hőérzékelő elem. Ha az összehasonlító hely hőmérséklete állandó, akkor a termofeszültség közvetlenül az érzékelő hely hőmérsékletének függvénye.

### 3. A mérés

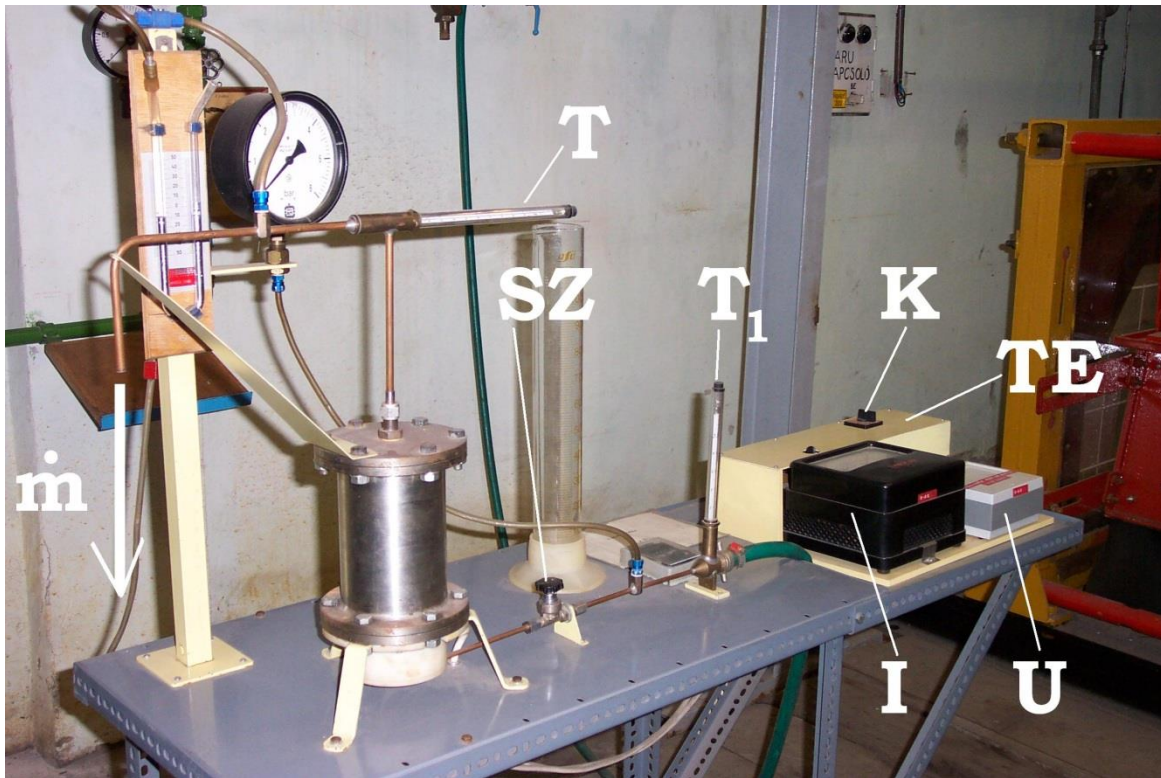
Ebben a fejezetben megismerkedünk a laboratóriumi mérőberendezéssel, az azt leíró jellemzőkkel, foglalkozunk a vízmelegítő felmelegedésével és állandósult állapotával. Ezután a mérési feladat vázlatos ismertetése következik, majd összefoglaljuk a mérésen való részvétel feltételeit. Ezen fejezet elsajátítása különösen fontos a mérés sikeres elvégzése céljából!

#### 3.1. A mérőberendezés leírása

A laboratóriumban lévő **villamos fűtésű átfolyó vízmelegítő** vázlata a 4.4 ábrán látható, a fényképét a 4.5. ábra mutatja.



4.4.ábra: a mérőberendezés vázlata



4.5. ábra: a mérőberendezés fényképe

A készüléken átfolyó víz  $\dot{m}$  tömegáramát az SZ jelű szeleppel lehet változtatni, és köbözéssel ( $V$ ,  $t_k$ ) mérni. Az F jelű (a TE tápegységen található K kapcsoló segítségével bekapcsolható) villamos fűtőtest a készülékbe beáramló hidegvíz folyamatosan melegíti. A belépő víz hőmérsékletét a  $T_1$ , míg a kilépő vizét a T jelű üveghőmérőkkel mérjük. A villamos fűtőszálra eső feszültséget és az azon átfolyó áramerősséget az U és I villamos műszerek mérik. (A 4.4. ábrán jelölt  $p_1$  nyomásmérő (manométer) a belépő víz nyomását méri, értéke csak tájékoztató jellegű.)

### 3.2. A vízmelegítő működése

A vízmelegítő készülék "teljesítménymérlege" állandósult állapotban a 4.6. ábra jelöléseivel a következő:

$$\dot{m} \cdot i_{\delta 1} + P_{vill} = \dot{m} \cdot i_{\delta 2} + P_{körny} \quad (8)$$

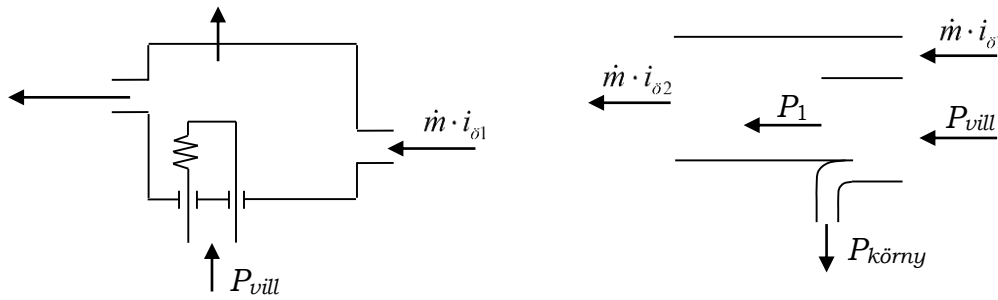
Az egyenletben szereplő mennyiségek értelmezése:

$\dot{m}$	a készüléken átfolyó víz tömegárama [kg/s],
$i_{\delta 1}$	a készülékbe belépő víz fajlagos összentalpiája [J/kg],
$i_{\delta 2}$	a kilépő víz fajlagos összentalpiája [J/kg],
$P_{vill}$	a fűtőtest teljesítménye (bevezetett teljesítmény) [W],
$P_{körny}$	a környezetnek átadott veszteség teljesítmény [W].

A (8) egyenletből:

$$P_{vill} = \dot{m}(i_{\delta 2} - i_{\delta 1}) + P_{körny} = P_1 + P_{körny} \quad (9)$$

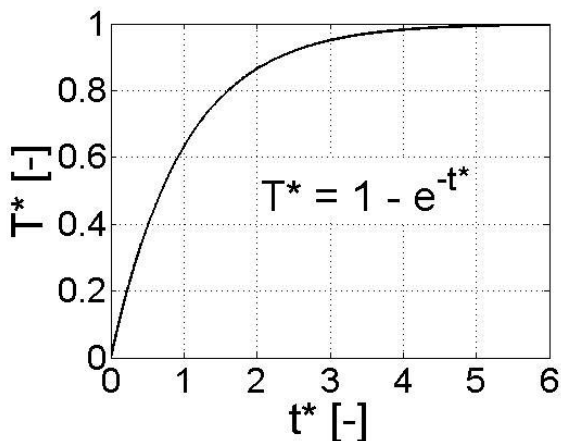
vagyis a fűtőtest teljesítménye az átfolyó víz összentálpíáját növeli, kis része pedig a környezetbe távozik.



4.6. ábra: a vízmelegítő energiamérlege

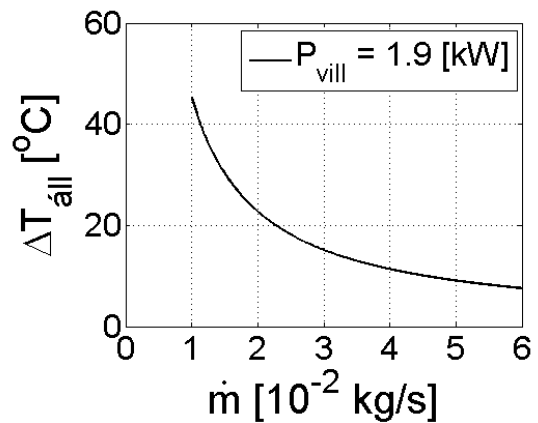
A fűtés bekapcsolása után a készülékből kiáramló  $\dot{m}$  tömegáramú víz  $T$  hőmérséklete növekedni kezd, de egy bizonyos idő után már nem változik. Az állandósult állapotba való **átmeneti** (tranzien), **felmelegedési folyamatot** jó közelítéssel leíró dimenzió nélküli egyenlet a következő (levezetését ld. a 12. oldalon):

$$T^* = 1 - e^{-t^*} \quad (10)$$



4.7. ábra: felmelegedési diagram

A függvénygörbe menetét a 4.7. ábra mutatja. Az egyenletben szereplő mennyiségek:



4.8. ábra: állandósult állapotok



$$T^* = \frac{\Delta T}{\Delta T_{\text{áll}}} \quad \text{dimenzió nélküli hőmérsékletváltozás [-]} \quad (11)$$

$$\Delta T = T - T_1 \quad \text{változó hőmérsékletnövekedés felmelegedéskor [°C]} \quad (12)$$

$$\Delta T_{\text{áll}} = T_{\text{áll}} - T_1 \quad \text{állandósult hőmérsékletnövekedés [°C]} \quad (13)$$

$T_{\text{áll}}$  állandósult kilépő hőmérséklet [°C]

$T_1$  belépő hőmérséklet [°C]

$c_v$  a víz fajhője [J/(kg°C)]

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad \text{dimenzió nélküli idő [-]} \quad (14)$$

$t$  a fűtés bekapcsolásától mért időtartam [s]

$$\tau = \frac{m_{\text{red}}}{\dot{m}} \quad \text{a vízmelegítő dinamikai időállandója [s]} \quad (15)$$

$m_{\text{red}}$  redukált tömeg [kg] (ld. levezetés)

$P_{\text{körny}}$  és az áramlási veszteségek elhanyagolásból adódik az **állandósult állapot hőmérsékletnövekedésének** alábbi, közelítő egyenlete:

$$\Delta T_{\text{áll}} \approx \frac{P_{\text{vill}}}{c_v \dot{m}} \quad (16)$$

Állandó villamos teljesítmény esetén a  $\Delta T_{\text{áll}}$  az  $\dot{m}$  vízáram függvényében olyan hiperbola, amelynek  $P_{\text{vill}} = \text{áll.}$  a paramétere. Ilyen grafikonokat mutat a 4.8. ábra, segítségével gyors tájékoztatást kaphatunk pl. arra a kérdésre, hogy egy adott  $\dot{m}$  vízáram milyen mértékben melegszik fel az egyik vagy másik fűtőteliesség fokozatban.

### 3.3. A mérési feladatok

#### Felmelegítési folyamat mérése:

- Kicsi, de még összefüggő folyadékszálat alkotó  $\dot{m}$  vízáram beállítása, mérése köbözéssel. (Vigyázat! A vízmelegítőtől kifolyó víz tényleg forró!)
- A készülék  $\tau$  időállandójának kiszámítása (15),  $m_{\text{red}}$  konkrét értékét a gyakorlaton adjuk meg.
- A villamos fűtőttest bekapcsolásának pillanatától kezdve a  $t$  idő függvényében olvassuk le a  $T$  hőmérsékletet az állandósulásig, ami a bekapcsolástól számítva  $t > 3\tau$  idő múlva várható. Az időben változó  $T$  kilépő víz-hőfokot elegendő  $0,5\tau$ -nyi időszakonként, de kerek számú másodpercenként leolvasni (összesen 6-7 hőfok adat), a változatlan mennyiségeket ( $U$  feszültség,  $I$  áramerősség) pedig elég egyszer lejegyezni.

- A mérési pontok berajzolása az otthon előkészített 4.7. ábra szerinti felmelegedési diagramba.

A mérési és számítási táblázat fejléce:

Ssz.	$t$ s	$T$ °C	$\Delta T$ °C	$t^*$ -	$T^*$ -

Egyszer mért mennyiségek és fizikai állandók:

$U'$	=	[fok]	kapocsfeszültség műszerosztásban
$I'$	=	[fok]	áramerősség műszerosztásban
$P_{vill} = c_p U' I'$	=	[W]	villamos teljesítmény
$V$	=	[m <sup>3</sup> ]	köbözött térfogat
$t_k$	=	[s]	köbözési idő
$T_1$	=	[°C]	belépő hőmérséklet
$\dot{m} = \frac{V}{t_k} \rho_v$	=	[kg/s]	tömegáram
$m_{red}$	=	[kg]	redukált tömeg
$\tau = \frac{m_{red}}{\dot{m}}$	=	[s]	időállandó
$\rho_v$	=	1000 [kg/m <sup>3</sup> ]	víz sűrűsége
$c_p = c_U \times c_I$	=	1[V/fok]×0,25[A/fok]	műszerállandók
$c_v$	=	4187 [J/kg°C]	fajhő

### Állandósult állapotok (jelleggörbe) mérése

- $P_{vill} \approx 1,9$  kW (a pontos értéket egyszer mért mennyiségként szerepeltessük!) fűtőteliesség mellett összesen 5-6  $\dot{m}$  vízárám beállítás és mérése, majd az állandósult állapot jellemzőinek leolvasása. Az állandósult állapotban ( $t$  nagyobb, mint  $3\tau$ ) a kilépő víz hőfok már nem növekszik.
- A mérési pontok berajzolása az otthon előkészített 4.8. ábra szerinti állandósult állapotok diagramba. (A mért pontoknak a hiperboláktól való eltérése a környezetbe távozó  $P_{körny}$  teljesítménnyel arányos.)

A mérési és számítási táblázat fejléce:

Ssz.	$V$ l	$t_k$ s	$T_{\text{áll}}$ °C	$\dot{m}$ kg/s	$T_1$ °C	$\Delta T_{\text{áll}}$ °C

### 3.4. Felkészülés a mérésre, a részvétel feltételei

- Hozzanak magukkal 1 db A4-es milliméterpapírt, ceruzát, vonalzót, számológépet.
- Az álló helyzetű mm-papír felső részére otthon rajzoljuk meg a felmelegedési görbét, alsó felére pedig az állandósult állapotot jellemző görbét. **Ezen diagramok megléte a mérésen való részvétel egyik feltétele!** Mivel az itt közölt diagramok (4.7. és 4.8 ábrák) csupán magyarázó jellegűek, **ezért az elméleti görbéket a (10) és (16) egyenletek felhasználásával** több (görbénként legalább 15) pontban számítsuk ki és ezek segítségével rajzoljuk meg a diagramokat! Az állandósult állapotnál  $P_{\text{vill}} = 1.9$  [kW]-tal számoljunk! Ajánlott tartományok (a mm-papíron minél jobban „elnyújtva”):  $t^* = [0 \ 5]$ ,  $T^* = [0 \ 1]$ ,  $\dot{m} = [0 \ 0.06]$ [kg/s],  $\Delta T_{\text{áll}} = [0 \ 70]$ [°C]. A mért pontokat **a mérésen a (11) és (13) képletek szerint** számítsuk!
- Mérés előtt ellenőrizni fogjuk a mérésre történő megfelelő felkészülést, a mérés során alkalmazott összefüggések ismeretét és helyes használatát elméleti, ill. rövid számpéldán keresztül. (Pl.: a mintakérdések a honlapon; megjegyzés: a beugrón ezektől eltérő kérdések is lehetnek. )
- Töltsék ki otthon a biankó jegyzőkönyvet a 4. pontig (az 5-9 pontot majd a mérésen fogjuk).

A mérésleírással illetve a méréssel kapcsolatos észrevételeket a [csizmadia@hds.bme.hu](mailto:csizmadia@hds.bme.hu) címre várjuk.



Az **elméleti felmelegedési diagram** levezetésének egy lehetséges módját (az előadáson elhangzott anyaggal összhangban) az alábbiakban ismertetjük. A felhasznált jelölések megegyeznek a 4.4. és 4.6. ábrán használtakkal, továbbá  $m_0$ -val jelöljük a vízmelegítő össztömegét (fémház és kavicságy) és  $c_f$ -fel fajhőjét.

A levezetés célja, hogy meghatározzuk a felmelegedés idő-hőmérséklet függvénykapcsolatát. A környezetbe távozó hő miatti veszteségtől eltekintünk, illetve feltételezzük, hogy a vízmelegítő hőmérséklete adott pillanatban megegyezik a kilépő víz hőmérsékletével.

$\Delta t$  idő alatt a villamos fűtőszál  $P_{vill} \Delta t$  mennyiségű energiát vezet a rendszerbe, mely melegíti a házat:  $m_0 c_f \Delta T$ , és melegíti a vízmelegítőn átfolyt vizet:  $\Delta t \dot{m} c_v (T - T_1)$ , mely alapján írható az alábbi egyensúly:

$$P_{vill} \Delta t = m_0 c_f \Delta T + \dot{m} c_v \Delta t (T - T_1) \quad (17)$$

Definiáljuk az ún. redukált tömeget a következőképpen:

$$m_{red} c_v = m_0 c_f \quad (18)$$

melyet behelyettesítve (17)-be, kapjuk, hogy:

$$1 = \frac{m_{red} c_v}{P_{vill}} \frac{\Delta T}{\Delta t} + \frac{\dot{m} c_v}{P_{vill}} (T - T_1) \quad (19)$$

A (19)-es egyenlet már ugyan alkalmas lenne a felmelegedési görbe meghatározására, azonban még több, az adott vízmelegítőre jellemző változót ( $m_{red}$ ,  $c_v$ ,  $P_{vill}$ ) tartalmaz. Ezek kiiktatására, és így egy minden ilyen típusú vízmelegítőre érvényes, általános függvénykapcsolat levezetésére további átalakításokat eszközölünk. Vezessük be az alábbi, dimenziótlan változókat:

$$T^* = \frac{\dot{m} c_v}{P_{vill}} (T - T_1) \quad (20)$$

$$\Delta T^* = \frac{\dot{m} c_v}{P_{vill}} \Delta T \quad (21)$$

$$\Delta t^* = \Delta t \frac{\dot{m}}{m_{red}} \quad (22)$$

Ezeket beírva a (19)-es egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$1 = \frac{\Delta T^*}{\Delta t^*} + T^* = \frac{dT^*}{dt^*} + T^* \quad (23)$$

Ha  $\Delta t$  és  $\Delta T$  egyaránt nullához tart, akkor a differencia-hányados tart a differenciál-hányadoshoz.

Ez egy ún. **differenciálegyenlet**, amely nem csak az ismeretlen  $T^*(t^*)$  függvényt, hanem annak a deriváltját is tartalmazza. A differenciálegyenlet megoldása a  $T^*(t^*)$  függvény. A megoldási módszert későbbi tanulmányaik során tanulni fogják, azonban az eredmény helyessége jelenlegi ismereteik birtokában is ellenőrizhető. A megoldás tehát (a függvény menetét a 4.7. ábra mutatja):

$$T^* = 1 - e^{-t^*} \quad (10)$$

figyelembe véve, hogy

$$\frac{dT^*}{dt^*} = e^{-t^*} \quad (24)$$

az ellenőrzés a következő:

$$1 = e^{-t^*} + 1 - e^{-t^*} = 1 \quad \checkmark$$