Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

Áramlástechnikai rendszerek

kézirat

Írta: Till Sára, MSc, BME GPK HDR Tanszék
Csizmadia Péter, PhD, BME GPK HDR Tanszék

Közreműködtek: Erdődi István MSc
Gráf Mihály MSc
Nagy Dániel BSc

Lektorálta: Paál György, DSc, BME GPK HDR Tanszék (1. és 2. fejezet)
Hős Csaba, PhD, BME GPK HDR Tanszék (3. fejezet)
Halász Gábor, CSc, BME GPK HDR Tanszék (4. fejezet)
Kullmann László, CSc, BME GPK HDR Tanszék (5. fejezet)
Klapcsik Kálmán, PhD, BME GPK HDR Tanszék (6. és 7. fejezet)

2022. december 13., Budapest

Tartalomjegyzék

Jelmagyarázat

$A[m^2]$	áramlási keresztmetszet
$a[m/s]$	hullámterjedési sebesség
$B[m]$	csatorna -vízmagasságtól függő- szélessége
$C[\sqrt{m}/s]$	Chézy szám
$D[m]$	átmérő
$D_e[m]$	egyenértékű átmérő
$c[J/kgK]$	folyadék fajhője
$c_p[J/kgK]$	gáz állandó nyomáson vett fajhője
$c_v[J/kgK]$	gáz állandó térfogaton vett fajhője
$\Delta c[m/s]$	sebességváltozás
$e[m]$	átlagos felületi egyenetlenség
$E_{red}[Pa]$	rugalmassági modulus
$f[m^3/h]$	csomóponti fogyasztás
$Fr[-]$	Froude-szám
$g[m/s^2]$	gravitációs térerősség
$h[m/v.o.m]$	magasság; nyomásmagasság
$h'[m/v.o.m]$	veszteségmagasság
$H[m]$	szállítómagasság
$i[-]$	esés
$k[m]$	átlagos felületi érdesség
$K[m]$	nedvesített kerület
$L[m]$	csőhossz
$m[kg]$	tömeg
$\dot{m}[kg/s]$	tömegáram
$m[m]$	tömegegységre vonatkoztatott fajlagos energia
$M[-]$	Mach-szám
$n[-]$	politropikus kitevő
$n[s/m^{1/3}]$	Manning féle állandó
$p[Pa]$	nyomás
$P[W]$	hőteljesítmény
$q[J]$	hőmennyiség
$Q[m^3/s]$	térfogatáram
$R[m^2/s^2K]$	az anyag gázállandója
$R_h[m]$	hidraulikai sugár
$Re[-]$	Reynolds-szám
$s[J/kgK]$	fajlagos entrópia
$S_0[-]$	esés (slope)
$S_f[-]$	súrlódás miatti fajlagos nyomásesés (friction slope)
$T[K]$	abszolút hőmérséklet
$T_f[s]$	csővezeték főideje
$\mathit{\Delta} T[K]$	hőfoklépcső
$U[J]$	belső energia
$v[m/s]$	áramlási átlagsebesség
$V[m^3]$	térfogat
$x[m]$	cső hossza menti koordináta
$y[m]$	vízmagasság
$y_c[m]$	kritikus vízmagasság
$y_n[m]$	normál vízmagasság

$z[m]$	geodetikus magasság
$\alpha[-]$	relaxációs tényező
$\alpha_{kin}[-]$	kinetikus energia korrekciós tényezője
$\varepsilon[-]$	homokérdesség (relatív érdesség)
$\kappa[-]$	izentropikus kitevő
$\lambda[-]$	csősúrlódási tényező
$\mu[kg/ms]$	dinamikai viszkozitás
$\nu[m^2/s]$	kinematikai viszkozitás
$\rho[kg/m^3]$	a közeg sűrűsége
$\zeta[-]$	veszteségtényező
$\xi[Pa \cdot s/kg]$	fojtási tényező
Jac	Jacobi-mátrix
$1D$	egydimenziós
$2D$	kétdimenziós
FR	fűtőrendszer
HR	hidraulikai rendszer
KDE	közönséges differenciál egyenlet
NYF	nyíltfelszínű áramlás, nyíltfelszín
$R-K$	Runge-Kutta módszer

1. fejezet

Áramlástani bevezetés

1.1. Áramlástani összefoglaló

Az első fejezetben olyan korábbi tanulmányokban már elhangzott ismereteket foglalunk össze, melyek tudása elengedhetetlen a tárgy alapjainak megértése szempontjából. Az összefoglalás korántsem teljes körű, az [1] irodalomban bővebb leírás található róluk.

1.1.1. Kontinuitási egyenlet

A folytonosság tétele az anyagmegmaradást fejezi ki. Általános alakban a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0 \tag{1.1}$$

ahol Descartes-féle koordináta-rendszerben $\mathrm{div}\underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$ (ld. pl. [1]). Állandósult (stacionárius), forrásmentes áramlás esetén gyakorta ennek integrál alakját használjuk:

$$\int_A \rho \underline{v} \mathrm{d}\underline{A} = \int_A \rho \underline{vn} \mathrm{d}A = 0 \tag{1.2}$$

A legtöbb mérnöki probléma esetében definiálható egy (vagy több) belépő (1) és egy (vagy több) kilépő (2) keresztmetszet, közöttük pedig merev falak határolják az áramlást (csövek, csőszerelvények, szivattyúk, stb.). Ilyen esetben a kontinuitási egyenlet egyszerűsített formában a következőképpen írható fel:

$$\rho_1 \overline{v_1} A_1 = \rho_2 \overline{v_2} A_2 \tag{1.3}$$

ahol, $\rho_i [kg/m^3]$ a közeg sűrűsége, $A_i [m^2]$ a belépő és kilépő keresztmetszet, $\overline{v_i} [m/s]$ pedig az A_i keresztmetszetre vonatkoztatott átlagsebesség,

$$\overline{v_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \underline{v} \cdot \underline{dA} \tag{1.4}$$

Összenyomhatatlan közeg esetében a sűrűség állandósága miatt a tétel tovább egyszerűsödik, és felírható a következő alakban:

$$\overline{v_1} A_1 = \overline{v_2} A_2. \tag{1.5}$$

A továbbiakban 1 dimenziós áramlásokkal foglalkozunk, így a $\overline{v_i}$ jelölés egyszerűsítésére, azaz az átlagsebesség jelölésére bevezetjük a v_i-t ($i = 1; 2$).

1.1.2. Bernoulli-egyenlet, energiaegyenlet

Az Euler-egyenlet vonalmenti integrálja a Bernoulli-egyenlet. Potenciálos erőteret, stacionárius, hőközlésmentes, veszteségmentes áramlást feltételezve egy áramvonal mentén a folyadék energiája nem változik. Mindezeket felírva, kiegészítve a feltételezéssel, hogy legtöbbször összenyomhatatlan közegekkel találkozunk (vagyis $\rho = konstans$) kapjuk annak műszaki gyakorlatban leggyakrabban használt, egyszerűsített formáját:

$$\text{Egységnyi térfogatra eső energia} = \frac{mgh + \frac{1}{2}mv^2 + pV}{V} = p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho gh = \text{konstans}, \tag{1.6}$$

ahol $\rho[kg/m^3]$ a közeg sűrűsége, v,$[m/s]$ az átlagsebesség, $p[Pa]$ a nyomás, $g[m/s^2]$ a gravitációs térerősség, $h[m]$ pedig a geodetikus magasság. A fenti egyenletben szereplő tagok a következőképpen csoportosíthatóak: $p[Pa]$ a statikus nyomás, $\frac{\rho}{2}v^2[Pa]$ a dinamikus nyomás, $\rho gh[Pa]$ a hidrosztatikus nyomás. A műszaki gyakorlatban a veszteségek nem elhanyagolhatók, ezt veszteségtaggal vesszük figyelembe. 1 dimenziós áramlást feltételezve, áramvonal két tetszőleges pontja között ekkor felírható:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p', \tag{1.7}$$

ahol $\Delta p'[Pa]$ a két pont közti nyomásveszteséget jelöli. Meg kell jegyeznünk, hogy élünk továbbá azzal az egyszerűsítéssel, hogy a kinetikus energia korrekciós tényezője turbulens áramlások esetén közel egy ($\alpha_{kin} \cong 1{,}1$), és az általunk vizsgált áramlások ebbe a tartományba esnek.

1.1.3. Állapotegyenlet

Összenyomható közegek esetén a nyomás és a sűrűség között az ideális gáztörvény (gázok általános alapegyenlete) teremti meg a kapcsolatot:

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{1.8}$$

ahol $R[m^2/s^2K]$ az anyag gázállandója, T $[K]$ az abszolút hőmérséklet.

Gázok állapotváltozása végbemehet izoterm (állandó hőmérsékleten), izentropikus (reverzibilis, adiabatikus) és politropikus módon. A valóságos folyamatokhoz ez utóbbi áll legközelebb, de bizonyos feltételek mellett élhetünk az izoterm ill. az izentropikus feltételezéssel is. **Izoterm** esetben, mivel $T = konstans$, elmondható, hogy:

$$\frac{p}{\rho} = konstans. \tag{1.9}$$

Izentropikus esetben igaz, hogy:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = konstans, \tag{1.10}$$

ahol $\kappa[-]$ az izentropikus kitevő vagy fajhőviszony. Értéke a gáz állandó nyomáson és állandó térfogaton vett fajhőjének hányadosa, levegő esetében κ =1,4. **Politropikus** esetben igaz, hogy:

$$\frac{p}{\rho^n} = konstans, \tag{1.11}$$

ahol $n[-]$ az politropikus kitevő. Értéke 1 és az izentropikus kitevő értéke közé esik, mérésekkel meghatározható.

1.1.4. Energiaegyenlet összenyomható közegek esetén

Súrlódásmentes, stacionárius áramlás esetén, hőközlésmentes ideális gáz esetében igaz, hogy egy áramvonalon:

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{konstans}, \tag{1.12}$$

ahol $c_p[J/kgK]$ a gáz állandó nyomáson vett fajhője és $T\,[K]$ az abszolút hőmérséklet.

1.1.5. Áramlás csövekben

A csőben kialakuló áramlás milyensége nem csupán az átlagsebesség, hanem a cső átmérőjének és a folyadék viszkozitásának is függvénye. Ezt a dimenziótlan Reynolds-számmal (Re) tudjuk jellemezni:

$$\frac{\overline{v} D \rho}{\mu} = Re, \tag{1.13}$$

ahol $\overline{v}[m/s]$ a közeg átlagsebessége (amit mostantól v-vel jelölünk), $D[m]$ a cső átmérője, $\rho[kg/m^3]$ az áramló közeg sűrűsége míg $\mu[kg/ms]$ a dinamikai viszkozitása; $Re[-]$ pedig a Reynolds-szám. Az áramlás jellege szerint lamináris (réteges, ebben az esetben a sebességprofil parabolikus) és turbulens (gomolygó) jellegű lehet. A lamináris-turbulens átalakulás a $Re \cong 2300$ körül megy végbe. $Re \cong 2300$ alatt lamináris, egy átmeneti tartomány után $Re \cong 4000$ felett pedig kialakult turbulens áramlásról beszélünk.

Megjegyzendő, hogy a Reynolds-szám fentiekben bemutatott értelmezése a newtoni közegekre érvényes. Olyan esetekben, ahol nemnewtoni reológiájú közeg áramlik, más Re definíciót kell alkalmazni. A továbbiakban kizárólag newtoni folyadékokkal foglalkozunk.

1.1.6. Áramlási veszteségek

Egy csőhálózatrendszer esetében az áramlási veszteség nyomásveszteség formájában jelentkezik, pl.: csősúrlódási veszteség (még hidraulikailag sima cső esetén is), a csőidomok (pl. könyök, szelep, csap, szűrő, stb.) veszteségei, kilépési veszteség. Általános esetben egy áramlástechnikai veszteség felírható

$$\Delta p' = \zeta \frac{\rho}{2} v^2, \tag{1.14}$$

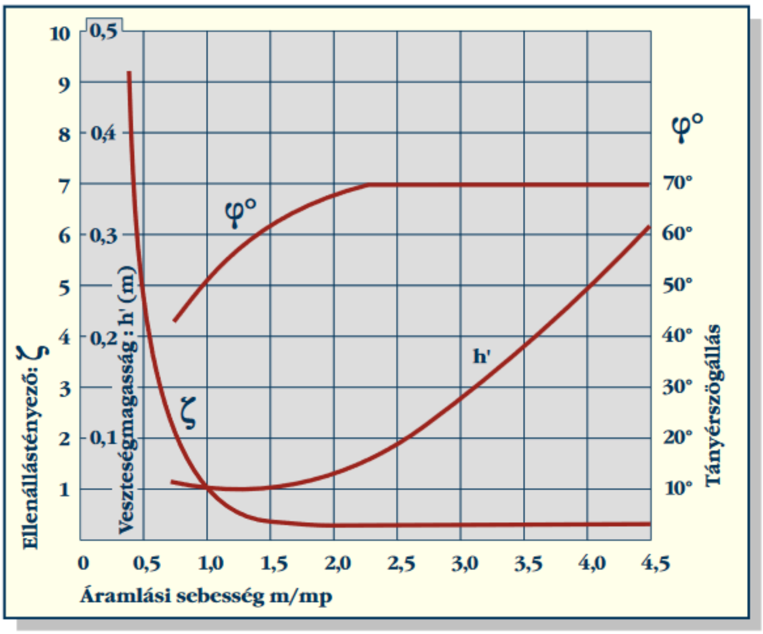
formában, ahol $\zeta[-]$ a veszteségtényező. Egyenes csövekre:

$$\zeta = \lambda \frac{L}{D}, \tag{1.15}$$

ahol $\lambda[-]$ a Darcy-féle csősúrlódási tényező (ld. bővebben a következő alfejezet), $L[m]$ a cső hossza és $D[m]$ a belső átmérője. (Itt jegyezzük meg, hogy a csősúrlódási tényező másik szokásos, elfogadott jelölése: $f[-]$ (Fanning-féle, néha kissé eltérő értelmezéssel.) Az egyenes cső veszteségéről érdemes tudni, hogy állandó térfogatáramot feltételezve a csővezeték belső átmérőjének 5-dik hatványával fordítottan arányos, vagyis az átmérő kis mértékű csökkentése is drasztikus nyomásveszteség-növekedést okoz.

$$\Delta p' = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} v^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{\frac{D^4 \pi^2}{16}} = \lambda L \frac{\rho}{2} \frac{16 Q^2}{\pi^2} \frac{1}{D^5}. \tag{1.16}$$

Egyéb áramlástechnikai elemek (csőkönyök, szűrő) esetében ζ veszteségtényező függvénye a Reynolds-számnak, a fal érdességének és az idom alakjának és méretének; szelepeknél, tolózáraknál továbbá függ attól, hogy mennyire van nyitva az adott fojtás. Ezt a gyártó által megadott jelleggörbén láthatjuk, ahol a relatív elmozdulás (a nyitottsági szint százalékban megadott értékének) vagy az átáramló térfogatáramnak a függvényében adott a veszteségtényező ζ, vagy az elem veszteségmagassága $h'(= \Delta p'/\rho g)$ (1.1. ábra. (Megjegyzendő: hogy a csőszerelvények teljesen nyitott állapotában is van veszteség, tehát a veszteségtényező ekkor is pozitív.)



1.1. ábra. Ganz FECU NÁ 300-as NNy 16-os torlócsappantyú veszteségtényezője a tányérszögállás ill. a térfogatáram függvényében. *(forrás: www.ganz-vizgep.hu/)*

1.1.7. Egyenes cső csősúrlódási tényezője

Az egyenes csövekre definiált csősúrlódási tényező az egyes tartományokban, az áramlás jellegétől függően különböző módon számolható, ezt szemléleti a Moody-diagram (1.2. ábra). Ezen logaritmikus léptékű tengelyen ábrázoljuk a csősúrlódási tényezőt a Re és a relatív érdesség függvényében.
Ez az első, **lamináris** tartományban ($Re < 2300$) a következőképpen alakul, a csősúrlódási tényező értéke csak a Reynolds-számtól függ:

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \tag{1.17}$$

ahol $\lambda[-]$ a csősúrlódási tényező, $Re[-]$ a Reynolds-szám hidraulikailag sima és érdes esetben is. A Reynolds-számot növelve jutunk el az ún. átmeneti tartományba. Ezen intervallum fölötti turbulens tartományban hidraulikailag sima csövet feltételezve, a csősúrlódási tényező a **Blasius** formulával számítható:

$$\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}. \tag{1.18}$$

Amennyiben a cső érdes, a Re mellett a cső relatív érdessége (vagy homokérdessége, $\varepsilon/D[-]$, ami az átlagos felületi egyenetlenség (ε) és a cső jellemző radiális méretének

(D) hányadosa) is befolyással van a csősúrlódási tényezőre. Így **turbulens** tartományban a **Colebrook-White** implicit alakban megadott képlettel közelíthetjük a csősúrlódási tényezőt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2log_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D_e} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right), \tag{1.19}$$

ahol $D_e[m]$ a cső egyenértékű vagy hidraulikai átmérője. Telt szelvényű, kör keresztmetszetű csővezetékben lezajló áramlás esetén ez megegyezik a cső belső átmérőjével, nem kör keresztmetszetű és nyíltfelszínű áramlás esetén [1] definíció szerint:

$$D_e = \frac{4A_{\acute{a}ram}}{K_{nedv}}, \tag{1.20}$$

ahol, $A_{\acute{a}ram}[m^2]$ az átáramlási keresztmetszet, $K_{nedv}[m]$ pedig a nedvesített kerület (1.3. ábra)

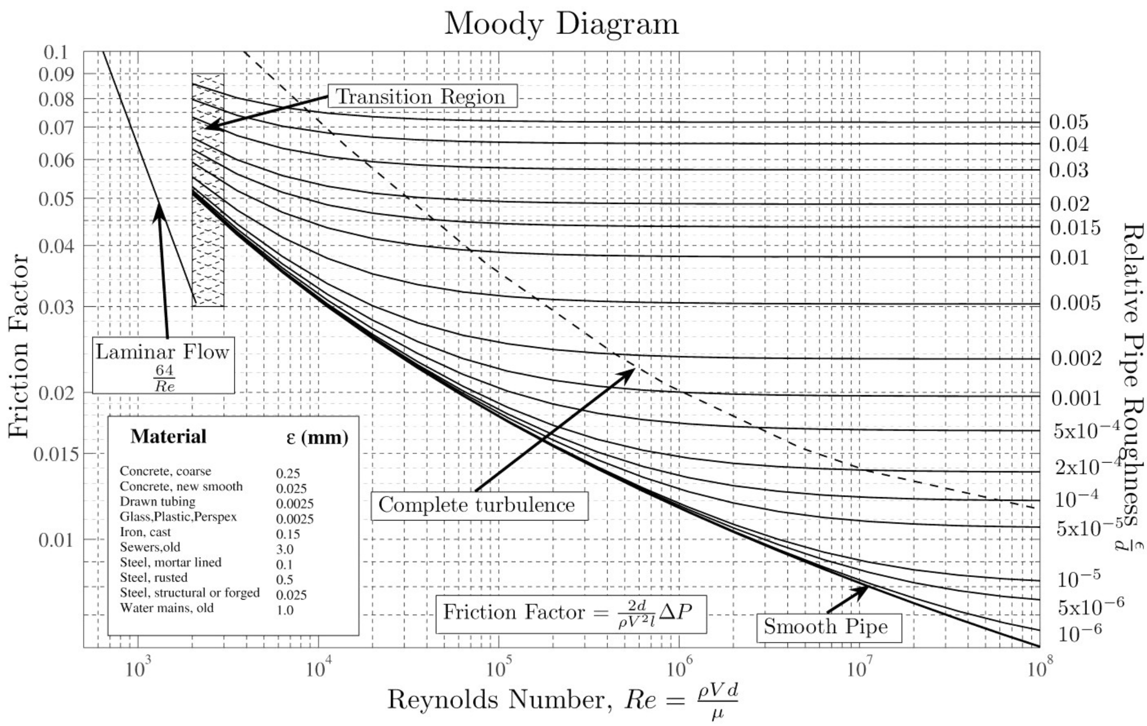
A fent bemutatott összefüggés mellett, **Haaland** képletével explicit alakban is becsülhető az egyenes cső csősúrlódási tényezője:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -3{,}6log_{10}\left(\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71D_e}\right)^{1{,}11} + \frac{6{,}9}{Re}\right). \tag{1.21}$$

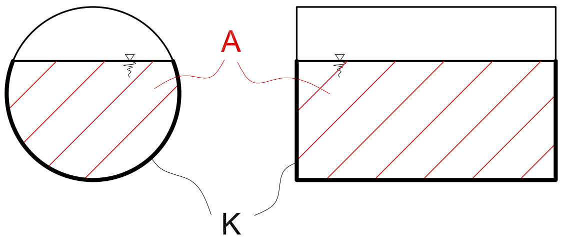
A teljesen turbulens tartomány (vagy érdes zóna) elérése után a csősúrlódási tényező a Re számnak már nem, csak a relatív érdességnek a függvénye, itt érvényes az

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2lg\left(\frac{\varepsilon}{3{,}2D_e}\right) \tag{1.22}$$

képlet.



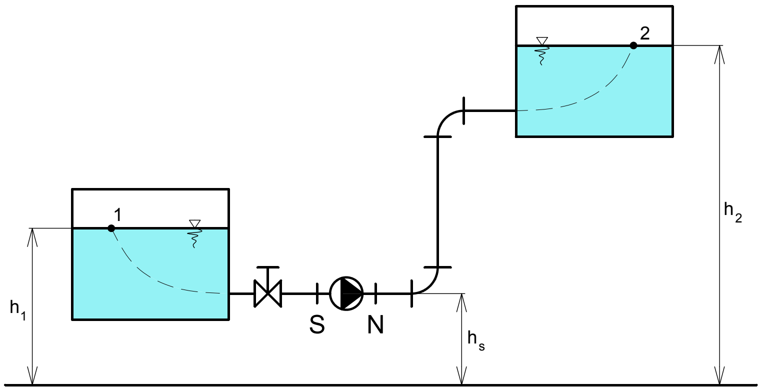
1.2. ábra. Moody-diagram (forrás: Wikipédia).



1.3. ábra. Az átáramlási keresztmetszet (sraffozva) és a nedvesített kerület (vastaggal vonallal jelölve).

1.1.8. Csővezeték-rendszer jelleggörbe

Tekintsük a következő csővezetéket, amelyen az 1. pontból a 2. pontba áramlik (összenyomhatatlan) közeg (1.4. ábra).



1.4. ábra. Általános csővezeték.

A csővezeték 1 pontja és a szívócsonk (S) között 1 dimenziós áramlást feltételezve, (1.7) alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g h_1 = p_S + \frac{\rho}{2}v_S^2 + \rho g h_S + \Delta p'_{1-s}, \tag{1.23}$$

az eddigieknek megfelelő jelölésekkel. Ugyanígy felírható a Bernoulli-egyenlet a nyomócsonk (N) és a 2 pont között:

$$p_N + \frac{\rho}{2}v_N^2 + \rho g h_N = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p'_{N-2}, \tag{1.24}$$

az eddigieknek megfelelő jelölésekkel. Az elsőt rendezzük át, hogy a veszteség a csővezeték jellemzőinek oldalára kerüljön, a másodikban pedig cseréljük meg a két oldalt.

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g h_1 - \Delta p'_{1-s} = p_S + \frac{\rho}{2}v_S^2 + \rho g h_S \tag{1.25}$$

$$p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p'_{N-2} = p_N + \frac{\rho}{2}v_N^2 + \rho g h_N \tag{1.26}$$

Most vonjuk ki a 2. egyenletből az elsőt és a veszteséges tagot vonjuk össze:

$$p_2 - p_1 + \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g\left(h_2 - h_1\right) + \Delta p'_{1-2} = p_N - p_S + \frac{\rho}{2}\left(v_N^2 - v_S^2\right) + \rho g\left(h_N - h_S\right) \tag{1.27}$$

A csővezeték jelleggörbéje azt mutatja meg, hogy mekkora nyomásigény jelentkezik akkor, ha adott mennyiségű folyadékot akarunk a rendszer egyik pontjából a másikba juttatni. Az áramlástechnikai modellezésben méter dimenzióban kifejezett (súlyegységre vonatkoztatott) formában szokás jellemezni az áramlástechnikai elemeket, így a csővezetékeket is (ld. (1.28) és (1.36()) egyenletek). Megjegyzendő, hogy egy csővezeték jelleggörbe nem egyetemes, csak a hálózat adott pontjából nézve értelmezhető; illetve a cső két végén lévő esetleges fogyasztások is befolyásolják a jelleggörbét. A fenti (1.27) egyenlet jobb oldala ρg-vel osztva, a csővezeték szállítómagasság-igényét kielégítő **szivattyú szállítómagassága** (ld. továbbá a következő alfejezet), bal oldalát szintén ρg-vel osztva pedig megkapjuk a **csővezeték jelleggörbét**, ld. (1.28) egyenlet. (Feltételezve, hogy a keresztmetszet nem változik, az átlagsebesség sem változhat a cső mentén, így ilyen esetben a sebességet tartalmazó tagok kiesnek a csővezeték jelleggörbéből.) Így azt kapjuk, hogy

$$H_{cs\H{o}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (h_2 - h_1) + \frac{\Delta p'}{\rho g} \tag{1.28}$$

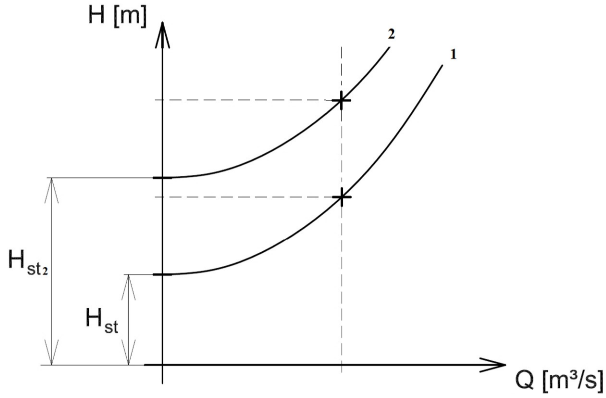
A csővezeték jelleggörbe első két tagja, a stacionárius esetben állandó tartálynyomáskülönbség, és a geodetikus magasságkülönbség állandó értékek. H_{stat}-ot statikus szállítómagasságigényként szokás definiálni. A harmadik tag viszont a térfogatáram Q függvénye ($Q = vA$).

$$H_{cs\H{o}} = H_{stat} + \Delta h'(Q), \tag{1.29}$$

A térfogatáram iránya sem hanyagolható el azonban, emiatt a jelleggörbe a következő egyszerű, általános alakban írható fel:

$$H_{cs\H{o}} = A + BQ|Q|, \tag{1.30}$$

ahol $H_{cs\H{o}}$ a csővezeték szállítómagasság-igénye, A és B konstansok; a négyzetes függés pedig az (1.16) összefüggés alapján belátható. Az abszolút érték használatával pedig a veszteséges tag mindig megfelelő előjelű lesz.
A fentiek szemléltetésére nézzük az alábbi két példát.
1) példaként vegyünk az előző, 1.4. ábrán bemutatott medence-szivattyú-csővezeték rendszer-medence felépítésű hálózatot. Ekkor a szivattyú adott betáplálásához felrajzolható a csővezeték parabola alakú jelleggörbéje (1.5. ábra).



1.5. ábra. Tipikus csővezeték jelleggörbe.

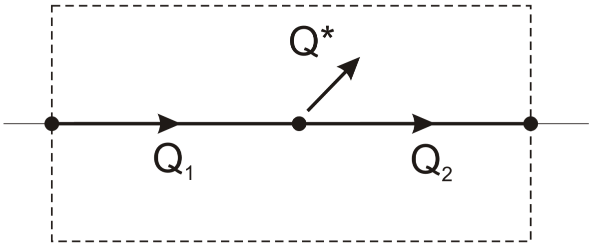
A kiválasztott névleges térfogatáramhoz leolvasható a rendszer szállítómagasság-igénye (1. görbe, szaggatott vonallal jelölve), amit a szivattyú elégít ki. Amennyiben a rendszeren változtatunk (pl.: a végmedence nyomása módosul, 2. görbe), a jelleggörbe is megváltozik, ugyanakkora Q térfogatáram mellett más lesz a szállítómagasság-igény ($H_{cs\H{o}}$).
2) példaként tekintsünk egy egyszerű, két sorosan kapcsolt csőből álló rendszert, a csöveket összekötő csomópontból Q^* fogyasztással. (1.6. ábra).

Az első szakasz általános jelleggörbéje:

$$H_{cs\H{o}1} = A_1 + B_1 Q_1 |Q_1|, \tag{1.31}$$

a második szakaszé:

$$H_{cs\H{o}2} = A_2 + B_2 Q_2 |Q_2|. \tag{1.32}$$



1.6. ábra. Két csővezeték soros kapcsolása.

Mivel a második szakaszon átáramló térfogatáramra igaz, hogy: $Q_2 = Q_1 - Q^*$, a két csőből álló rendszer eredő jelleggörbéje a következőképpen írható fel:

$$H_{eredő} = A_1 + B_1 Q_1 |Q_1| + A_2 + B_2 (Q_1 - Q^*) |Q_1 - Q^*| . \tag{1.33}$$

Nézzük meg, hogyan alakul ez különböző nagyságú Q^* fogyasztások esetén.

$$H_{eredő} = \begin{cases} A_1 + A_2 + (B_1 + B_2) Q_1^2 & \text{ha} \quad Q^* = 0 \\ A_1 + A_2 + B_1 Q_1^2 & \text{ha} \quad Q^* = Q_1 \\ ??? & \text{ha} \quad Q^* = 2Q_1 \end{cases} \tag{1.34}$$

Az utolsó esetben a második csövön megváltozik az áramlás iránya! Tapasztalatként tehát elmondható, hogy a rendszerben lévő fogyasztások megváltozása módosítja a rendszer jelleggörbét. A jelleggörbék térfogatáram négyzetével arányos tagja magában foglalja az összes áramlási veszteségből fakadó szállítómagasság-igényt.

1.1.9. Szivattyú jelleggörbe

A szivattyút a hidraulikai rendszerekben nyomásfokozásra használjuk. A fenti alfejezetben, a csővezeték-rendszer jelleggörbe levezetésekor már szerepelt a **szivattyú szállítómagasságának** fogalma, amely a csővezeték szállítómagasság-igényének fedezésére szolgál. Az 1.4. ábrához tartozó példa esetében az alábbi összevont egyenletig jutottunk:

$$p_2 - p_1 + \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g (h_2 - h_1) + \Delta p'_{1-2} = p_N - p_S + \frac{\rho}{2}\left(v_N^2 - v_S^2\right) + \rho g (h_N - h_S) . \tag{1.35}$$

Az egyenlet jobb oldalát ρg-vel osztva kapjuk a szivattyú szállítómagasságát, amely azt mutatja meg, hogy mekkora súlyegységre vonatkoztatott energiát képes adni adott mennyiségű folyadéknak:

$$H_{sz}(Q) = \frac{p_N - p_S}{\rho g} + \frac{v_N^2 - v_S^2}{2g} + (h_N - h_S) . \tag{1.36}$$

Ezt tovább rendezhetjük, ugyanis a szivattyún átáramló térfogatáram állandó, így:

$$H_{sz}(Q) = \frac{p_N - p_S}{\rho g} + \frac{1}{2g} Q^2 \left(\frac{1}{A_N^2} - \frac{1}{A_S^2}\right) + (h_N - h_S). \tag{1.37}$$

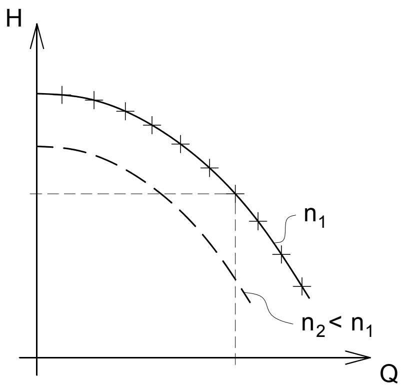
A szállítómagasság a szállított térfogatáram függvénye, a köztük lévő összefüggést a jelleggörbe adja meg. Ez az adott szivattyú jellemzője, a hidraulikai modellezés számára bemenő adatként szolgál. A modellezés végén eredményül azt kapjuk meg, hogy az előre adott görbe melyik pontján üzemel a gép, hogy kielégítse a rendszer igényeit. A jelleggörbe általában pontonként adott. (Erre $H_{sz}(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2$ alakú görbét szokás

illeszteni; de számos esetben jó közelítés, ha a_1 értékét 0-nak tekintjük.)
Változtatható fordulatszámú (ún. frekvenciaváltós) gépek üzemeltethetők másik fordulatszámon is, ekkor a jelleggörbét az affinitási törvények segítségével át kell számítani az adott fordulatszámnál jellemző görbére (1.7. ábra). Az affinitás segítségével egy n_1 fordulatszámon üzemelő áramlástechnikai gép jelleggörbéje átszámítható egy másik n_2 fordulatszámra:

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2. \tag{1.38}$$

Ha a szivattyúra jelleggörbéjére egy másodfokú polinomot illesztünk, valamint felhasználjuk az affinitási törvényeket, akkor a fenti egyenletet az alábbi alakra hozhatjuk.

$$H_2 = a_0 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + a_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right) Q_2 + a_2 Q_2^2 \tag{1.39}$$



1.7. ábra. Szivattyú jelleggörbe

A fent említett frekvenciaváltók a szivattyúk és egyéb áramlástechnikai gépek hajtását biztosító villanymotorok fordulatszámának szabályozására szolgálnak. A következő célokra használhatóak fel:
- fejlettebb folyamatvezérlés,
- energiahatékony működés biztosítása, energiafogyasztás csökkentése,
- a motorvezérelt alkalmazások mechanikus terhelésének csökkentése,
- különféle villanymotoros megoldások működésének optimalizálása,
- energiaátalakítás természetes és megújuló energiaforrásokból.
A frekvenciaváltók elnevezés mellett szokás pl.: változó, állítható fordulatszámú hajtásoknak, váltóátalakítóknak, frekvenciaátalakítóknak, inverterereknek és energiaátalakítóknak is nevezni [2].

1.2. Mintakérdések az áramlástani összefoglalóhoz

M1.1. Egy 200 mm belső átmérőjű csőben földgáz áramlik, a tömegáram $\dot{m} = 50\ kg/s$. A földgáz specifikus gázállandója $R = 0{,}5\ kJ/(kgK)$, állandó nyomáson mért fajhője $c_p = 2{,}34\ kJ/(kgK)$ fajhőviszonya pedig $\kappa = 1{,}27$. A csővezeték elején a nyomás 50 bar, a hőmérséklet 200 C, a végén a nyomás 20 bar, a hőmérséklet 20 C. Számítsa ki az áramlási sebességet a cső elején és végén! *(Megoldás: 75,3 és 116,6 m/s.)*
M1.2. Egy csőben valamilyen közeg áramlik. Milyen esetben egyenlőek a két végén (a) a tömegáramok, (b) a térfogatáramok és (c) a sebességek?
M1.3. Ismertesse a Bernoulli-egyenletet, és adja meg az alkalmazásának feltételeit!
M1.4. Definiálja a Reynolds-számot!
M1.5. Definiálja az egyenes cső csősúrlódási tényezőjét! Adja meg lamináris és turbulens esetben, hidraulikailag sima csövet feltételezve a tényező értékét!
M1.6. Mitől függ a csősúrlódási tényező értéke érdes cső esetén, turbulens tartományban?
M1.7. Definiálja a hidraulikai átmérőt és a homokérdességet!
M1.8. Egy 100 mm belső átmérőjű ivóvíz-hálózati csőben 84,8 m^3/h térfogatáramot mérünk. A csősúrlódási tényező becsléséhez fontos-e a cső belső felület-érdességének ismerete? Válaszát indokolja! (A víz kinematikai viszkozitása 1 mm^2/s.) *(Megoldás: v=3 m/s, Re=300000, igen.)*
M1.9. Egy 8 mm belső átmérőjű hidraulika tömlőben 1,5 $liter/perc$ térfogatáramot mérünk. A csősúrlódási tényező becsléséhez fontos-e a cső belső felület-érdességének ismerete? Válaszát indokolja! (A hidraulikaolaj kinematikai viszkozitása 20 mm^2/s.) *(Megoldás: v=0,5 m/s, Re=200, nem.)*
M1.10. Vázolja és magyarázza el a Moody-diagramot!
M1.11. Egy 8 m hosszú, $D = 40\ cm$ átmérőjű egyenes csőszakaszon $h_1 = 1\ m$ magasságú pontból 1 bar nyomású pontból $h_2 = 2\ m$; 2,5 bar nyomású tartályba kívánunk vizet szállítani ($\lambda = 0{,}025$). Vázolja diagramon az 1. pontban a rendszer szállítómagasság-igényét! *(Megoldás: $H = 16{,}29 + 1{,}614Q^2$.)*

2. fejezet

Történeti bevezetés a vízhálózatokhoz

Ahhoz, hogy jobb rálátásunk nyíljon arra, hogy a továbbiakban tanultak miért bírnak jelentőséggel, és a műszaki terület hogyan fejlődött idáig, érdemes egy kis történeti áttekintést tenni.

2.1. Az ivóvízellátás rövid története

Az első vízelosztó csőhálózatok az ókori Krétán épültek, és bár ennél korábbról is vannak India és Mezopotámia területén talált csatornák, valószínűleg ezek a legkorábbi ivóvíz csővezetékek [3][4]. Kr.e 250 körül kiáltott föl Archimedes, hogy 'Heuréka', és ezzel megszületett a róla elnevezett, első vízzel kapcsolatos fizikai törvény. Kr.u. 100 körül Rómában már gravitációs elven működő aquaduktokon keresztül szállították a vizet a városlakók számára.

2.1. ábra. Aquincumi vízvezeték rekonstruált darabja (Forrás: Wikipédia)

Átugorva a középkor sötét századait 1455 a következő állomás, amikor az első öntöttvas csövet gyártották Siegerlandban (Németország). Ilyen csöveket fektettek le a 17. században Boston városában, és XIV. Lajos francia király Versailles-i palotájában is.

1732-ben Henri Pitot a Szajna folyón próbálta ki először áramlási sebességmérésre alkalmas eszközét, 1738-ban Daniel Bernoulli publikálta Hidrodinamika című művét. 1752-ben Leonard Euler gondolta tovább az energiaegyenletet, és megszületett az Euler-egyenletként ismert összefüggés.

Még szintén ebben az évszázadban Pennsylvaniában épült meg az USA első ivóvízhálózata kifúrt, összekapcsolt fatörzsekből (ld. 2.2. ábra) [5], amiket később acélgyűrűkkel erősített donga csövekre cseréltek (ld. 2.3. ábra). 1764-ben munkába állt az első gőzgép hajtotta szivattyú a bethlehemi (USA) vízhálózatban. Antoine Chezy pedig 1770-ben írta le a csatornabeli nyomásesés összefüggését.

A római korban Pannónia területén is épültek vízvezetékek. Ezt követően a török hódoltság idejéről tudjuk, hogy kutak, fürdők, víztározó medencék létesültek országszerte. A „modern” értelemben vett vízvezetékrendszer kiépítése pedig hazánk nagyvárosaiban is a 18-19. században indult meg.

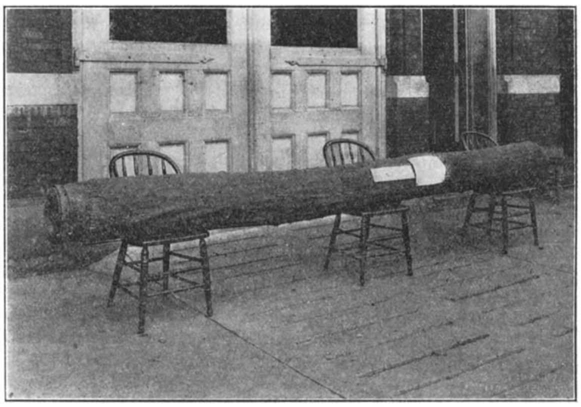


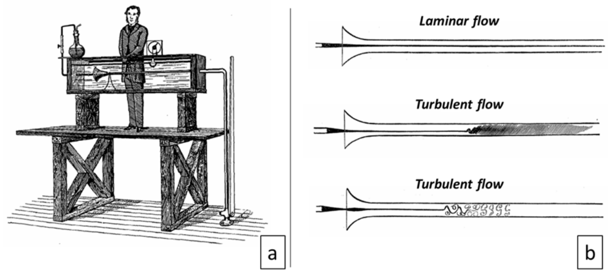
FIG. 5.—BORED HEMLOCK WATER PIPE, LAID ABOUT 1754.

2.2. ábra. Cső kivájt fatörzsből 1754-ből az USA-ból [5].

2.3. ábra. Acélgyűrűkkel erősített donga cső az USA-ból (Forrás: Wikipédia).

A 19. század közepén kidolgozták a Hagen-Poissuille törvényt (1839); St. Venant mozgásegyenletét (1843) Louis Navier, George Stokes, Augustin de Cauchy és Simeon Poisson gondolta tovább: az általuk leírt összefüggést ismerjük ma „Navier-Stokes egyenletek” néven; és megszületett a Darcy-Weisbach közelítés a veszteségtényezőre (1845). 1883-ban Osborne Reynolds két csoportra bontotta az áramlásokat, amit a később róla elnevezett Reynolds-számmal számszerűsíteni is tudott (ld. 2.4. ábra) [6].

Már a 20. században, 1906-ban alkották meg a Hazen-Williams összefüggést a súrlódási veszteség empirikus becslésére. 1900-1930 között a határréteg elmélet indult óriási fejlődésnek. Ennek legnagyobb alakjai Ludwig Prandtl és tanítványai: Kármán, Nikuradse, Blasius és Stanton voltak. Munkájukat a Boundary Layer Theory című mű foglalta össze. A Colebrook-White összefüggés 1938-ban született meg, Lewis Moody pedig



2.4. ábra. Reynolds kísérleti elrendezése (Forrás:[6]).

1944-ben publikálta a Princetown Egyetemen a csősúrlódási tényezőnek azóta is használt grafikus reprezentációját. Ezt 1976-ban egészítette ki a Swaame-Jain egyenlet, ami explicit közelítést ad a csősúrlódás becslésére, nagyban leegyszerűsítve és meggyorsítva a csőhálózatszámítási feladatokat.

1914-ben megszületett az első ivóvízszabvány az USA-ban, rá hét évre pedig kiadták az első „Hydraulic Institute Standards" szivattyú szabványt. A '20-as évektől kezdődően az öntöttvas csöveket cement béleléssel látták el, hogy jobban ellenálljanak a korróziónak. 1956-ban találták fel a „push-on" csatlakozást (egymásba tolt csövek), amivel nagyban meggyorsult a hálózatok kiépítése. 1963-ban megszületett az első amerikai szabvány a PVC csövekre, amit 1975-ben újabb követett, amiben az öntöttvas csövekhez való csatlakozást is szabványosították.

Később az ivóvíz minőségi kérdései is előtérbe kerültek, ugyanis több városban okoztak problémát a tisztavíz hálózatba bekerülő kemikáliák, méreganyagok. Ez a '70-es évektől új ivóvíz-minőségi modellek kidolgozásához és az USA-ban perekhez vezetett (amik pl. a népszerű A Civil Action (Zavaros vizeken) és az Erin Brokovich filmek témájául is szolgáltak).

2.1.1. Ivóvízhálózatok modellezésének története

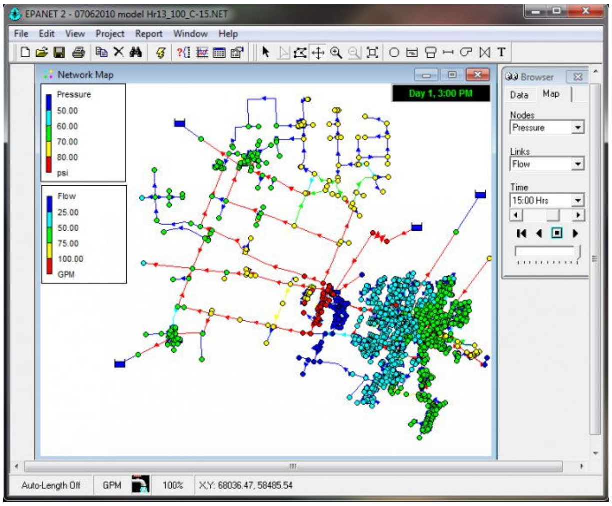
Már az első számítógépek megszületése előtt is alkottak egész hálózatokra vonatkozó számítási modelleket: Hardy Cross (1936) és Roy Hunter (1940) becsléseit publikálták először. Az 1950-es évektől számítógépes vízhálózat analízissel próbálkoztak (ilyen például a Mcllroy Network Analyzer (ld. 2.5. ábra) [7]), de az első használható digitális modellek a '60-'70-es években Fortran programozási nyelven íródtak. Fowler, Jeppson, Howard, Shamir és Sarikelle is alkottak ilyen számítási modelleket [8]

Az 1970-es évektől elkezdődtek a kísérletek a vízhálózat optimális felépítésének számítására. A modellezés teret nyert; az először csak stacionárius hálózatszámítást követte a tranziens jelenségek leírása. 1976-ban megjelent Roland Jeppson: Analysis of Flow in Pipe Networks c. műve, ami az addigi numerikus módszereket mutatja be. Tanszékünkön Vajna Zoltán akadémikus 1979-ben írta meg Nagyméretű hurkolt csőhálózatok számítása c. munkáját. Almássy, Füzy és Kullmann, valamint Almássy-Budavári-Vajna a hálózat áramlástani leírásához ág-, csomóponti- és hurokegyenleteket írtak fel, és hoztak létre a gyakorlatban jól alkalmazható eljárást, ld. [9]. Továbbá Halász-Kristóf-Kullmann Áramlás csőhálózatokban című munkájukban [9] foglalták össze a hálózatszámítás módszereit.

A 80-as évektől megjelenő személyi számítógépek meggyorsították a hidraulikai elemzést. Ivóvíz minőségi modellek fejlesztése indult meg, alkalmazni kezdték a gradiens módszert. 1991-től a GPS technológiák is megfizethetővé váltak, így a hidraulikai modellek koordinátáinak meghatározásának ez lett az eszköze. 1993-ban az USA-ban kifejlesztették az EPANET rendszert (2.6. ábra), ami az Environmental Protection Agency által

2.5. ábra. McIlroy Network Analyzer üzem közben 1958-ban (Forrás: [7]).

kifejlesztett ingyenes kvázi-permanens üzemszimuláción alapuló hálózathidraulikai modell [10].



2.6. ábra. Képernyőkép az EPANET rendszerből (Forrás: [10]).

A Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék és a Sys-Team ZRt. által közösen fejlesztett hidraulikai szimulációkra készült ingyenes programcsomag, a Staci jelenlegi formájában az ezredforduló után készült el, fejlesztésében Pandula és Hős vállalt nagy szerepet.

Napjainkban a rendszerek automatikus kalibrációja jelent kihívást, amihez különböző optimalizációs eljárásokat használnak a kutatók. 2001 óta fokozott problémát, nemzetbiztonsági kihívást jelent továbbá a vízbiztonság kérdése, amire minden országban igyekeznek nagy súlyt fektetni. Emellett Magyarország 2004-es Európai Uniós csatlakozását követően még inkább felértékelődött a háztartások tiszta ivóvízzel történő ellátásának kérdése.

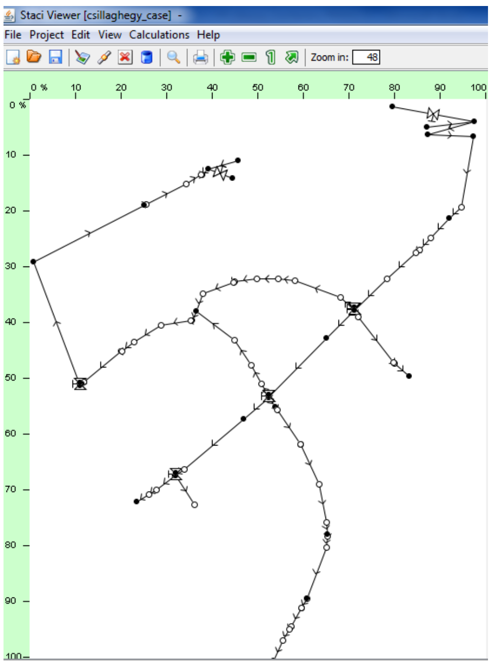
3. fejezet

Állandósult áramlás modellezése nyomott üzemű hálózatokban

Adott egy hidraulikai rendszer (HR), amelyben a következő feltételezésekkel élünk:

- A közeg összenyomhatatlannak tekinthető (adott nyomásviszonyok mellett a sűrűség relatív változása nem nagyobb, mint 20 százalék), vagyis $\rho = konstans$.
- A közeg kitölti a szerelvényeket (teltszelvényű az áramlás).
- A közeg newtoni tulajdonságú.
- A folyamat stacionáriusnak tekinthető.
- A hálózat hurkolt vagy sugaras felépítésű is lehet (azaz nincs megkötés a topológiára).

Ilyen rendszer például egy település ivóvízhálózata, ahol nyomásfokozó szivattyúk biztosítják a megfelelő (1,5-6 bar közötti) nyomást ahhoz, hogy a kívánt mennyiségű és minőségű tiszta víz jusson a rendszer minden fogyasztási pontjába. A következő ábrán egy ilyen valós kistelepülés hálózata látható a Staci programból.



3.1. ábra. Csillaghegy (Sopron melletti) kistelepülés ivóvíz hálózatának vonalas vázlata (Forrás: www.hds.bme.hu/staci-web)

Az ilyen hálózatok esetében a következő kérdések merülhetnek fel:
- Mekkora nyomások vannak a rendszerben? Mindenhol megvan-e a szükséges 1,5-2 bar, hogy a háztartások csaptelepeiből megfelelő nyomású víz jusson a fogyasztóhoz?
- Melyik csövön milyen irányban áramlik a víz? Milyen sebességgel? (Amennyiben nagy a sebesség, nagyok lesznek az áramlási veszteségek, amennyiben túl kicsi, a víz túl sokáig marad a csővezeték rendszerben, ami a kórokozók felszaporodásához vezet.)
- Mekkora az egyes csövek fajlagos nyomásesése?
- Már meglévő hálózat esetén milyen szivattyút válasszunk?
- Már meglévő hálózaton egy beavatkozás miként változtatja meg a kérdéses mennyiségeket (a „hidraulikát")?
- Mekkora a szükséges ellennyomó medence mérete ahhoz, hogy az esetleges csúcsfogyasztási időszakban is minden fogyasztóhoz jusson elegendő víz?
- Minden tűzcsapon megvan-e a szükséges nyomás?

Bemenő adatként a modellezéshez rendelkezésre állnak a hálózat elemeinek adatai, úgy mint:
- csövek: hossz, átmérő, csősúrlódási tényező/érdesség;
- könyökök: veszteségtényező;
- tolózár, szelep: fojtási tényező;
- medence: alapterület, fenékszint, vízfedettség;
- szivattyú: jelleggörbe;
- csomópontok: geodetikus magasság, fogyasztás,
stb. A témával számos szakirodalmi forrás foglalkozik, néhány példaként említjük az alábbiakat [9, 11, 12, 13, 14, 15].

3.1. A hálózat építőelemei

A hidraulikai hálózatokat ág- és csomóponti elemekből építhetjük fel. Az **ágelemek** a csövek, szerelvények, medencék és a szivattyúk. A **csomópontok** pedig ezek kapcsolódási pontjai.

A csövek egy mai modern nyomottvizes ivóvízhálózatban általában PVC és KPE anyagból készülnek, de találkozhatunk még régi öntöttvas vezetékekkel is. Ezek soros, sugarasan vagy hurkoltan elágazó rendszert alkotnak. A csövek közmű alagutakban vagy a földbe fektetve hálózzák be a településeket (3.2. ábra).

Szerelvény minden könyök, szűrő, tolózár, stb. Óriási szerepük van az üzemvitel szempontjából, míg modellezési szempontból áramlási ellenállásuk is fontos szerepet kap (3.3. ábra).

A „medencék" összefoglaló név alatt többféle víztározót értünk. Ide tartoznak a víztornyok, és a magas pontra (tipikusan domb/ hegy gyomrába) telepített ún. magastárolók, melyek feladata a szükséges hálózati alapnyomás tartása (3.4. és 3.5. ábra). (A hidrosztatika alapegyenletéből tudjuk, hogy egy 30 m magas víztorony durva becsléssel $\rho g H = 3 \cdot 10^5 Pa = 3bar$ alapnyomást szolgáltat a rendszernek.) Léteznek továbbá mélytárolók is, ezeknek nincs nyomástartó szerepük, valóban csak a tisztavíz tárolásra szolgálnak.

A szivattyúk általában szivattyúgépházakba rendezve szolgáltatják a kellő nyomást és térfogatáramot a rendszerek elején, vagyis nyomásfokozó szerepük van. Az előttük lévő medencékből (szívómedence) juttatják tovább a vizet a hálózat különböző pontjaira. A valóságban sokszor egy-egy vízhálózati övezetre szakzsargonnal élve „több gépház is termel", vagyis a hálózat különböző pontjain van betáplálás. Egy hálózatban több övezetre (kb. 50-70 méterenkénti „lépcsőzésre") azért van szükség, hogy a geodetikus magasságkü-

3.2. ábra. Közműalagút Pécsen (Forrás: www.tettyeforrashaz.hu)

3.3. ábra. Szerelvény bekötés, T-idom és tolózár (Forrás: www.moe.hu)

3.4. ábra. A Budafoki víztorony (Forrás: ittlakunk.hu)

lönbségek miatt ne legyenek túl nagy nyomások a rendszerben. Ezzel elkerülhető, hogy több 10 bar belső nyomásra kelljen méretezni a csővezetékrendszert. A szivattyúk menetét általában korszerű üzemirányítási rendszeren keresztül szabályozzák a szivattyúkat hajtó villamos motorok fordulatszámának változtatásával.

A hálózat végpontjain a fogyasztók veszik el a vizet, illetve kisebb vízfogyasztás esetén az is előfordul, hogy a szivattyúk által betáplált mennyiség a hálózat végpontján lévő

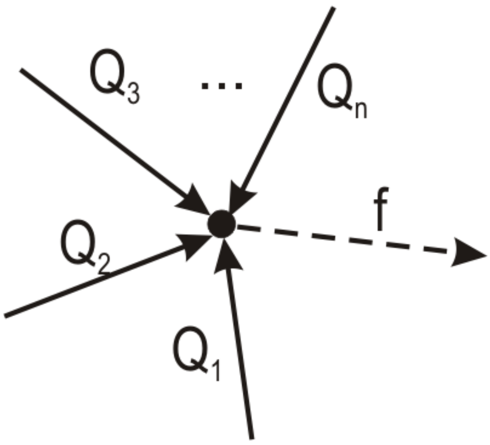
3.5. ábra. Gruber József Víztározó a Gellért-hegy gyomrában (Forrás: flickr.com)

3.6. ábra. Soproni vízmű gépház (Forrás: sopviz.hu)

medencét, a végmedencét tölti.

3.1.1. Csomópontok

A csomópontban találkozik N db irányított ágelem. A beérkező és kilépő ágakon kívül a csomóponthoz tartozik egy oda koncentrált fogyasztás: f,$[m^3/h]$.
Definíció szerint a csomópontba érkező áramlást tekintjük pozitívnak, a kilépőt negatív-

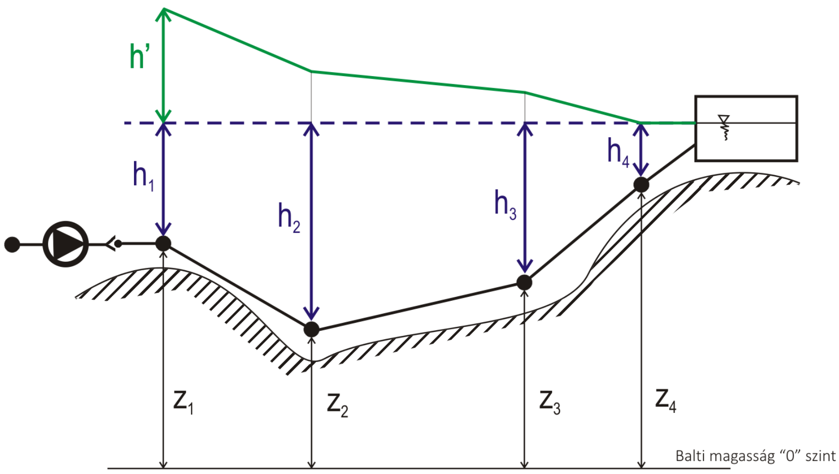


3.7. ábra. Csomópont

nak. A csomópontokat a kontinuitási egyenlettel írhatjuk le:

$$f = \sum_{i=1}^{N} \delta_i Q_i, \tag{3.1}$$

ahol $\delta_i[-]$, 1, ha a csomópont az i-dik cső végpontja; -1, ha a kezdőpontja. A csomópontok rendelkezésre álló (bemenő) adatai: $z[m]$ geodetikus magasság és $f[m^3/h]$ fogyasztás. A modellezés után megkapott (eredmény) adat: $p[Pa]$ csomóponti nyomás, amit vízhálózatok modellezésekor szokásos vízoszlop méterben megadni: $h[m]$. Jelölése az angol „head” kifejezésből ered, $h = p/(\rho * g)$-vel kapható meg.
Tekintsük a következő egyszerű csővezeték rendszert (3.8. ábra), ami egy dombos vidéken halad végig.



3.8. ábra. Egyszerű csővezeték rendszer nyomásvonalai

Az egyes csomópontok geodetikus magasságai egy egységesen választott referencia szinthez képest értendők; szokás pl. a térinformatikai rendszerekben megszokott Balti-tenger közepes szintjét 0-nak tekinteni.

Álló szivattyú esetén (a szivattyú nyomócsonkjánál található visszacsapó szelep megakadályozza a visszaáramlást) a csomópontok nyomását (amit nyomásvonallal is ábrázolhatunk) a hegytetőn lévő medence vízszintje határozza meg a hidrosztatika alapelve alapján. Vagyis amennyiben képzeletben, folyadékkal telt vékony üvegcsövekkel mérnénk meg a pontokban a nyomást, egy medence vízszintjével megegyező magasságú vízszintes nyomásvonal lenne az eredmény (az ábrán kékkel jelölve).

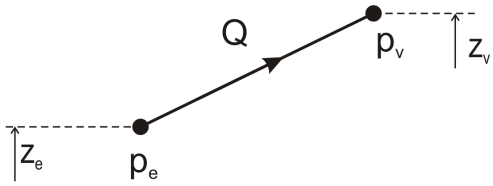
Ha a **szivattyú jár**, a hidraulikai rendszer úgy van egyensúlyban, ha a szivattyú akkora szállítómagasságot „termel”, amivel az egyes csövek nyomásveszteségeit leszámolva a csővezeték rendszer végén pontosan a medence vízszintjének megfelelő érték adódik, vagyis a szivattyú fedezi a magasságkülönbségből és a veszteségből származó szállítómagasságigényt (zöld vonal).

3.1.2. Ágelemek

A hidraulikai modell ágelemei közé tartoznak a csövek, tolózárak, szivattyúk, medencék. Közös tulajdonságuk, hogy irányítottak (az irányuk tetszőlegesen felvehető, de a térfogatáram előjeles lesz), leíró egyenletük alakja pedig: $p_e - p_v = f(Q)$.

Cső

Az ágelemek közül a csövek áramlási veszteségei adják a legjelentősebb veszteséget a rendszerben (major losses). A cső eleje és vége között felírható a Bernoulli-egyenlet. Mivel a csőátmérő nem változik a hossz mentén, a kontinuitási egyenlet miatt az áramlási átlagsebesség is változatlan, így a sebességet tartalmazó tagok kiesnek. (Ha egy csővezeték



3.9. ábra. Cső ágelem

átmérője változik, egy csomóponttal kettéválasztva modellezzük azt.):

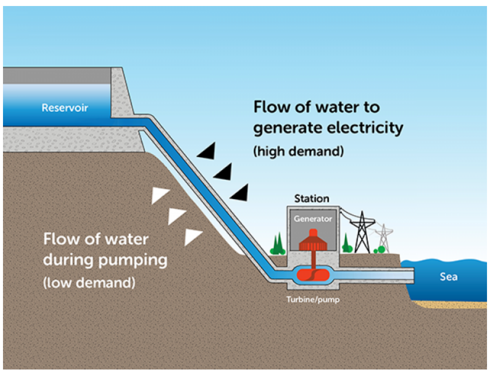
$$p_e + \rho g z_e = p_v + \rho g z_v + \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \frac{Q\,|Q|}{A^2}. \tag{3.2}$$

ahol z_e és $z_v[m]$ a geodetikus magasságok a cső elején és végén. Ebből az egyenes cső ágegyenlete:

$$p_e - p_v = \rho g(z_v - z_e) + \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \frac{Q\,|Q|}{A^2} = f(Q). \tag{3.3}$$

Megjegyzendő, hogy a fenti egyenletekben szereplő Q|Q| helyett nem írhatunk Q^2-et, ugyanis a modellezés ezen fázisában a közeg áramlási irányát nem ismerjük.

Továbbá az áramlás iránya a hálózat működésétől függ. Képzeljünk el egy szivattyú-tározós erőművet és feltételezzük, hogy a szállítandó víz térfogata kitölti a rendelkezésre álló csőhálózat keresztmetszetét (telt szelvényű áramlás). Ekkor nagyobb részterhelés esetén, pl.: csúcsidőszakban a felső víztározóban lévő víz lefelé fog folyni. Ez a víztömeg hajtja meg a turbinát, átalakítva ezzel a víz helyzeti energiáját villamos energiává. Abban az esetben pedig, amikor „energiatöbblet” keletkezik a villamos hálózatban, az eddig turbinaként üzemelő áramlástechnikai gépet szivattyú üzembe kapcsolják, így a víz áramlási, és egyben a térfogatáram iránya is megfordul. Ekkor a szivattyú az alsó rezervoárból lévő víztömeget a felsőbe juttatja (3.10. ábra)

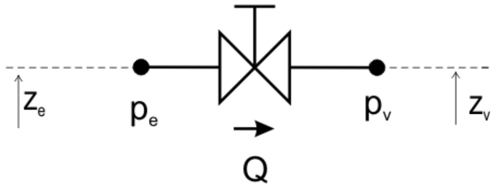


3.10. ábra. Szivattyús-tározós erőmű (Forrás:https://www.energy-storage.news/news/energyaustralia-ponders-worlds-largest-seawater-pumped-hydro-energy-storage).

Áramlási ellenállások

Ide soroljuk az összes csőszerelvényt, csőívet, úgy mint: tolózár, szűrő, fojtás, könyök, stb.. Ezek is minden esetben képviselnek áramlási veszteséget, de jellemzően kisebb mértékűt, mint az egyenes csövek veszteségei (minor losses). Esetükben gyakori, hogy a geodetikus magasságkülönbség elhanyagolható (vízszintesen kerülnek beszerelésre), így a magasságkülönbségből adódó tag zérusnak tekintendő. Jelleggörbéje a megszokott jelölésekkel:

$$p_e - p_v = \rho g(z_v - z_e) + \zeta\frac{\rho}{2}\frac{Q\,|Q|}{A^2} \approx \zeta\frac{\rho}{2}\frac{Q\,|Q|}{A^2}. \tag{3.4}$$



3.11. ábra. Tolózár ágelem.

Ahogyan már az előző fejezetben szerepelt, a tolózár és a fojtás veszteségtényezője függ attól, hogy a szerelvény mennyire van nyitva (teljesen nyitott állapotban is van veszteség). A tényező meghatározásához a gyártó által megadott jelleggörbét szokás használni.

A tipikus veszteségtényező értékeket találhatunk csőkönyökökre, diffúzorokra, T-elágazásokra, stb. különböző magyar ([1]) vagy angol ([16]) nyelvű szakkönyvekben; néhány példát tartalmaznak az alábbi (3.1 és 3.2) táblázatok.

Iránytörés szöge	15 °	22,5 °	30 °	45 °	60 °	90 °
sima csőfal	0,04	0,07	0,11	0,24	0,47	1,13
érdes csőfal	0,06	0,15	0,17	0,32	0,68	1,27

3.1. táblázat. Csőkönyökök tipikus veszteségtényező értékei különböző iránytörési szög esetén, [1] alapján.

Tolózár, zárás mértéke	0	1/4	1/2	3/4	7/8
Veszteségtényező	0,1-0,2	0,3	2,1	17	98
Csappantyú (pillangószelep), zárás mértéke	10 °	20 °	40 °	60 °	70 °
Veszteségtényező	0,5	1,5	11	120	750

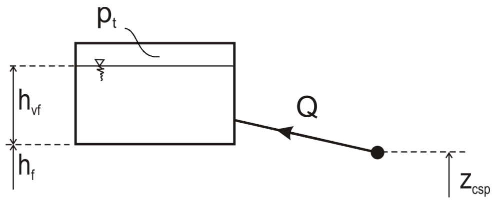
3.2. táblázat. Zárószerelvények tipikus veszteségtényező értékei, [1] alapján.

Megjegyzendő, hogy használatos mennyiség a veszteség jellemzésére a K_v tényező is, amely a vizsgált idom két oldalán fellépő 1 *bar* nyomáskülönbség hatására kialakuló térfogatáramot adja meg m^3/h-ban.

Medence

A medence (víztározó, víztorony) nem tartozik a klasszikus értelemben vett ágelemek közé, inkább amolyan „félutas” az ág és csomóponti elemek között.

Nem két csomópont között helyezkedik el ugyanis, hanem csak egy bekötési pontja van, viszont az ágelemeknél megszokott módon Bernoulli-egyenletből kiindulva adódik a jelleggörbéje. A medencéhez csatlakozó csővezeték áramlási veszteségeit el szokás hanyagolni



3.12. ábra. Medence ágelem

(rövid csövet feltételezve), illetve eltekintünk a kilépési veszteségtől is, így az elemre felírható:

$$\rho g z_{csp} + p_{csp} = \rho g (h_f + h_{vf,}) + p_t, \tag{3.5}$$

ahol $z_{csp}[m]$ a medencéhez csatlakozó csomópont geodetikus magassága, $h_f[m]$ a medence fenékszintjének tengerszint feletti magassága, $h_v[m]$ pedig a medence vízfedettsége. $p_t[Pa]$ tartálynyomás gyakorta a légköri nyomás. (Az abszolút és relatív nyomás használata a modellezésnél következetességet igényel, és az eredmények értelmezésénél is fontos szerepet játszik.)
Egy hálózatban természetesen több medence is lehet. Tipikusan a hálózat elején lévő medencét szokás *szívómedencé*nek hívni, hiszen innen szállít a szivattyú, ide csatlakozik annak szívócsonkja. A hálózat végén lévő medencét (végmedencét) *ellennyomó medencé*nek nevezik. A gyakorlatban ez általában egy magas ponton lévő víztározó, vagy egy 25-40 m magas víztorony, ami hidrosztatika alapelvének megfelelően egy alapnyomást ad a rendszernek. Ezzel biztosítja a szivattyú kiesése esetében is a szükséges minimális nyomást; illetve a kellő víztérfogatot is abban az esetben, amikor a fogyasztások többet igényelnek, mint amit a szivattyú szállítani képes.

Szivattyú
Ahogyan az előző fejezetben szerepelt a hidraulikai rendszerekben a szivattyú nyomásfokozásra szolgál. Szállítómagassága mutatja meg, mekkora „energiát” képes adni adott mennyiségű folyadéknak, mennyivel növeli meg az áramlástechnikai gép a közeg Bernoulli-entalpiáját ($e_B[Pa]$):

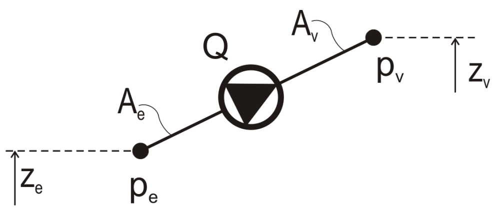
$$H = \frac{1}{\rho g}(e_{Bv} - e_{Be}). \tag{3.6}$$

Természetesen a szokásos jelölésekkel élve - hasonlóan az előző fejezethez - felírható:

$$\rho g H = p_v - p_e + \rho g (z_v - z_e) + \frac{\rho}{2} Q^2 \left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2} \right). \tag{3.7}$$

Az egyenletet ρg-vel osztva kapjuk:

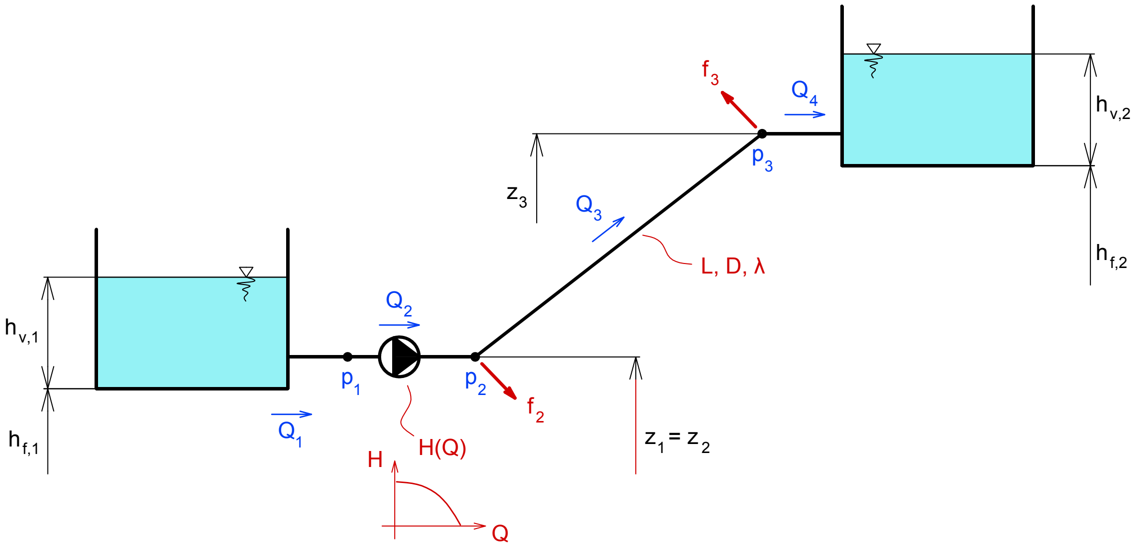
$$H(Q) = \frac{p_v - p_e}{\rho g} + (z_v - z_e) + \frac{1}{2g} Q^2 \left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2} \right). \tag{3.8}$$



3.13. ábra. Szivattyú ágelem

3.1.3. Példa hálózat

Tekintsük a következő egyszerű példahálózatot. Legyen a légköri nyomás: $p_0 = 0$, vagyis a számítások során minden legyen túlnyomásban.



3.14. ábra. Példa csővezeték rendszer.

Adott az ábrán látható topológia, vagyis az elemek, és azok kapcsolódási gráfja, továbbá az előzetesen felvett irányok az ágelemek esetében. Illetve a következő (ábrára pirossal felírt) paraméterek: csővezeték adatok (L,D,λ), csomóponti fogyasztások (f_2, f_3), szivattyú jelleggörbe ($H(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2$ alakban) és a geodetikus magasságok ($h_{f,1}$, $h_{f,2}$, z_1, z_2, z_3), valamint a medence vízszintek ($h_{v,1}$, $h_{v,2}$). Továbbá mindkét medence a légkörre nyitott, azaz felettük p_0 légköri dnyomás uralkodik.

Ismeretlenek a p_1, p_2, p_3 csomópont nyomások, ebből n_{csp} darab van; és a Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 térfogatáramok, amiből $n_{ág}$ darab van. Az ismeretlenek száma tehát: $n_{ism} = n_{csp} + n_{ág}$. A hidraulikai viszonyokat leíró **egyenletek**: n_{csp} db kontinuitási egyenlet és $n_{ág}$ db ágegyenlet; amiből szintén $= n_{csp} + n_{ág}$ db van. Így az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik egymással, a feladat megoldható.
$n_{csp} = 3$ db kontinuitási egyenlet:

$$Q_1 - Q_2 = 0 \tag{3.9}$$

$$Q_2 - Q_3 = f_2 \tag{3.10}$$

$$Q_3 - Q_4 = f_3 \tag{3.11}$$

$n_{ág} = 4$ db ágegyenlet:

$$(h_{f1} + h_{v1})\rho g = p_1 + z_1 \rho g \tag{3.12}$$

$$\rho g H(Q_2) = p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2} Q_2^2 \left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2} \right) \tag{3.13}$$

$$p_2 + \rho g z_2 = p_3 + \rho g z_3 + \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \frac{Q_3 \left| Q_3 \right|}{A^2} \tag{3.14}$$

$$(h_{f2} + h_{v2})\rho g = p_3 + z_3 \rho g \tag{3.15}$$

3.2. A leíró egyenletrendszer

A hidraulikai modellezéshez adott n_{csp} db kontinuitási egyenlet típusú csomóponti egyenlet és $n_{ág}$ db ágegyenlet típusú egyenlet. Az ágegyenletekben azonban megjelenik a térfogatáram, és annak abszolút értéke, valamint négyzete is. Ezek nemlinearitása miatt az egész rendszer egy **jól definiált, nagyméretű, nemlineáris algebrai egyenletrendszer**t alkot, analitikus megoldása nem ismert.
Az egyenletrendszer áll csomóponti egyenletekből, melyek alakja:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i Q_i = f, \tag{3.16}$$

és ágegyenletekből:

$$p_e - p_v = f(Q). \tag{3.17}$$

(Vigyázat! Az első egyenletben f a csomóponti fogyasztást, míg a másodikban a függvénykapcsolatot jelenti.) Ez utóbbi általános alakban a következő formában adható meg:

$$p_v - p_e + AQ + BQ^2 + CQ\,|Q| = D, \tag{3.18}$$

ahol A,B,C,D bemenő adatok által egyértelműen meghatározott konstansok. Ezen egyenletek (egyenletrendszer) megoldására az alábbiakban bemutatjuk a numerikus megoldási módszereket.

3.3. Numerikus megoldási módszerek

A továbbiakban két megoldási módszert mutatunk meg. Mindkét módszer alkalmazhatóságát bemutatjuk egy egyszerű 1D, nemlineáris algebrai egyenlet megoldására; majd azt, hogy hogyan alkalmazható nagyméretű hidraulikus rendszerek modellezése esetén. A későbbiekben használt, nemlineáris példa egyenlet legyen az ágegyenletekhez hasonlóan olyan, hogy a keresett mennyiség és abszolút értéke, illetve második hatványa is szerepeljen benne:

$$x\,|x| - 3x^2 = -4. \tag{3.19}$$

3.3.1. Linearizálás

A linearizálás módszerének alapötlete az, hogy az egyenletet lineáris egyenletté alakítjuk oly módon, hogy egy ún. „régi” értéket veszünk fel x helyére, és ezt írjuk a nemlinearitásért felelős tagokba. A kapott lineáris egyenletet megoldjuk, majd az így kapott eredményt választjuk „réginek”, és folytatjuk az iterációt mindaddig, míg a régi és az újonnan kapott érték között az általunk megadott küszöbérték alatti lesz az eltérés. Egy **általános ágegyenlet** a következő formában néz ki:

$$p_e - p_v + AQ + BQ^2 + CQ\,|Q| = D \tag{3.20}$$

Amelyik tagban szerepel Q, onnan emeljük ki:

$$p_e - p_v + Q(A + BQ + C\,|Q|) = D, \tag{3.21}$$

majd a linearizálás módszerét alkalmazva a zárójelben lévő kifejezést helyettesítsük egy előző lépésből ismert térfogatárammal, ez legyen $Q_{régi}$.

$$p_e - p_v + Q(A + BQ_{régi} + C\,|Q_{régi}|) = D. \tag{3.22}$$

Így a zárójelben is egy konstans lesz, nevezzük ezt E-nek. Ágegyenletünk így a következő, lineáris egyenletté egyszerűsödött:

$$p_e - p_v + EQ = D. \tag{3.23}$$

$Q_{régi}$ első (kezdeti) értékének megválasztása lényeges lehet, a gyakorlatban egy reális (pl. 1 m/s értékű) sebességből érdemes megbecsülni az egyes térfogatáramokat.

Nézzük meg a módszert a 3.1.3. fejezetben bemutatott példánkon. $n_{csp} = 3$ db kontinuitási egyenlet, ezek nem változtak:

$$1)Q_1 - Q_2 = 0 \tag{3.24}$$

$$2)Q_2 - Q_3 = f_2 \tag{3.25}$$

$$3)Q_3 - Q_4 = f_3 \tag{3.26}$$

$n_{ág} = 4$ db ágegyenlet, amelyek közül a szükségeseket linearizálnunk kell:

$$4)(h_{f1} + h_{v1})\rho g = p_1 + z_1 \rho g \tag{3.27}$$

Általános alakra átrendezve, majd a konstanst D_1-nek elnevezve:

$$p_1 = -z_1\rho g + (h_{f1} + h_{v1})\rho g = D_1. \tag{3.28}$$

$$5)\rho g H(Q_2) = p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2} Q_2^2 \left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2}\right) \tag{3.29}$$

Átrendezve:

$$0 = p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2} Q_2^2 \left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2}\right) - \rho g H(Q_2) \tag{3.30}$$

Nézzük meg közelebbről a $H(Q_2)$ tagot. Ez a szivattyú jelleggörbét takarja, amit általában pontonként adott. Ennek kezelésére két módszert használhatunk:
A) **Közelíthetjük polinommal** a szivattyú jelleggörbét, ekkor

$$H(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 \tag{3.31}$$

alakú polinomot illesztünk (pl. a legkisebb négyzetek módszerével) a pontokra.
Példánkban a kapott ágegyenlet ekkor -kiemelve Q_2-t és annak négyzetét- a következőképpen alakul:

$$0 = p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) - \rho g a_0 + Q_2^2 \left(\frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2}\right) - \rho g a_2\right) - \rho g a_1 Q_2. \tag{3.32}$$

Legyen $-\rho g(z_2 - z_1) + \rho g a_0 := D_2$, valamint $\frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2}\right) - \rho g a_2 := B_2$ és $-\rho g a_1 := A_2$. Ekkor az egyenlet a következő alakú lesz:

$$p_2 - p_1 + Q_2^2 B_2 + Q_2 A_2 = D_2. \tag{3.33}$$

Ez még mindig nemlineáris, így szükség van itt is $Q_{2,régi}$ bevezetésével linearizálni. Emeljük ki Q_2-t és a zárójelben lévő térfogatáram helyén vegyük annak régi értékét, majd a zárójelen belüli -immár konstans- tagot nevezzük el E_2-nek. A szivattyú ág egyenletére végül kapjuk:

$$p_2 - p_1 + Q_2(B_2 Q_{2,régi} + A_2) = p_2 - p_1 + Q_2 E_2 = D_2. \tag{3.34}$$

B) A másik módszer a szivattyú jelleggörbe kezelésre a pontok közötti **szakaszos lineáris interpoláció**. Elegendően sok pont esetén ez jó közelítést eredményez, valamit előnye még, hogy azonnal lineáris összefüggést kapunk:

$$H(Q) = a_{0,i} + a_{1,i}Q, \tag{3.35}$$

ha $Q_{i-1} < Q < Q_i$, ahol $i = 1,2,..,N-1$, ahol N a jelleggörbén adott pontok száma.
A módszer jelentős hátránya viszont, hogy minden számítási lépésben meg kell vizsgálni, hogy a jelleggörbe mely pontján vagyunk, hogy annak két szomszédja közé tudjunk interpolálni. (A szélén pedig extrapolálni, amely jelentős hibaforrás is lehet.)
Ezzel a módszerrel az ágegyenlet a példában következőképpen alakul:

$$0 = p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) - \rho g a_{0,i} + Q_2^2\left(\frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2}\right)\right) - \rho g a_{1,i} Q_2. \tag{3.36}$$

A fentiekhez hasonló -itt nem részletezett- átalakításokkal ugyanúgy a

$$p_2 - p_1 + Q_2 E_2 = D_2 \tag{3.37}$$

általános szivattyú ágegyenletet kapjuk meg.
A csővezeték ágegyenlete:

$$6)0 = p_3 - p_2 + \rho g(z_3 - z_2) + \lambda\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\frac{Q_3\,|Q_3|}{A^2} \tag{3.38}$$

A linearizáláshoz az abszolút értékben lévő térfogatáramot kell régi értéken venni:

$$0 = p_3 - p_2 + \rho g(z_3 - z_2) + \lambda\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\frac{|Q_{3,régi}|}{A^2}Q_3, \tag{3.39}$$

majd legyen $-\rho g(z_3 - z_2) := D_3$, és Q_3 együtthatója E_3. Így kapjuk a linearizált egyenletet:

$$p_3 - p_2 + E_3 Q_3 = D_3. \tag{3.40}$$

Végül a végmedence egyenletében nincs szükség átalakításra, egyszerűen nevezzük a konstansot D_4-nek:

$$7)p_3 = (h_{f2} + h_{v2})\rho g - z_3\rho g = D_4. \tag{3.41}$$

A következő egyenleteket kaptuk:

$$1)Q_1 - Q_2 = 0 \tag{3.42}$$

$$2)Q_2 - Q_3 = f_2 \tag{3.43}$$

$$3)Q_3 - Q_4 = f_3 \tag{3.44}$$

$$4)p_1 = D_1 \tag{3.45}$$

$$5)p_2 - p_1 + Q_2 E_2 = D_2 \tag{3.46}$$

$$6)p_3 - p_2 + Q_3 E_3 = D_3 \tag{3.47}$$

$$7)p_3 = D_4. \tag{3.48}$$

A kapott egyenletrendszer lineáris, mátrixos formában is felírható: $\underline{\underline{A}}\cdot \underline{x} = \underline{b}$, ahol $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrix, $\underline{x}$ a keresett változókat tartalmazó vektor, $\underline{b}$ az eredményvektor.
Példahálózatunk esetében ez a következőképpen néz ki ($\underline{\underline{A}}\cdot \underline{x} = \underline{b}$):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

Természetesen a valós hálózatok ennél nagyságrendben nagyobbak, a keresett $\underline{x}$ vektor legkevesebb 100 elemű, de gyakorta 10 000-es nagyságrendben van az elemeinek száma. A nagyméretű lineáris egyenletrendszer megoldására ismert numerikus módszerek valamelyikével (iteratív módszerek, pl.: Gauss-Seidel, JOR, Jacobi iteráció, stb..) azonban gyakorlatilag „gombnyomásra” megoldható az egyenletrendszer.
A linearizációval a következő lépések elvégzésével jutunk eredményre:

- $Q_{régi}$ (1. lépésben kezdeti) érték felvétele. (Pl.: $v := 1$ m/s.)
- $\underline{\underline{A}}$ mátrix E_i tagjainak kiszámolása.
- Az egyenletrendszer megoldása valamely módszerrel: $\underline{x}$ vektor elemeinek kiszámítása.
- Az új Q-k összevetése $Q_{régi}$ értékekkel, az eltérés számszerűsítése.
- $\underline{\underline{A}}$ mátrix E_i tagjainak újraszámolása, az újonnan kapott Q-kal.
- Az utóbbi lépések folytatása addig, míg az újonnan kiszámolt és a régi térfogatáramok közötti különbség egy (százalékosan adott) küszöbérték alá nem kerül.

Nézzük meg a linearizálás módszerét a korábban említett, egyszerű, nemlineáris egyenlet megoldására, 2%-os küszöbértékkel:

$$x\,|x| - 3x^2 = -4 \tag{3.49}$$

Linearizálás után:

$$x(|x_{régi}| - 3x_{régi}) = -4 \tag{3.50}$$

Legyen: $|x_{régi}| - 3x_{régi} := A$, $-4 = b$. Így a legegyszerűbb $x \cdot A = b$ alakú egyenletet kapjuk. Válasszuk a kezdeti értéket $x_{régi} = 2$-re, és végezzünk el néhány iterációs lépést.

$x_{\text{régi}}$	A	$x_{\text{új}}$
2	-4	1
1	-2	2
2	-4	1
1	..	..

3.3. táblázat. Példa egy végtelen ciklusú iterációra.

Látható hogy két lépés után végtelen ciklusba jutunk.
Az ilyen módszer nagyon gyakran végtelen ciklust eredményez, ezért ún. **relaxációt** érdemes alkalmazni. Ennek lényege az, hogy nem az újonnan kapott értéket visszük tovább, hanem a régi és új érték közé megválasztott értéket. Ezt α relaxációs tényezővel szoktuk

megadni, ennek értéke 0 és 1 közé eső szám (tipikusan lehet 0,5). Legyen az egyenletrendszer egy adott lépése előtti érték $x_{régi}$, az új érték $\widetilde{x}$. Az iteráció következő lépésébe teendő érték pedig x; ezt a két érték (régi és új) közé választjuk meg valahol:

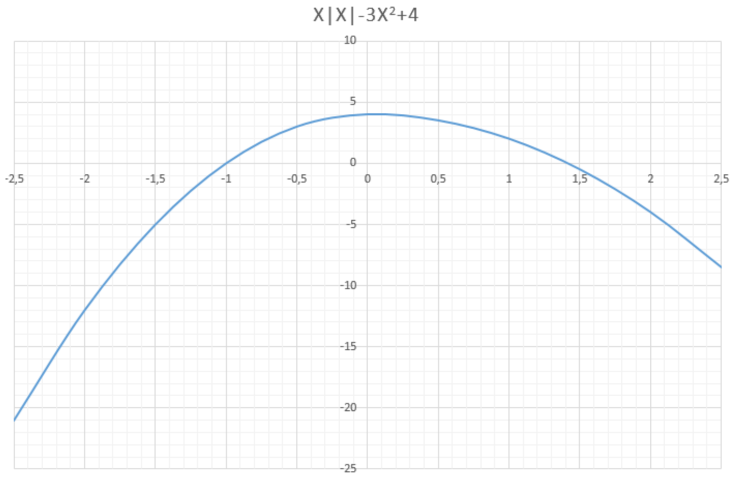
$$x = \alpha x_{régi} + (1 - \alpha)\widetilde{x} \tag{3.51}$$

Az előbbi példánál maradva, a kezdeti érték maradjon $x_{régi} = 2$, és alkalmazzuk a relaxációt $\alpha = 0{,}5$ értékkel. A megoldást keressük 2 százalékos küszöbértékkel. A megoldás menetét a 3.4. táblázat mutatja.

$x_{régi}$	A	$\widetilde{x}$	$x_{új}$	eltérés %
2	-4	1	1,5	25%
1,5	-3	1,33	1,417	5,56%
1,417	-2,83	1,412	1,414	0,17%

3.4. táblázat. A végtelen ciklusú iteráció feloldása a relaxáció alkalmazásával $\alpha = 0{,}5$ értékkel.

Ellenőrzésként rajzoljuk fel a függvényt, aminek megoldását megkaptuk. Megállapít-



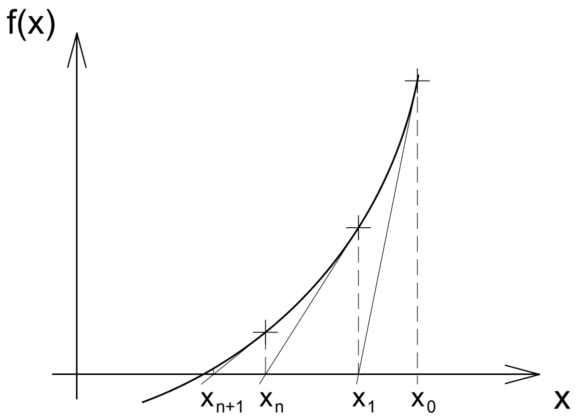
3.15. ábra. A nemlineáris függvény, melynek a gyökét kerestük

ható, hogy valós gyököt kaptunk meg, de megjegyzendő, hogy matematikailag még egy gyökünk van, de mivel nem annak közeléből indítottuk a megoldást, nem azt találtuk meg. Ez jól példázza a módszer azon tulajdonságát, hogy a megtalált megoldás függhet a kezdeti értéktől.

3.3.2. Newton-módszer

A Newton- (vagy másik nevén Newton-Raphson-) módszer az egyik legismertebb valós függvények gyökének közelítésére kidolgozott módszer. A módszerben az igazi gyökhöz -sejtésünk szerint- viszonylag közeli pontból indulunk ki. A függvényérték ebben a pontban az ehhez a ponthoz húzott érintőn található. Kiszámoljuk ennek az érintőnek az x tengellyel való metszéspontját, amelyik pont valószínűleg jobb közelítése a keresett gyöknek. Így iterálva egyre közelebb jutunk a megoldáshoz. Az érintőt a derivált segítségével

keressük, így a függvénynek az adott pontban deriválhatónak kell lennie.
Nézzük a módszert **egydimenziós** esetben. A kezdeti pont x_0, és legyen n az iterációs



3.16. ábra. Newton-módszer

lépések száma. Az n-dik (x_n) pontba húzott érintő meredeksége:

$$tan(\alpha) = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{\Delta x} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \tag{3.52}$$

Ebből:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.53}$$

Az iteratív megoldási módszert addig folytatjuk, míg az $n+1$-dik és n-dik gyök közötti eltérés adott küszöbszám alatti nem lesz.
Sokdimenziós esetben a módszer használható k db, nemlineáris egyenlet gyökeinek meghatározására. A fenti kifejezés ekkor következőképpen alakul:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \left(\underline{\underline{Jac}}(x_n)\right)^{-1} \underline{f(x_n)}, \tag{3.54}$$

ahol $\underline{\underline{\text{Jac}}}$ a Jacobi-mátrixot jelöli. A képletben szereplő mátrix invertálás általában nagy idő és számítás igénnyel bír.
A Newton-módszer esetében is szükséges **relaxáció** használata:

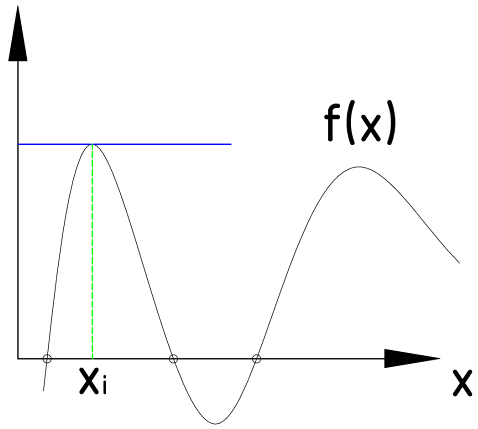
$$\underline{\widetilde{x}}_{n+1} = \underline{x}_n - \left(\underline{\underline{Jac}}(x_n)\right)^{-1} \underline{f(x_n)}, \tag{3.55}$$

és

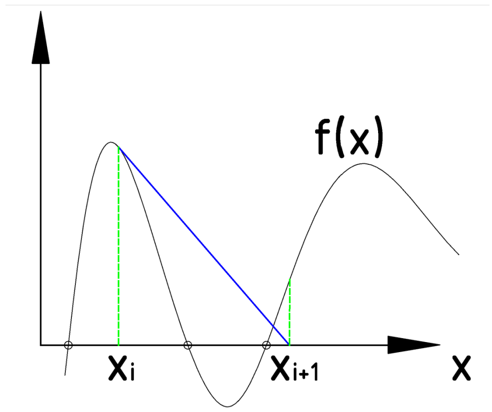
$$\underline{x}_{n+1} = \alpha \underline{x}_n + (1-\alpha)\underline{\widetilde{x}}_{n+1}. \tag{3.56}$$

A módszer limitációihoz tartoznak még a következő **megjegyzések**:

- A Jacobi-mátrix nem lehet szinguláris, mert abban az esetben nem lehet invertálni.
- Ha több gyökhely létezik, a módszer konvergenciája esetleges: még a megoldáshoz közeli helyről indítva sem garantált, hogy a legközelebbi gyököt találjuk meg.
- A Jacobi-mátrix (és a linearizálás módszerénél használt $\underline{\underline{\text{A}}}$ mátrix is) ritka mátrix, ezért programozásakor speciális megoldási és tárolási módszerekre lehet szükség a számítási igény csökkentése érdekében. (Nagy hálózatok iterációja során ez nagyságrenddel csökkentheti a megoldásra szükséges időt.)



3.17. ábra. A függvény x_i pontjába húzott érintő vízszintes (több dimenziós esetben a Jacobi-mátrix determinánsa 0); ekkor nem találunk megoldást



3.18. ábra. A kiinduló x_i pontból nem a hozzá közelebbi megoldást találjuk meg

Nézzük meg a Newton-módszert a korábban említett, nemlineáris egyenlet megoldására 2%-os küszöbértékkel; kezdeti értékünk legyen $x_0 = 2$.

$$x\,|x| - 3x^2 = -4 \tag{3.57}$$

Átalakítva:

$$x\,|x| - 3x^2 + 4 = 0 \tag{3.58}$$

Pozitív x-ből kiindulva az egyenlet egyszerűsödik:

$$f(x) = -2x^2 + 4 = 0 \tag{3.59}$$

alakra. Szükségünk van a deriváltra:

$$f'(x) = -4x. \tag{3.60}$$

Végezzük el az iterációs megoldáskeresést (relaxáció alkalmazása nélkül).

Megjegyzendő, hogy a linearizációhoz hasonlóan ebben az esetben csak a kezdeti értékhez közeli megoldást találtuk meg a módszerrel. Az összes gyökhely megtalálása érdekében érdemes több kezdeti értékből is iterációt indítani.

Példaként indítsuk el a megoldást −2-ből is, a küszöbérték legyen továbbra is 2% és most alkalmazzunk $\alpha = 0{,}5$-ös relaxációt is. Figyelem (!), a függvény az abszolút érték képzés

$x_{régi}$	$f(x)$	$f'(x)$	$x_{új}$	eltérés %
2	-4	-8	1,5	25%
1,5	-0,5	-6	1,416	5,5 %
1,416	0	-5,66	1,416	0,17 %

3.5. táblázat. Az egyenlet megoldása Newton iterációval $x_0 = 2$ kezdeti értékből (az x az iteráció során végig pozitív marad).

tulajdonságai miatt ekkor:

$$f(x) = -4x^2 + 4 = 0 \tag{3.61}$$

alakú. A derivált pedig:

$$f'(x) = -8x. \tag{3.62}$$

$x_{régi}$	$f(x)$	$f'(x)$	$\widetilde{x}$	$x_{új}$	eltérés %
-2	-12	16	-1,25	-1,625	18,8%
-1,625	-6,56	13	-1,12	-1,373	15,5%
-1,373	-3,54	10,98	-1,05	-1,212	11,7%
-1,212	-1,87	9,69	-1,02	-1,115	8,0%
-1,115	-0,97	8,92	-1,01	-1,060	4,9%
-1,060	-0,5	8,48	-1,00	-1,031	2,8%
-1,031	-0,25	8,25	-1,00	-1,016	1,5%

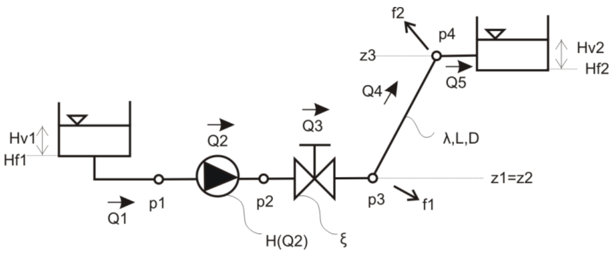
3.6. táblázat. Az egyenlet megoldása Newton iterációval, relaxáció alkalmazásával $\alpha =$ 0,5; $x_0 = -2$ kezdeti értékből.

3.4. Hidraulikai szimuláció Staci szoftver segítségével

A Staci a HDR Tanszék és a Sys-Team Zrt. által közösen fejlesztett általános hidraulikai megoldó, mely a nyomottvizes (teltszelvényű) csővezetékek és - a következő fejezetben szereplő - csatornahálózatok (nyíltfelszínű) állandósult állapotának vizsgálatára egyaránt alkalmas. Az ingyenesen elérhető verzió max. 1000 csomópontos hálózatok megoldását teszi lehetővé. Felépítését tekintve két részből áll: a számításokat végző program (számdaráló) és a grafikus felhasználói felület (megjelenítő). A szoftver használatához Java környezetre, továbbá a számítások futtatásához internet kapcsolatra van szükség (a számításokat a Staci szerver végzi). Részletes leírás és a programcsomag elérhető az alábbi linken: `<http://www.hds.bme.hu/staci_web/>`

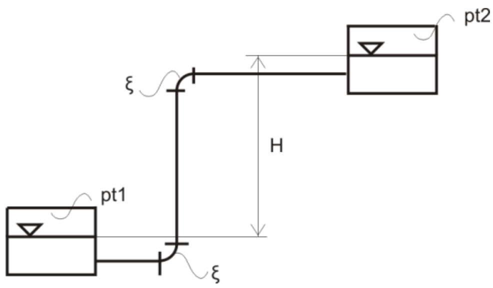
3.5. Mintakérdések a nyomott üzemű hálózatmodellezéshez

M3.1. Milyen építőelemekből építhető fel egy ivóvízhálózat hidraulikai modellje? Az építőelemeket szemléltesse ábrával!
M3.2. Ismertesse a csomópont felépítését, az erre vonatkozó áramlástani alapegyenletet! A mennyiségeket magyarázza!
M3.3. Adja meg az egyenes cső, ill. egy áramlási ellenállás (pl. tolózár), mint ágelem ágegyenletét!
M3.4. Írja fel az alábbi hidraulikai rendszer megoldásához szükséges egyenletrendszert paraméteres formában (3.19. ábra)!
M3.5. Rajzolja fel az alábbi konstans keresztmetszetű csővezeték (3.20. ábra) jelleggör-



3.19. ábra. Ábra a 3.4. feladathoz

béjét, annak min. 5 pontjának megadásával a $0 - 100\ m^3/h$ térfogatáram tartományban! Az adatok: $p_{t1} = 1$ bar; $p_{t2} = 1{,}5$ bar; $H = 25$ m; $\sum L = 1200$ m (az összes egyenes csőszakasz hossza); $D = 0{,}5$ m; $\lambda = 0{,}02$; $\zeta = 3$. (A kilépési veszteségtől eltekinthetünk.)
M3.6. Ismertesse pár mondatban a hidraulikai modell egyenletrendszerének megoldására



3.20. ábra. Ábra a 3.5. feladathoz

tanult két módszert! (Egyenletek is szükségesek.)
M3.7. Oldja meg az alábbi egyenletet a linearizálás módszerével! Használjon relaxációt (a relaxációs paramétert válassza 0,5-re) és a számítás kezdőértékét az $x = 0...8$ intervallumból válassza! A számítást addig folytassa, amíg az $f(x)$ hibája 1,5% alá nem csökken!

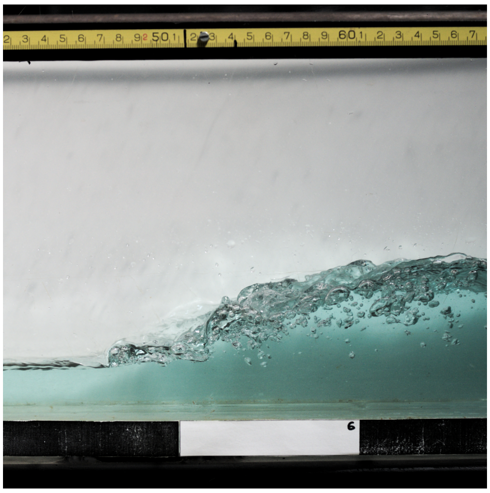
$$f(x) = 3x - x\,|x| + 2x^2 - 10 = 0 \tag{3.63}$$

M3.8. Oldja meg a fenti egyenletet a Newton-módszerrel, 1%-os küszöbbel! Keresse meg az egyenlet pozitív és negatív gyökét is! (Indítsa az első iterációt valahonnan -4 és -1 közötti kezdeti értékkel! Válassza a kezdeti értéket 1 és 4 közé a második gyök megkeresésekor! Relaxációt nem szükséges használnia.)

4. fejezet

Nyíltfelszínű áramlások csatornában

Nyíltfelszínű (NYF) áramlásnak nevezzük azt az áramlást, amikor a közeg nem tölti ki



4.1. ábra. Nyíltfelszínű áramlás csatornában

a rendelkezésre álló (cső vagy) csatorna keresztmetszetét, hanem szabad felszínt képez. E szabad vízfelszín felett állandó légköri nyomás van, ez hat a folyadékfelszín tetején. Az ilyen áramlás vízfelszíne nem feltétlenül párhuzamos a mederfenékkel. (Az áramlást nem cső-, hanem csatorna-áramlásnak szokás nevezni.) Az áramlási tér nyomáseloszlása a vízmagasság-változásban jelentkezik. A folyadék áramlását nem egy külső nyomáskülönbség hozza létre (mint pl. egy teltszelvényű csőben), hanem a csatorna esése, azaz a gravitációs erőtér csatornafenék irányába eső komponense. Ezért az ilyen áramlásokat gyakran gravitációs áramlásoknak is nevezzük. [17] A témával számos szakirodalmi forrás foglalkozik, néhány példaként említjük az alábbiakat [9, 17, 18, 12, 19, 20].

Példák, ahol NYF áramlással találkozhatunk:

- esővíz csatorna,
- szennyvízhálózat,
- ivóvízhálózat gravitációs szakasza,
- erőművi üzemvízcsatorna,
- folyó, folyam.

A NYF áramlás modellezésének célkitűzése, hogy olyan leírását adjuk a csatorna áramlásnak, amely összefüggést teremt a csatornán átfolyó vízáram (térfogatáram) és a csatorna geometriai jellemzői között. Ehhez a csatorna mentén ismerni kell a nyomáseloszlást, ami NYF esetén a folyadékfelszín magasságának ($y(x)$) ismeretét jelenti a hossz (x) mentén. Ezzel jutunk olyan összefüggéshez, ami az ágegyenlethez (emlékeztetőül: $\Delta p \sim f(Q)$ alakú) hasonló összefüggést teremt, esetünkben $\Delta y \sim f(Q)$ között.
A modellezés során ismertnek tekintjük (bemenő adatként rendelkezésre állnak):
- A geodetikus magasság a cső elején és végén.
- A csatornák geometriai adatai (hossz, keresztmetszet alakja).
- A csövek érdességi paramétere (n).

A NYF áramlás leírásakor a követező feltételezéssekkel élünk:
- A közeg összenyomhatatlan, viszkozitása nem változik ($\varrho, \nu = konst.$).
- Az áramlás stacionárius (időben állandó).
- Egydimenziós az áramlás. (A folyadék adott keresztmetszeteiben lévő sebességeloszlás leírásától eltekintünk, egyenleteinkben az adott keresztmetszetre vonatkozó átlagsebesség szerepel.)
- 1 darab csatorna leírására szorítkozunk.
- A csatorna (i) lejtése "kicsi" ($sin\alpha \approx tg\alpha = i$), ld. 4.3. ábra.

Összehasonlítva a telt szelvényű áramlással a következő leglényegesebb különbségekre kell figyelnünk a leírás során:

	Telt szelvény	**Nyíltfelszín**
áramlást hajtja	össznyomáskülönbség	gravitáció
áramlási keresztmetszet	ismert, A=konstans	függ a vízmagasságtól, ismeretlen
keresett összefüggés alakja	$\Delta p \sim Q$	$\Delta y \sim Q$

4.1. táblázat. A telt és nyíltfelszínű áramlás közti leglényegesebb különbségek

4.1. Bevezetés a nyíltfelszínű áramlásokhoz

Az alábbi gondolatmenetben a teltszelvényű és a nyíltfelszínű áramlások leírásának közös pontjait kívánjuk bemutatni szemléletformálás okán.

Tekintsünk egy folyadékkal telt, körkeresztmetszetű, D átmérőjű, ΔL hosszúságú csőszakaszt. A cső ferdén lejt, a szintcsökkenés Δz. A lejtés hatására a felszínnel párhuzamos áramlás alakul ki, amely akkor lesz állandósult, ha a Δz szintcsökkenés éppen fedezi az áramlás h' veszteségét.

$$\Delta z = \lambda \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2g}. \tag{4.1}$$

A leíráshoz szükségünk van még egy új fogalom, a **hidraulikai sugár** ($R_h[m]$) bevezetésére, ami a nedvesített terület és a nedvesített kerület hányadosa:

$$R_h = \frac{A}{K}. \tag{4.2}$$

(Megjegyzés: a hidraulikai sugár nem azonos az egyenértékű csőátmérő felével, ld. 1. fejezet.) Valamint az esés $i = \Delta z/\Delta L$ alakban írható. Mindezeket felhasználva

$$\frac{\Delta z}{\Delta L} = i = \frac{\lambda v^2}{2gD} = \frac{\lambda v^2}{2g4R_h} = \frac{\lambda v^2}{8gR_h}. \tag{4.3}$$

Ebből megkaphatjuk az állandósult áramlás sebességét:

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\sqrt{iR_h}. \tag{4.4}$$

Az itt szereplő $\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ kifejezést veszteségtényezőnek is tekinthetjük. A nyíltfelszínű áramlásokkal foglalkozó építőmérnöki területen e tényezőt Chézy-tényezőnek nevezik (jele C); értéke esetünkben λ-tól függően 40-70 $\sqrt{m}/s$ [12]. Ennek segítségével az áramló közeg átlagsebessége a $v = C\sqrt{iR_h}$ alakban számítható. Mindez akkor érvényes, ha a csatornában állandósult nyíltfelszínű áramlás van és a folyadék felszíne párhuzamos a csatornafenékkel. Az összefüggés részletes tárgyalására a normál áramlás keretében térünk vissza.

A Chézy-szám nem konstans, függ a hidraulikai sugártól és a cső érdességétől; és pl. a következő (Manning-féle) összefüggéssel is számolható (sok más közelítés is ismert):

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n}, \tag{4.5}$$

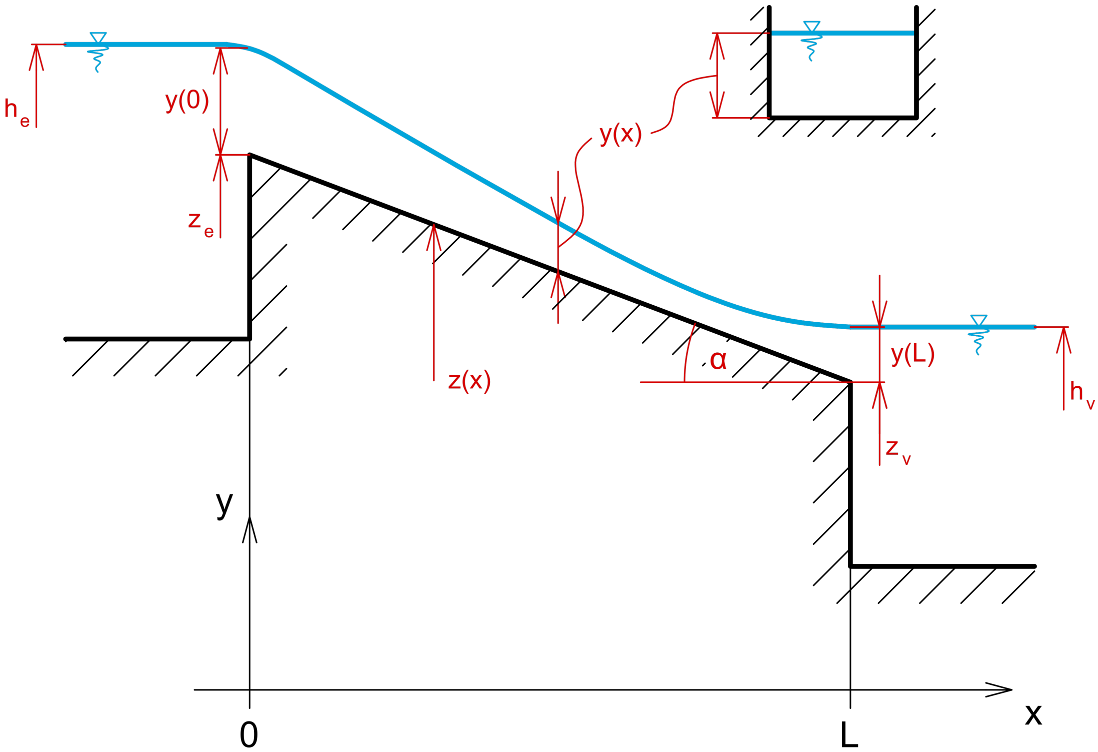
ahol $n[s/m^{1/3}]$ a Manning-állandó. NYF modellezésénél ez az érdességi paraméter, értéke a mérnöki gyakorlatban $n := 0{,}01...0{,}05$ között szokott lenni. A következő táblázat néhány példát mutat a Manning-állandó értékére.

Channel type	**Surface material and form**	**Manning's *n* range**
unlined canal	earth, straight	0.018-0.025
	rock, straight	0.025-0.045
lined canal	concrete	0.012-0.017
lab. models	mortar	0.011-0.013
	Perspex	0.009

4.2. ábra. Néhány tipikus Manning-állandó értéke. *(Forrás: http://www.efm.leeds.ac.uk/CIVE/CIVE2400/OpenChannelHydraulics2.pdf)*

4.2. Nyíltfelszínű állandósult áramlás leírása prizmatikus csatornában

Tekintsünk egy egyszerű, lejtéssel rendelkező prizmatikus csatornát (a szelvény nem változik a hossz mentén), ld. 4.3. ábra. Ennek a hosszmenti (vízszintes) koordinátáját jelölje x. A felvíz oldali vízmagasság: $y(0)[m]$, az alvíz oldali $y(L)[m]$. Nyíltfelszínű áramlás esetén a két érték nem feltétlenül egyezik meg egymással, és a két magasság között kialakuló folyadékfelszín alakját az $y(x)$ függvény írja le. A csatornafenék geodetikus magassága a hossz mentén legyen: $z(x)$.



4.3. ábra. Nyíltfelszínű áramlás modellje egy csatornában

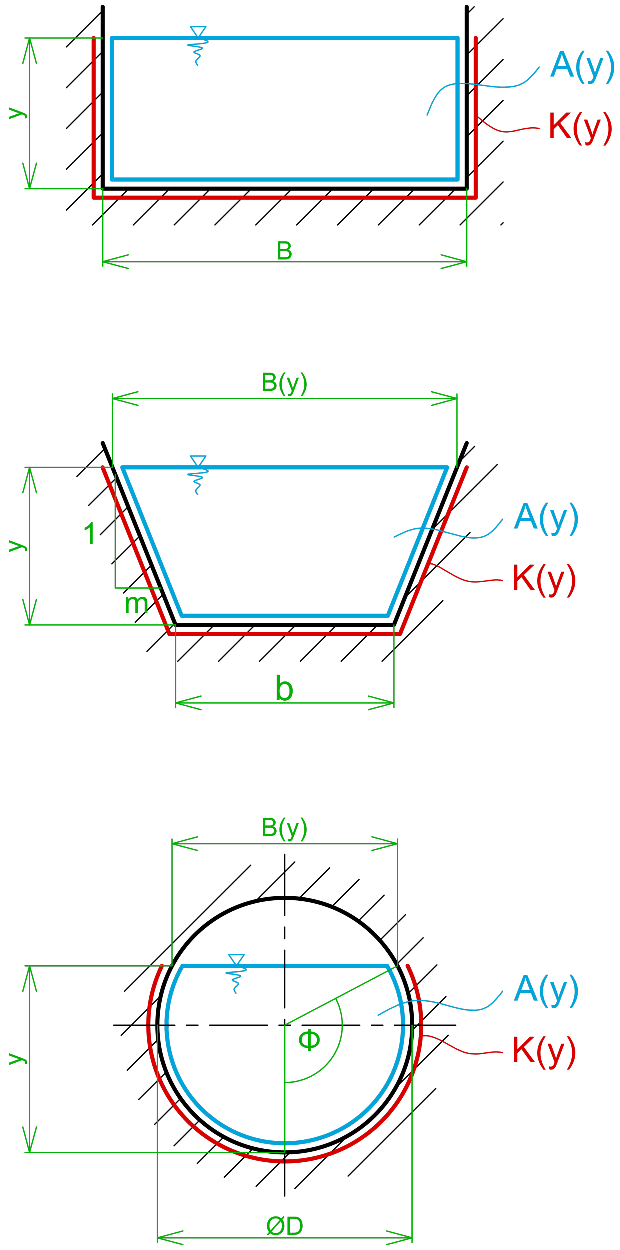
A csatornák geometriai **keresztmetszet**e igen változatos formájú lehet (itt nem a nedvesített, áramlási keresztmetszetre gondolunk), ld. 4.4. ábra. A legfontosabb paraméterek egy keresztmetszet esetén a vízfelszín magassága (y), az áramlási keresztmetszet ($A(y)[m^2]$), ami az előbbi függvénye, és a nedvesített kerület ($K(y)[m]$), ami szintén függ y-tól. Ez utóbbi az a rész, ahol a folyadék a mederrel súrlódik, így fontos szerepet játszik, hiszen a súrlódási veszteség döntően itt keletkezik. Minden keresztmetszet esetén megfogalmazunk egy „szélességet" is ($B(y)[m]$), ami gyakran az y függvénye, de téglalap esetén konstans.

A következő jellemző keresztmetszetek esetén ezek a következőképpen fejezhetők ki:

Keresztmetszet	$A(y)$	$K(y)$	R_h
Téglalap	by	$b + 2y$	$by/(b + 2y)$
Trapéz	$(b + my)y$	$b + 2y\sqrt{1 + m^2}$	$\dfrac{(b + my)y}{b + 2y\sqrt{1 + m^2}}$
Kör $\phi = \pi - arcCos[(y - D/2)/(D/2)]$	$\frac{1}{8}(2\phi - \sin(2\phi))D^2$	$\phi \cdot D$	$\frac{1}{8}\left(2 - \dfrac{\sin(2\phi)}{\phi}\right) D$

4.2. táblázat. A keresztmetszet, a nedvesített kerület és a hidraulikai sugár számítási összefüggései.

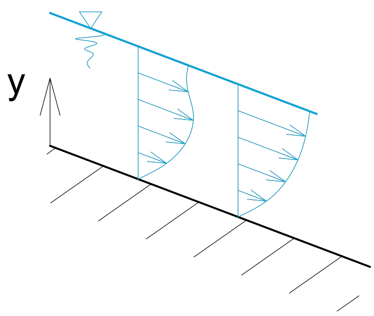
Sekély, széles négyszög keresztmetszetű csatorna estén a K nedvesített kerület számításánál az y magasság elhanyagolhatóan kicsi a csatorna B szélességéhez képest, így:



4.4. ábra. Néhány lehetséges keresztmetszet, és legfontosabb paramétereik

$$R_h = \frac{A}{K} = \frac{A(y)}{K(y)} = \frac{B \cdot y}{B + 2y} \approx \frac{B \cdot y}{B} = y. \tag{4.6}$$

A NYF áramlásokat 1D közelítéssel kezeljük. A csatorna egy adott keresztmetszetében a valóságban természetesen a sebességeloszlás nem egyenletes, ld. pl. 4.5. ábra ([18]). A mederfenéknél tapadás van, a folyadék tetején pedig szabad felszín. Ennek figyelembe vétele helyett a sebességet egy átlagsebességgel közelítjük, aminek értéke a sebességeloszlás integrálközepe.



4.5. ábra. Példák sebességprofilokra NYF áramlásnál ([18])

4.2.1. Nyíltfelszín egyenletének levezetése

A felszín alakjának számításához a csatorna mentén, a csatorna felszínére a **Bernoulli-összeget** szükséges felírni. (Ez az energiamegmaradást fejezi ki számunkra: a cső elején a folyadékban tárolt energia felírható a cső mentén bárhol, az energia és az addigi súrlódási veszteség összegéből.)

$$p_0 + \rho g z_e + \rho g y_e + \frac{\rho}{2} v_e^2 = p_0 + \rho g z(x) + \rho g y(x) + \frac{\rho}{2} v(x)^2 + \rho g h'(x) = konstans \tag{4.7}$$

A p_0 légköri nyomás mindenhol egységesen hat, így kivonhatjuk mindkét oldalból (így is konstans marad). Osszuk le az előbbi összeget ρg-vel, hogy „méter” dimenziójú összefüggést kapjunk.

$$z(x) + y(x) + \frac{v(x)^2}{2g} + h'(x) = konstans. \tag{4.8}$$

Amennyiben egy mennyiség konstans, a változó szerinti deriváltja zérus:

$$\frac{d}{dx}\left(z(x) + y(x) + \frac{v(x)^2}{2g} + h'(x) \right) = 0. \tag{4.9}$$

Nézzük ez előző egyenletben szereplő mennyiségek deriváltját tagonként!

- A keresett függvény deriváltja:

$$\frac{dy}{dx} \tag{4.10}$$

- Az esés:

$$\frac{dz}{dx} = -i = -S_0, \tag{4.11}$$

ahol $i[-]$ az esés, dimenzió nélküli, lefelé lejtő csatorna esetében definíció szerint pozitív szám. Ezt szokás még az angolszász gyakorlatból átvett, a csatorna geometriájából adódó „Slope”-ként, S_0 jelöléssel megadni. A vizsgált csatornaszakaszon S_0 állandó.

- A súrlódási veszteségből adódó tag a (4.3) és (4.4) egyenleteket felhasználva:

$$\frac{dh'}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R_h} = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R_h} = S_f, \tag{4.12}$$

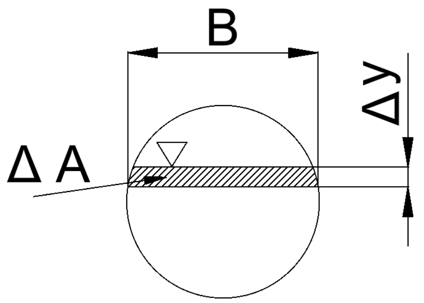
ahol C a már ismertetett Chézy-szám. Ezt a tagot az angolszász terminológiában S_f jelöléssel szokták megadni (a „slope friction” kifejezésből).

- A sebességet tartalmazó tag:

$$\frac{d}{dx}\frac{v(x)^2}{2g} = \frac{1}{2g}\frac{d}{dx}\frac{Q^2}{A^2} = \frac{Q^2}{2g}\frac{d}{dx}\frac{1}{A^2} \tag{4.13}$$

Stacionárius üzemállapotról van szó, tehát a térfogatáram állandó, így ezt kiemelhettük. A csatorna alakja tetszőleges $A = A(y(x))$.

$$\frac{Q^2}{2g}\frac{d}{dx}\frac{1}{A^2} = \frac{Q^2}{2g}\frac{d}{dA}\left(\frac{1}{[A(y(x))]^2}\right)\frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{-2}{A^3}\right)\frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx} = ... \tag{4.14}$$



4.6. ábra. dA/dy értelmezését segítő ábra.

A dA/dy értelmezését segíti a 4.6. ábra.

$$\Delta A \cong B\Delta y \rightarrow \frac{dA}{dy} = B \tag{4.15}$$

Folytatva a (4.14)-es egyenletet

$$= ...\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{-2}{A^3}\right)\frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^3}B\frac{dy}{dx} \tag{4.16}$$

A fenti levezetésekből kapjuk:

$$\frac{dy}{dx} - i + \frac{Q^2}{A^2C^2R_h} - \frac{Q^2B}{gA^3}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4.17}$$

Emeljük ki a $\frac{dy}{dx}$ tagot, és rendezzük át az egyenletet.

$$\frac{dy}{dx}(1 - \frac{Q^2B}{gA^3}) = i - \frac{Q^2}{A^2C^2R_h}. \tag{4.18}$$

Osszunk le a derivált együtthatójával:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - \dfrac{Q^2}{A^2C^2R_h}}{1 - \dfrac{Q^2B}{gA^3}}. \tag{4.19}$$

Ezt nevezzük a nyíltfelszínű csatorna „ágegyenletének”, ami

$$\frac{dy}{dx} = f(Q) \tag{4.20}$$

alakú. Ez egy közönséges, nemlineáris, elsőrendű differenciál egyenlet (KDE). Analitikus megoldása nem ismert, numerikus módszer szükséges a leírásához, ami pl. $y(x = 0)$ kezdeti értékkel megoldható. Az egyenletben ismert mennyiség: i, n; konstans mennyiség a térfogatáram Q. $A(y)$, $B(y)$, $R_h(y)$, $C(y)$ függnek a keresett y vízmélységtől.

4.2.2. Froude-szám

A nyíltfelszínű áramlások legfontosabb dimenziótlan száma a Froude-szám: $Fr, [-]$. (Emlékeztetőül, a telt szelvényű áramlás jellemzésére szolgáló hasonlósági szám a Re szám.) Ez a dimenziótlan szám a

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gy}}, \tag{4.21}$$

ahol v az áramlás átlagsebessége, g a gravitációs térerősség és y az áramlás jellemző mérete (vízmagasság).

Nyíltfelszínű áramlás esetén a sekélyvízi hullámterjedési sebesség az $a = \sqrt{gy}$ összefüggéssel kapható meg. (Belátható, hogy a Froude-szám és a Mach-szám ebben az esetben megegyezik: $Fr = v/\sqrt{gy} = v/a = Ma$.) Téglalap keresztmetszet esetén igaz továbbá, hogy $y = A/B$. Fejezzük ki a Fr szám négyzetét:

$$Fr^2 = \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{g\frac{A}{B}} = \frac{Q^2}{A^2 g\frac{A}{B}} = \frac{Q^2 B}{A^3 g}. \tag{4.22}$$

A kapott kifejezés pontosan azonos a nyíltfelszínű áramlás korábban levezetett (4.19) egyenletének nevezőjében 1-ből kivont kifejezéssel. Ebből a NYF egyenlet a következő egyszerűsített alakban írható föl:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - S_f}{1 - Fr^2} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}. \tag{4.23}$$

A Froude-szám értéke a Reynolds-, illetve a Mach-számhoz hasonlóan az „áramlás jellegéről” ad számunkra információt, mégpedig a következőképpen:

- Ha $Fr < 1$, az áramlás szubkritikus, $v < a$
- Ha $Fr > 1$, az áramlás szuperkritikus, $v > a$
- Ha $Fr = 1$, az áramlás lassuláskor vízugrással jut szuperkritikusból szubkritikusba.

4.2.3. Normál áramlás

A nyíltfelszínű áramlások egyik speciális esete, amikor a folyadékfelszín nem görbült, hanem a mederrel párhuzamos, vagyis az x hossz mentén az y vízmagasság változatlan. Ekkor a levezett összefüggés zérus, vagyis a tört számlálója zérus.

$$0 = \frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} = \frac{i - \frac{dh'}{dx}}{1 - Fr^2} \tag{4.24}$$

$$0 = i - \frac{dh'}{dx} \tag{4.25}$$

Mivel

$$i = \frac{Q_n^2 n^2}{A^2 R_h R_h^{\frac{1}{3}}} = \frac{Q_n^2}{A^2 C^2 R_h}, \tag{4.26}$$

a normál térfogatáram a következőképpen számolható:

$$Q_n = \sqrt{\frac{i}{n^2} A^2 R_h^{\frac{4}{3}}} = f(y_n). \tag{4.27}$$

Az összefüggés azt mondja számunkra, hogy egy adott csatorna esetében minden y magassághoz megtalálható az a Q_n térfogatáram, amivel a folyadék a csatornafenékkel párhuzamosan folyik le. Továbbá fordítva is igaz: minden Q-hoz meghatározható az y_n normál folyadékmagasság.

Ennek kifejezéséhez induljunk ki a 4.26 egyenletből. A 4.6-es egyenletnek megfelelően elhanyagolva az y magasságot a csatorna B szélességéhez képest, i a következőképpen alakul:

$$i = \frac{Q_n^2}{A^2 C^2 R_h}. \tag{4.28}$$

Téglalap keresztmetszetű csatornát feltételezve tovább írható

$$i = \frac{Q_n^2}{B^2 y_n^2 C^2 R_h} = \frac{Q_n^2}{B^2 y_n^2 \frac{R_h^{1/6}}{n^2} R_h^2} = \frac{Q_n^2 n^2}{B^2 y_n^{10/3}}. \tag{4.29}$$

Rendezve a y_n-re, a normál folyadékmagasság:

$$y_n = (\frac{Q_n^2 n^2}{B^2 i})^{3/10} \tag{4.30}$$

A vizsgált egyenletünk ($dy/dx = (i - S_f)/(1 - Fr^2)$) számlálójának előjele szempontjából írható:

- ha $y > y_n$, akkor $i - \frac{dh'}{dx}$ pozitív,
- ha $y < y_n$, akkor $i - \frac{dh'}{dx}$ negatív.

4.2.4. Kritikus áramlás

Szubkritikus áramlás az, ahol a közeg áramlási sebessége kisebb, mint a hullámterjedési sebesség. Vagyis az alvíz oldali zavarás visszahat a felvíz oldali vízmagasságra. **Szuperkritikus** esetben (ezt rohanásnak is nevezzük) azonban az alvíz oldali zavarás nem tud előrehaladni a felvíz oldalig, mert az áramlási sebesség a nagyobb, így az alvíz oldali zavarás (pl. duzzasztás) nem mutatkozik a felvíz oldali vízszintben. A kettő közti átmenet egy speciális áramlási jelenség, a **kritikus áramlás**. $Fr = 1$ esetben az áramlást kritikus áramlásnak nevezzük. A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - S_f}{1 - Fr^2} \tag{4.31}$$

egyenlet nevezője ekkor 0; vagyis a $dy/dx \to \infty$. Ebben az esetben a vízfelszín görbülete drasztikusan változik, ún. vízugrás történik [18]. A korábbi levezetés során éltünk a feltételezéssel, hogy a veszteség csak a súrlódásból fakad, azonban a kritikus áramlás esetében, ez a feltevés nem állja meg a helyét. (Ennek a kezelésére a későbbiekben még visszatérünk.)
A kritikus áramlás esetén igaz,

$$0 = 1 - Fr^2 = 1 - \frac{Q_c^2 B}{A^3 g}. \tag{4.32}$$

Ebből egy adott y esetén kiszámítható a kritikus térfogatáram Q_c. Téglalap keresztmetszetre:

$$Q_c = \sqrt{\frac{B^3 y^3 g}{B}} = f(y_c). \tag{4.33}$$

Minden térfogatáramhoz tartozik egy kritikus folyadékmagasság y_c is:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}}. \tag{4.34}$$

A vizsgált egyenletünk ($dy/dx = (i - S_f)/(1 - Fr^2)$) nevezőjének előjele szempontjából írható:

- ha $y > y_c$, akkor $1 - Fr^2 > 0$, mivel $v < a$,
- ha $y < y_c$, akkor $1 - Fr^2 < 0$, mivel $v > a$.

4.2.5. Kritikus esés

Amennyiben a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - S_f}{1 - Fr^2} \tag{4.35}$$

egyenlet számlálója és nevezője is 0, akkor $y_n = y_c$ és $Q_n = Q_c$. A számláló $= 0$ -val az y_n valamint a nevező $= 0$ felírásával pedig az y_c kiszámítható, amelyeknek meg kell egyeznie. [18, 12] Ekkor

$$i = i_c = \frac{Q A_n}{{C_n}^2 R_{h,n} B_n}. \tag{4.36}$$

A lejtés szempontjából

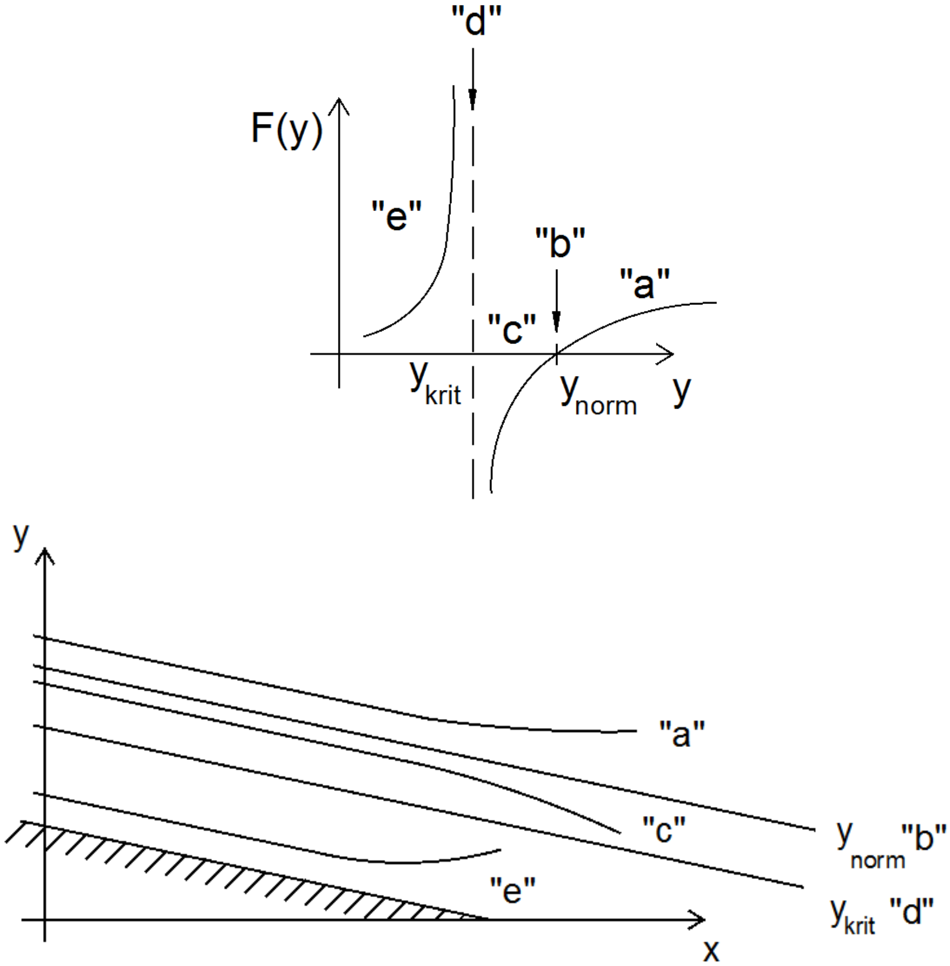
- ha $i < i_c$, akkor enyhe lejtésről,
- ha $i > i_c$, akkor meredek lejtésről, és
- ha $i = i_c$, akkor kritikus esésről

beszélhetünk. (A mérnöki gyakorlatban i_c tipikus értéke 5-8 ezrelék, így az pl. az enyhe lejtés eléréséhez szokás 2-4 ezreléket választani. [12])

4.2.6. Folyadékfelszín alakja

Azt, hogy a folyadékszint az x mentén előrefelé haladva hogyan változik, a dy/dx előjele dönti el. Ha a vizsgált ($dy/dx = (i - S_f)/(1 - Fr^2)$) kifejezés számlálója és nevezője azonos előjelű, akkor nő, ha ellentétes, akkor csökken. (A felszín pontos alakja a számításokból fog kiadódni.)

Enyhe (Mild) lejtés ($i < i_c$ és $y_n > y_c$)
Enyhe lejtésű csatornák esetében a normál vízmélység nagyobb, mint a kritikus vízmélység; mindez jól látható a $dy/dx = F(y)$ függvény ábrázolásakor, ld. 4.7. ábra felső része. Itt 5 alesetet különböztetünk meg.



4.7. ábra. Az $F(y)$ függvény (felül) és a lehetséges folyadékfelszín alakok (alul) enyhe lejtésű csatorna esetében.

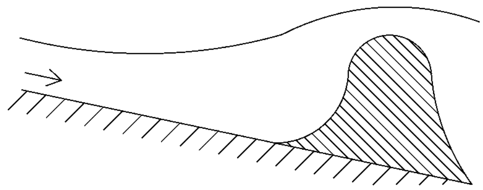
- **a**: Duzzadó vízfelszín, tipikusan valamilyen tereptárgynál vagy bukógátnál alakul ki, ld. 4.8. ábra. A kiinduló vízmagasság a normál vízmagasság felett van, ld. pl. 4.12. ábra "A C" diagramjai.

- **b**: Normál áramlás. A mérnöki alkalmazások nagy részében normál áramlást tapasztalhatunk.

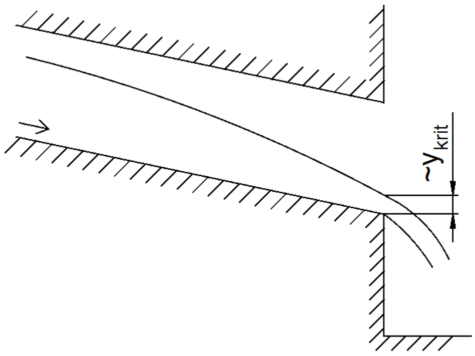
- **c**: A kiinduló vízmagasság a normál és a kritikus között van. A folyadékfelszín süllyedő, lefelé hajló a kritikus magasság eléréséig, amely tipikusan a csatorna végén, az abból való kiömlésnél tapasztalható, ld. 4.9. ábra, valamint a 4.12. ábra "B" diagramjai.

- **d**: kritikus áramlás, tipikusan csatornából történő kiömlésénél tapasztalható, ld. 4.9. ábra.

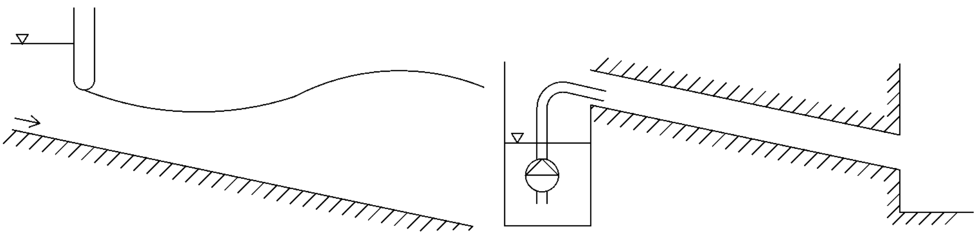
- **e**: a kritikus alatti vízmagasságból indulva felfelé görbülő folyadékfelszín eléri a kritikus magasságot, és vízugrás jelenség alakul ki. Ezt okozhatja egy alsó kifolyású gát (ld. pl. 4.10. ábra, bal oldalt) vagy egy aknából történő szivattyúzás is (ld. pl. 4.10. ábra, jobb oldalt). Utóbbi esetben a nyomócsonknál jelentősen nagyobb keresztmetszetű csatornába kerül a viszonylag nagy sebességű közeg, amely szuperkritikus áramlással terjedhet. A folyadék a lassulása után szubkritikus áramlásba pedig csak vízugráson keresztül juthat. [12]



4.8. ábra. a) eset: műtárgy mögött kialakuló duzzadó folyadékfelszín.

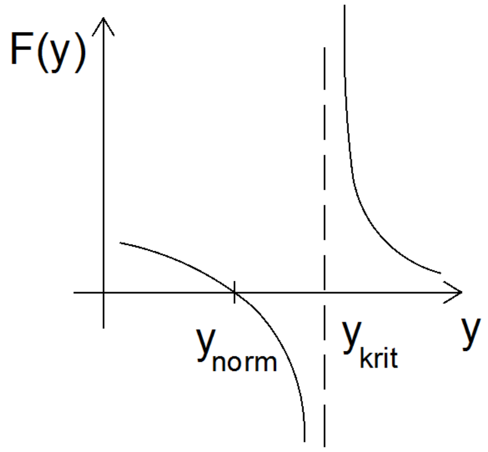


4.9. ábra. c) és d) esethez: Csatornából történő kiömlés.

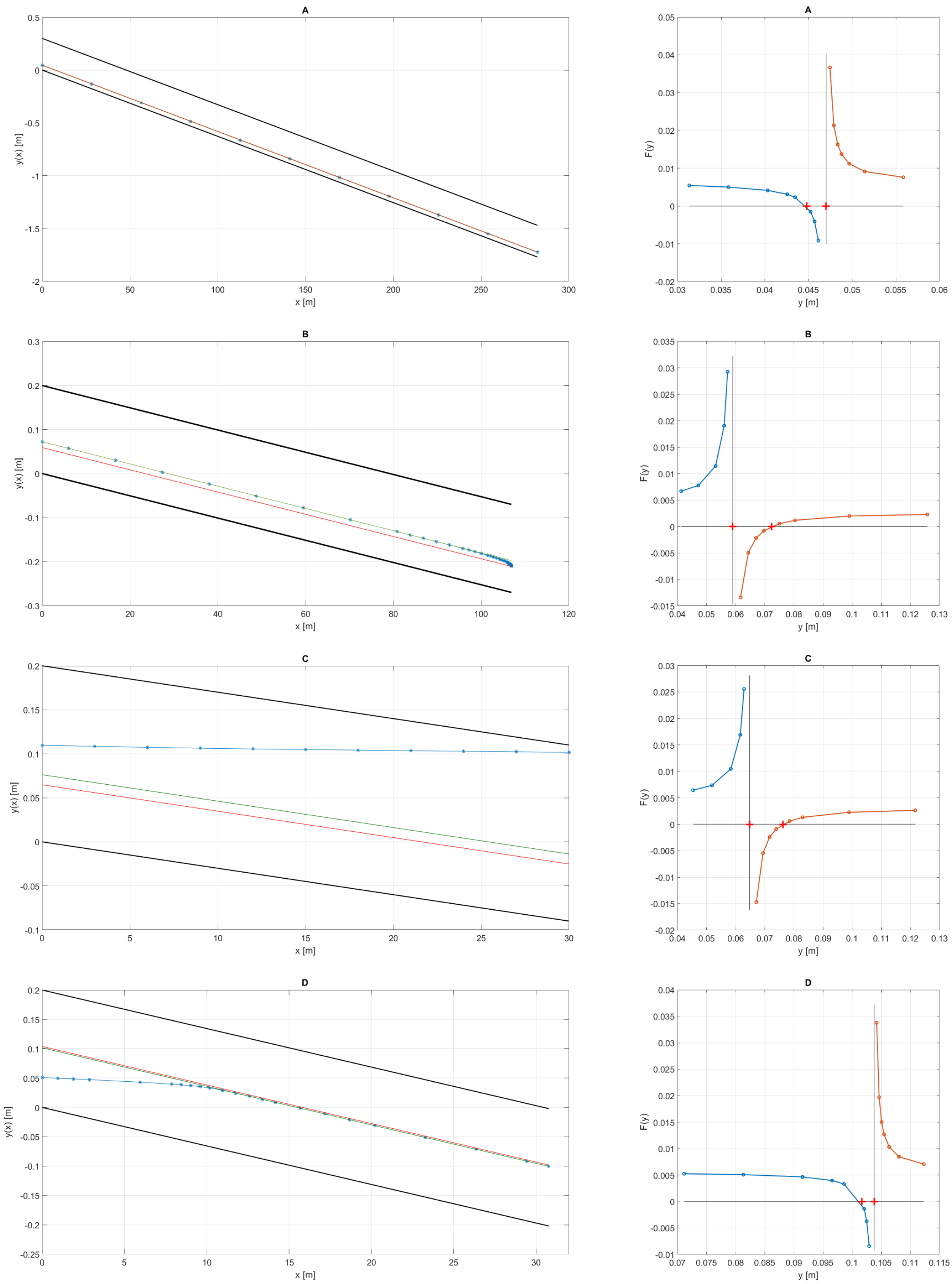


4.10. ábra. e) eset: Alsó kifolyású gát után kialakuló vízugrás (bal oldalt); aknából történő szivattyúzás (jobb oldalt).

Meredek (Steep) lejtés ($i > i_c$ és $y_c > y_n$)
A meredek lejtésű csatornák esetében ($i > i_c$) a kritikus vízmélység nagyobb, mint a normál vízmélység. Ekkor a $dy/dx = F(y)$ függvény a 4.11. ábra szerint alakul.



4.11. ábra. Az $F(y)$ függvény meredek lejtésű csatorna esetén.



4.12. ábra. A **bal oldal**i ábrákon tipikus folyadékfelszín alakok láthatóak. Fekete vonal a csatorna alját és tetejét, zöld a normál, piros pedig a kritikus vízmagasságot jelöli. Kékkel pedig a kialakuló folyadékfelszín látható. A **jobb oldal**i diagramok az $F(y)$ függvényt ábrázolják az y vízmagasság függvényében; ezeken a piros + jelölők a normál és a kritikus folyadékmagasságot mutatják. A: Meredek lejtés, a normál vízszint kismértékben a kritikus alatt van. B: Enyhe lejtés, pl. csatornából történő kiömlés. C: Enyhe lejtés, magas kezdő vízszint, duzzadó folyadékfelszín alakul ki. D: Meredek lejtés, alacsony kezdő vízszint.

4.2.7. Fajlagos energia

A közeg össznyomása a felszínen úszó részecskére:

$$p_{össz} = p_0 + \rho g y + \frac{\rho}{2} v^2. \tag{4.37}$$

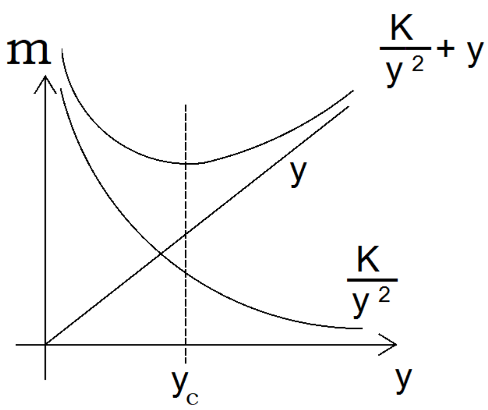
Ebből vonjuk ki a konstans légköri nyomást, és fajlagosítsuk súlyegységre, amivel egy „energiamagasság" jellegű, fajlagos energiát $(m(y), [m])$ kapunk (ami az egységnyi súlyú folyadékrész energiatartalmát adja meg) [18, 12, 19].

$$m(y) = \frac{p_{össz} - p_0}{\rho g} = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2A^2 g}. \tag{4.38}$$

Téglalap keresztmetszetű csatornára $(A = By)$

$$m(y) = y + \frac{Q^2}{2A^2 g} = y + \frac{Q^2}{2B^2 y^2 g} = y + \frac{K}{y^2}. \tag{4.39}$$

Ezt ábrázolva a 4.13. ábrán látható diagramot kapjuk.



4.13. ábra. A részecske súlyegységre eső energiája.

A görbe minimumpontjának meghatározásához írjuk fel a fajlagos energia meredekségét is (megtartva a téglalap keresztmeszet megkötést):

$$\frac{dm(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{Q^2}{2A^2 g}\right) = 1 - \frac{2Q^2}{2B^2 y^3 g} = 1 - \frac{v^2}{gy} = 1 - Fr^2. \tag{4.40}$$

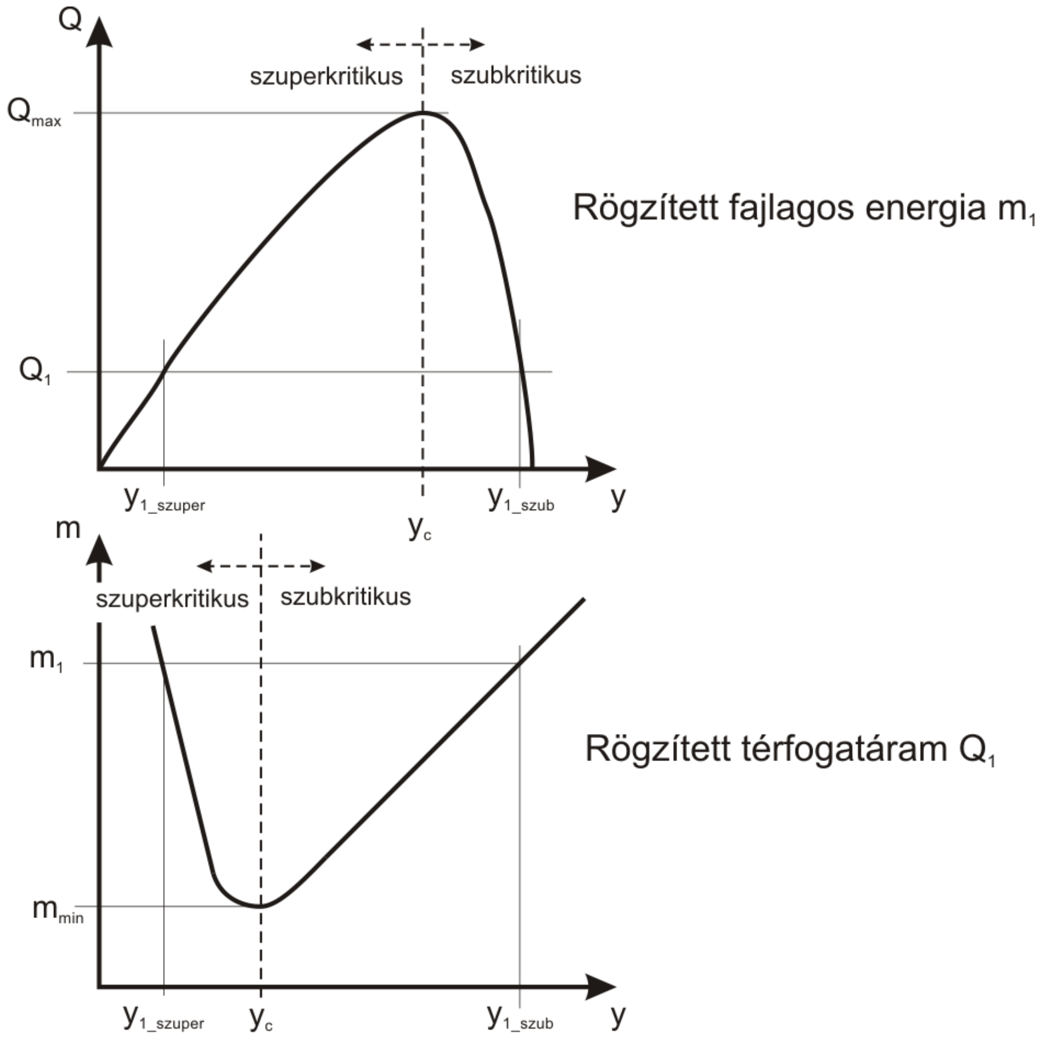
A fenti egyenlet, azaz a meredekség zérus, akkor a Fr=1; azaz kritikus áramlásról, kritikus vízmagasságról beszélhetünk [18].

A (4.38)-as összefüggésben három mennyiség (fajlagos energia m, vízmagasság y és térfogatáram Q) szoros kapcsolata fogalmazódik meg. Ezt 2D ábrában nehéz megjeleníteni, így szokásosan rögzíteni szoktuk az energiát vagy a térfogatáramot, és így vizsgáljuk a másik két mennyiség összefüggését.

Nézzük meg az $m(y)$ fajlagos energiát és y vízmagasságot **adott** Q **térfogatáram** esetén (ld. 4.13. ábra, illetve 4.14. ábra alsó fele).
1) Létezik egy minimális fajlagos energia.
2) A fajlagos energia a kritikus vízmagasság esetén minimális. Energiabevezetés nélkül értéke nem nőhet.
3) Minden egyéb energiát tekintve két lehetséges vízmagasságunk van. Vagyis adott Q

térfogatáramhoz egy adott m energiaszint esetében is két vízszint tartozik egy szubkritikus és egy szuperkritikus, a kiindulási állapottól függően.

Adott $m(y)$ **fajlagos energia** esetén:
1) Létezik egy maximális térfogatáram.
2) A maximális térfogatáram a kritikus vízmagasságnál található.
3) Minden ettől eltérő (kisebb) térfogatáram esetén két vízmagasság képzelhető el, egy szub- és egy szuperkritikus a kiindulási állapottól függően.



4.14. ábra. Fajlagos energia, térfogatáram és vízmélység összefüggése nyíltfelszínű áramlás esetén

4.3. Numerikus megoldási módszerek

Adott

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - \dfrac{Q^2}{A^2C^2R_h}}{1 - \dfrac{Q^2B}{gA^3}} = f(y) \tag{4.41}$$

közönséges nemlineáris differenciálegyenlet, melynek $y(0) = y_0$ kezdeti feltételből indulva keressük $y(x)$ megoldását. Vagyis ismerjük a cső eleji vízszintet, és keressük a cső mentén a folyadékfelszín alakját. Ismert konstans értékek: n, i és Q. $A(y)$; $B(y)$; $R_h(y)$; $C(y)$ függnek y-tól. Szemléletformálás okán röviden ismertetünk két, az egyenlet megoldására gyakran alkalmazott numerikus módszert (explicit Euler módszer és Runge-Kutta módszer). Meg kell viszont jegyeznünk, hogy a fejlett matematikai szoftverek (pl. Matlab) beépített numerikus megoldókkal rendelkeznek (pl. ode23, ode45), amelyek használata leegyszerűsíti az egyenletek megoldását.

4.3.1. Explicit Euler módszer

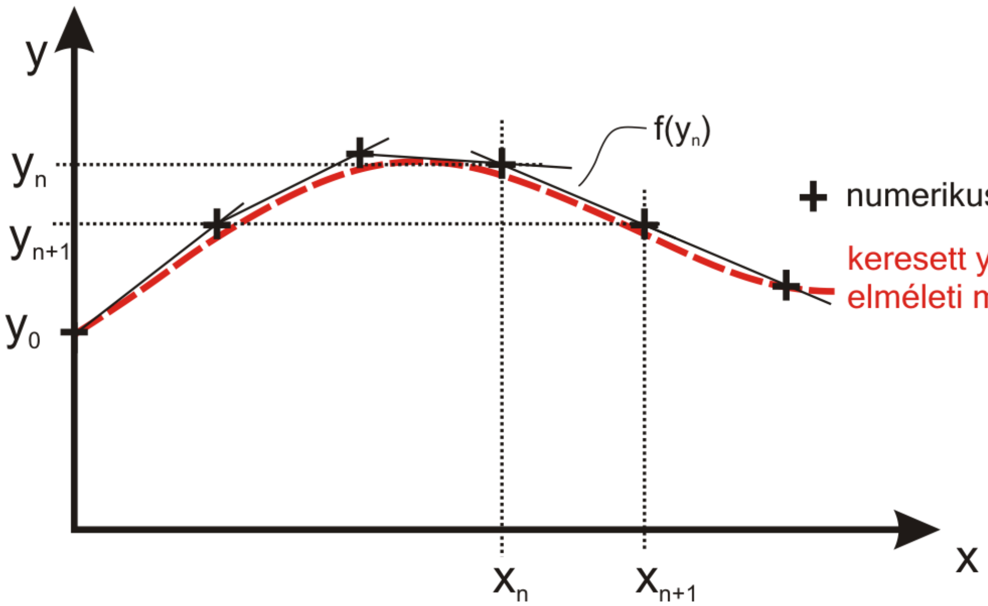
Az egylépéses Explicit Euler módszer egy olyan kezdetiérték feladat megoldó, ahol a valós megoldást egy $n+1$-dik pontban az előtte lévő pontból egy adott $(dy/dx = f(y))$ meredekségű lépés megtételével közelítjük. Vagyis:

$$y_1 = y_0 + f(y_0)\Delta x \tag{4.42}$$

$$y_2 = y_1 + f(y_1)\Delta x \tag{4.43}$$

...

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\Delta x \tag{4.44}$$



4.15. ábra. Explicit Euler módszer

4.3.2. Runge-Kutta módszerek

Runge-Kutta (R-K) módszerek alatt egy egész módszercsaládot értünk. Az elsőrendű R-K módszer az Euler módszer.

A leggyakrabban használt módszer a negyedrendű R-K, ahol az $n+1$-dik pont a következőképpen számolható (h a lépésköz):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h, \tag{4.45}$$

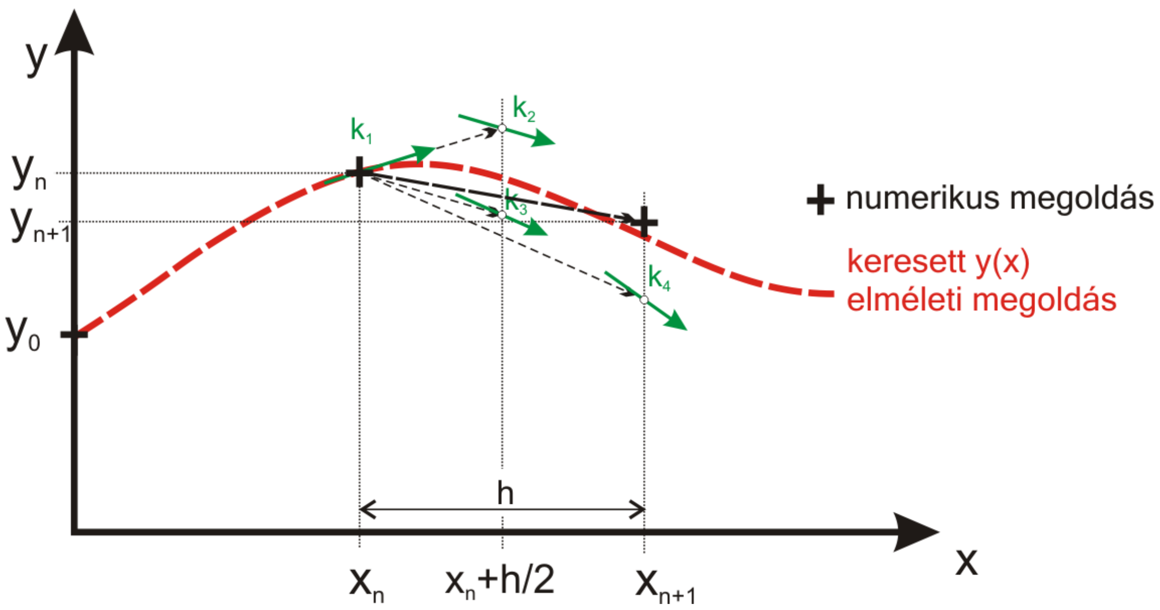
ahol,

$$k_1 = f(x_n, y_n), \tag{4.46}$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1), \tag{4.47}$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2), \tag{4.48}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3). \tag{4.49}$$



4.16. ábra. Negyedrendű Runge-Kutta módszer

A módszercsalád általánosítása az Explicit Runge-Kutta módszer. Az $n+1$-dik függvényérték egy k-adrendű módszerrel számolható:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4.50}$$

ahol

$$k_1 = f(x_n, y_n), \tag{4.51}$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21}hk_1), \tag{4.52}$$

...

$$k_s = f(x_n + c_s h, y_n + a_{s1}hk_1 + a_{s2}hk_2 + \ldots + a_{s,s-1}hk_{s-1}). \tag{4.53}$$

A kifejezésben s egész változó, a szakaszok száma, a_{ij}, b_i és c_i együtthatók, melyeket szokásosan az ún. Butcher-táblázat tartalmaz. A lépésköz: h.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \\
c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

4.17. ábra. Butcher-táblázat

4.3.3. Nyíltfelszínű csatorna hidraulikai hálózatszámításba illesztése

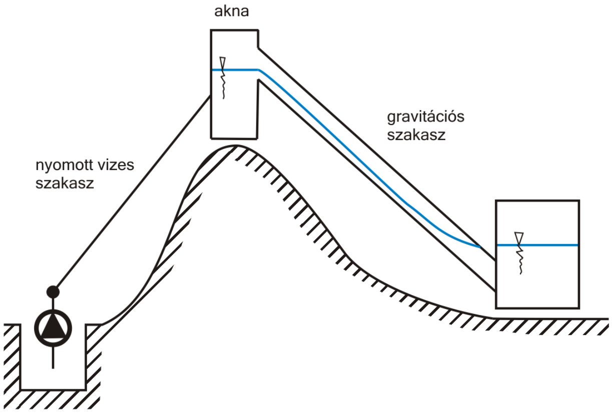
A fent leírt két módszerrel ismert $A(y)$; $K(y)$ vagy $R_h(y)$; $B(y)$ összefüggések, i,n tényezők és adott Q térfogatáram esetén numerikusan megoldhatjuk a

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{4.54}$$

alakú egyenletet. A megoldó egyetlen csatornára, $y(0) = y_e$ kezdeti feltételből számolva

$$y_v(y_e,Q) = \int_{x=0}^{x=L} f(y_e)dx + C \tag{4.55}$$

eredményt ad.
Felmerül a kérdés, hogy ez hogyan illeszthető egy hidraulikus hálózat modelljébe.[9] Tekintsük a következő (pl. szennyvíz elvezető) csővezeték rendszert (4.18. ábra).



4.18. ábra. Egyszerű NYF ágat is tartalmazó hidraulikai rendszer

Ahogy teltszelvényű áramlások esetén, úgy a nyíltfelszínű áramlásoknál is a térfogatáram állandóságát a **csomópontok**ban a kontinuitási egyenlet biztosítja.

Az **ágegyenlet** esetében a telt szelvényű cső $p_e - p_v = f(Q)$ alakú egyenlet helyett olyan összefüggésre jutunk, ahol a csatornák végpontjait jellemző nyomások is a vízfelszín magasságának függvényei (mivel a csatornák például változó vízszintű aknákat köthetnek össze). A légkörre nyitott aknákra, mint pl. a medencékre felírhatóak az alábbi hidrosztatikából ismert egyenletek:
$p_e = (y_e + z_e)\rho g$
$p_v = (y_v + z_v)\rho g$
valamint $y_v = y_v(y_e,Q)$ alakú. Ebből ismert y_e és y_v esetén meghatározható az a Q térfogatáram, és folyadékfelszín alak, ami ezt a kettőt összeköti; vagy ismert y_e és Q térfogatáramhoz megtalálható a folyadékfelszín alakja, és y_v csővégi vízmagasság. Előbbi esetében a térfogatáram iterációs módszerrel (pl. Newton-módszerrel), egy kezdeti értékből indulva kapható meg. Amennyiben a hálózatban egy ágelem lehetségesen gravitációs szakasz, az ágegyenletet ilyenformán kell felírni, és a HR megoldásakor ezekre az ágakra egy belső iterációs ciklust kell indítani. (Megjegyzendő, hogy ilyenkor célszerű a nyomott vizes szakaszok ágegyenleteit is ρg-vel leosztva, méter dimenzióban felírva használni.)

A NYF ágegyenlet alakja:

$$y_v - \widetilde{y_v}(y_e,Q) = 0, \tag{4.56}$$

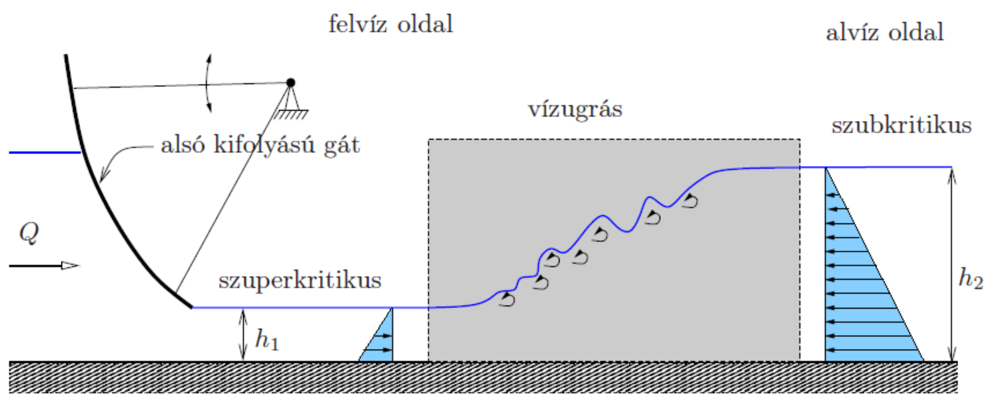
ahol $\widetilde{y_v}(y_e,Q)$ y_e-ből valamilyen Q értékkel indított numerikus megoldás eredménye.

NYF hidraulikai modellezésekor két fontos **speciális eset** van: 1) a csatorna megtelik, 2) vízugrás következik be. Amennyiben ezekkel találkozunk az NYF ágegyenlet érvényét veszti a teljes hosszon, így máshogy kell kezelnünk ezeket az eseteket.

1) A csatorna megtelik
Amennyiben az iterációs számítás során $y(x^*)$ eléri a csatorna magasságának y_{max} értékét, a csatorna megtelik. Ilyen esetben x^* hosszkoordinátáig a nyíltfelszínnél megszokott összefüggéssel határozzuk meg a térfogatáramot úgy, hogy $y(x^*) = y_{max}$ végpontba jussunk. Innen tovább viszont telt szelvényű áramlás van, vagyis a csővégi magasság (amiből a csomóponti nyomást számoljuk) ennek a súrlódás miatti veszteségmagassággal csökkentett értéke:

$$y_v = y(x^*) - \lambda \frac{L - x^*}{D} \frac{Q^2}{2gA^2}. \tag{4.57}$$

2) Vízugrás
Rohanó áramlásból a közeg csak vízugrás átmeneten keresztül juthat szubkritikus áramlásba, ami átmenet tetemes energiaveszteséggel jár. A szuper- és szubkritikus átmenetben emiatt nem érvényes a Bernoulli-egyenlet, így az impulzustételből kaphatjuk meg a vízugrás utáni vízfelszín magasságot és sebességet.
Vegyük fel a vízugrást magában foglaló ellenőrző felületet, és írjuk fel rá az impulzustételt,



4.19. ábra. Vízugrás

ld. pl. [1]:

$$\dot{m}(v_2 - v_1) = F_{p1} - F_{p2} = A_1 \frac{1}{2} \rho g y_1 - A_2 \frac{1}{2} \rho g y_2. \tag{4.58}$$

Legyen a keresztmetszet téglalap. Ismert $\dot{m} = \rho B y v$. A kontinuitási törvény összenyomhatatlan közegre: $B y_1 v_1 = B y_2 v_2$. Az előző egyenlethez ezeket felhasználva, átrendezve kapjuk:

$$\rho B y_2 v_2 v_2 + B y_2 \rho g \frac{1}{2} y_2 = \rho B y_1 v_1 v_1 + B y_1 \rho g \frac{1}{2} y_1. \tag{4.59}$$

$$\frac{y_2 v_2^2}{g} + \frac{y_2^2}{2} = \frac{y_1 v_1^2}{g} + \frac{y_1^2}{2}. \tag{4.60}$$

Az alvíz oldali sebességet fejezzük ki a kontinuitásból:

$$v_2 = v_1 \frac{y_1}{y_2}, \tag{4.61}$$

és írjuk be az egyenletünkbe.

$$\frac{y_2}{g}\frac{v_1^2 y_1^2}{y_2^2} + \frac{y_2^2}{2} = \frac{y_1 v_1^2}{g} + \frac{y_1^2}{2}. \tag{4.62}$$

Vezessük be a $Fr_1^2 = \frac{v_1^2}{gy_1}$ jelölést, és bővítsük mindkét oldal bal oldali törtjét úgy, hogy a szuperkritikus Froude-szám megjelenjen benne.

$$\frac{y_1^3}{y_2}\frac{v_1^2}{y_1 g} + \frac{y_2^2}{2} = \frac{v_1^2}{y_1 g}y_1^2 + \frac{y_1^2}{2}. \tag{4.63}$$

Ebből: Osszunk le y_2^2-tel, és jelölje $x = \frac{y_2}{y_1}$-t. Kapjuk:

$$Fr^2(\frac{1}{x} - 1) + \frac{1}{2}(x^2 - 1) = 0. \tag{4.64}$$

Rendezzük át, osszuk le $(1-x)$-szel, majd oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

$$x^2 + x - 2Fr^2 = 0. \tag{4.65}$$

A megoldások közül az $x = 1$ eset, illetve zárójelben lévő kifejezés negatív gyöke áramlástani szempontból irreleváns, így a keresett megoldás:

$$x = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1}{2}. \tag{4.66}$$

Nézzük meg ezt egy **példa** alapján! Legyen egy 20 cm magas vízfelszín 3 m/s sebességű, nyíltfelszínű áramlás egy csatornában. Mekkora lesz a vízugrás utáni folyadékmagasság? 1 m széles téglalap alakú csatornát feltételezve mekkora lesz a térfogatáram? Mekkora a közeg fajlagos energiája a vízugrás előtt és mögött? Becsülje a fajlagos energiaveszteséget!
Megoldás:
A közeg szuperkritikus hullámterjedési sebessége: $a_1 = \sqrt{gy_1} = 1{,}4$ m/s.
A kezdeti Froude-szám: $Fr_1 = \frac{v_1}{a_1} = 2{,}142$, vagyis az áramlás valóban szuperkritikus.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1}{2} = 2{,}57. \tag{4.67}$$

Ebből: $y_2 = 0{,}514m$. Kiszámítható a kialakuló új közegsebesség a kontinuitási egyenletből:

$$v_2 = \frac{y_1 v_1}{y_2} = 1{,}17m/s. \tag{4.68}$$

A szállított térfogatáram:

$$Q = y_1 v_1 B = 0{,}6m^3/s. \tag{4.69}$$

A közeg felvíz oldali fajlagos energiája:

$$m_1 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}6587m. \tag{4.70}$$

A kilépő közeg fajlagos energiája:

$$m_2 = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}584m. \tag{4.71}$$

Ebből kiszámítható a fajlagos energiaveszteség:

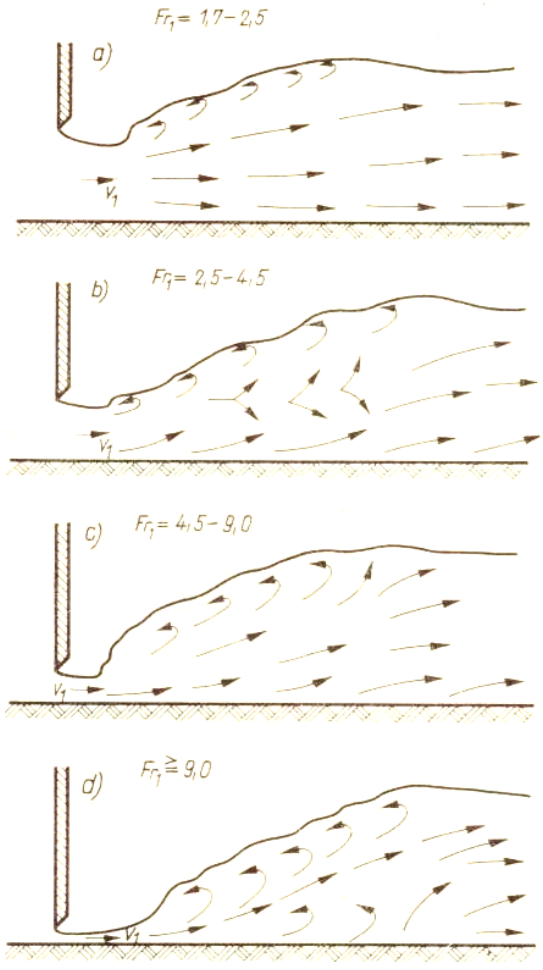
$$\frac{m_1 - m_2}{m_1} = 11{,}4\%. \tag{4.72}$$

További **megjegyzések** a vízugrás jelenéségéhez:

1) A vízugrásnak a benne kialakuló sebességeloszlás függvényében három típusa van: a szabad vízugrás, a beduzzasztott fedőhengeres és a felszíni vízugrás. Szabad vízugrásban a rohanó víz a szelvény teljes keresztmetszetét kitöltve, szabad felszínnel mozog előre. Beduzzasztott fedőhengeres vízugrás esetén a rohanó víz csak a szelvény alsó részén rohan, míg felette a fedőhenger forog. Míg felszíni vízugrásban a víz a felszínen rohan előre, a nagy víztömegek alatta kavarognak [20].

2) A szabad vízugrás a Fr_1, a belépési szelvény Froude-száma függvényében különböző altípusokba sorolható.

3) Vannak olyan helyzetek, amikor a vízugrást mesterségesen hozzák létre. Ilyen alkal-



4.20. ábra. Vízugrás altpusai a Froude-szám függvényében (Forrás:[20])

mazási példa figyelhető meg a duzzasztóművekben (gátaknál, vízerőművekben), amikor a felesleges vizet elengedik. Ez a nagy mennyiségű víz azonban nagyon erozív hatású, tönkreteheti a csatornamedert, mivel a nagy víztömeg energiája a súrlódásban vész el. Ezt megakadályozandó a vizet visszaduzzasztják olyan helyen, ahol nem erodálja a csatornát, evvel a vízugrásban az energia egy jó része disszipálódik, és máshol már nem okoz kárt.

4) A szabadban a folyók szubkritikus áramlással áramlanak, fajlagos energiájuk nagy része az „y" magasság tagban tárolódik, ehhez képest a mozgásból adódó tag „$v^2/2g$" jóval kisebb.

4.4. Mintakérdések a nyíltfelszínű áramlásokhoz

M4.1. 200 m hosszú, 5 m széles, 0,2 % lejtésű, téglalap alakú csatornában víz áramlik, az átlagos vízmagasság 20 cm , a térfogatáram 1440 m^3/h . A csatorna végén megemelve az alvízoldali medence vízszintjét hogyan változik a térfogatáram? Válaszát indokolja!
M4.2. Adja meg a nyíltfelszínű prizmatikus csatornaáramlást leíró közönséges differenciálegyenletet (a legrövidebb formában)! Magyarázza az egyenletben szereplő mennyiségeket!
M4.3. Definiálja a Fr számot! Magyarázza a szubkritikus és szuperkritikus áramlást! Hogyan számolható a hullámterjedési sebesség nyíltfelszínű áramlásban?
M4.4. Definiálja és magyarázza a normál áramlást!
M4.5. Definiálja és magyarázza a kritikus áramlást!
M4.6. Rajzolja meg vázlatosan a folyadékfelszín alakját $y_n > y_c$ és $y_n < y_c$ esetekre!
M4.7. Egy B=5 m szélességű téglalap keresztmetszetű csatornában víz áramlik. A lejtés 2 %, a Manning-féle érdességi tényező: 0,012. Határozza meg a $Q = 0{,}8\ m^3/s$-hoz tartozó normál és kritikus vízszinteket! (A hidraulikai sugár számításakor éljen azzal a feltételezéssel, hogy a csatorna szélessége sokkal nagyobb, mint a folyadék magassága!)(*Megoldás:* y_c=0,1377 *m,* y_n=0,0758 m.)
M4.8. Mikor alakul ki vízugrás? Magyarázatát ábrával szemléltesse! Milyen paraméterektől függ a vízugrás utáni vízszint?
M4.9. Vízugrás felvízoldali (a vízugrás előtti áramlás) adatai: y_1= 18 cm, v_1= 3 m/s. Számítsa ki a vízugrás utáni szintet és vízsebességet! (*Megoldás:* $y_2 = 0{,}492m$, $v_2 = 1{,}1m/s$.)
M4.10. Vízugrás felvízoldali (a vízugrás előtti áramlás) adatai: y_1= 20 cm, v_1= 4 m/s. Számítsa ki a vízugrás utáni fajlagos energiaveszteségét, ha a csatorna szélessége 1 m ! (*Megoldás:* 0,234.)
M4.11. Ismertesse a nyíltfelszínű áramló közeg fajlagos energiáját rögzített térfogatáram mellett!
M4.12. Ismertesse a nyíltfelszínű áramló közeg térfogatáramát rögzített fajlagos energia mellett!
M4.13. Ismertesse pár mondattal az Explicit Euler módszer alkalmazásának módját a nyíltfelszínt leíró egyenlet megoldására!
M4.14. Ismertesse pár mondattal a negyedrendű Runge-Kutta módszer alkalmazásának módját a nyíltfelszínt leíró egyenlet megoldására!

5. fejezet

Összenyomható közegek stacionárius áramlása csővezetékekben

A fejezet az összenyomható közegek modellezéséhez szükséges elméleti ismeretek áttekintése után bemutatja a stacionárius izoterm és adiabatikus csőáramlásokat leíró egyenleteket. Összenyomható közegek áramlására jó példa lehet a földgázvezetékben való áramlás. A megszerzett tudás ellenőrzését a fejezet végén az anyagrészhez kapcsolódó mintafeladatok segítik. A témával számos szakirodalmi forrás foglalkozik, néhány példaként említjük az alábbiakat [9, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

5.1. Elméleti áttekintés

Az első egyenlet a **kontinuitás**, mely az anyagmegmaradást írja le, és csőáramlások esetén a

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \tag{5.1}$$

alakban írható fel, ahol az 1-es és 2-es indexek az áramlás egy-egy keresztmetszetére vonatkozó átlagértékeket jelölik.
Az egydimenziós mozgásegyenlet (Newton 2. axiómája, impulzus megmaradás) stacionárius áramlásra

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{5.2}$$

Az első tag átírható, így az egyenlet

$$\frac{\mathrm{d}(v^2/2)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{5.3}$$

Állandó sűrűséget feltételezve integrálás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2, \tag{5.4}$$

ami az összenyomhatatlan közegekre érvényes veszteségmentes Bernoulli-egyenlet.

Az (5.3)-as egyenlet harmadik tagja vízszintes áramlás esetén zérus, illetve gázok esetén egyéb esetekben is elhanyagolható. A sűrűség változásának figyelembe vételével integrálás után ezúttal azt kapjuk, hogy

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{5.5}$$

Az egyenlet jobb oldalának kiszámításához ismernünk kell a nyomás és a sűrűség közötti kapcsolatot, melyhez szükségünk van egyrészt **anyagtörvényre**, mely a továbbiakban az ideális gáz állapotegyenlete, azaz

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{5.6}$$

lesz, másrészt kell egy negyedik egyenlet is, mely az **állapotváltozás minőségét határozza meg**, ez izoterm (T=áll.) esetben

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2}, \tag{5.7}$$

izentrópikus állapotváltozás esetén pedig

$$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa}, \tag{5.8}$$

ahol κ az állandó nyomáson és az állandó térfogaton vett fajhők hányadosa.

5.2. Izoterm csőáramlások

Izoterm csőáramlások során a nevükből adódóan az áramló közeg hőmérséklete állandó, azaz a közeg és a csőfal között a hőátadás elegendően nagy ahhoz, hogy a gáz és a környezet hőmérséklete azonos legyen. Tipikusan szigeteletlen csőben lassan áramló, összenyomható közegekre alkalmazható ez a közelítés, ilyenek például a földgáz távvezetékek. Állandó sűrűségű, azaz inkompresszibilis esetben egy egyenes állandó keresztmetszetű csőszakasz vesztesége a

$$\Delta p'_{\text{inkompr.}} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} v^2 \tag{5.9}$$

egyenlettel írható le. Összenyomható közeg esetén azonban figyelembe kell venni, hogy mind a sűrűség, mind a sebesség változik. Ennek oka, hogy a súrlódás miatt csökken a nyomás, ami az (5.7)-es egyenlet miatt a sűrűséget is csökkenti, ez azonban a kontinuitás miatt ((5.1)-es egyenlet) megnöveli a sebességet. Ahhoz tehát, hogy egy csőszakasz nyomástveszteségét meghatározzuk, ezeket a jelenségeket figyelembe kell vennünk.

Ehhez először írjuk fel az (5.9)-es egyenletet differenciál alakban. Ekkor az L csőhossz helyett a $\mathrm{d}x$ elemi hossz és $\Delta p'$ helyett a $-\,\mathrm{d}p$ elemi nyomásesés jelenik meg (az ellentétes előjel oka az, hogy a pozitív veszteség a cső mentén negatív nyomásgradiensnek felel meg). Ezzel

$$-\,\mathrm{d}p = \lambda \frac{\mathrm{d}x}{D} \frac{\rho}{2} v^2(x). \tag{5.10}$$

Az $\dot{m} = \rho v A$ tömegáram és a $p/\rho = RT$ ideális gáz állapotegyenletének felhasználásával

$$-\,\mathrm{d}p = \lambda \frac{\mathrm{d}x}{D} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\dot{m}}{\rho A}\right)^2 = \lambda \frac{\mathrm{d}x}{D} \frac{1}{2} \frac{\dot{m}^2}{\rho A^2} = \lambda \frac{\mathrm{d}x}{D} \frac{1}{2} \frac{\dot{m}^2}{A^2} \frac{RT}{p}. \tag{5.11}$$

Rendezés után látható, hogy ez egy szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenlet:

$$-\,p\,\mathrm{d}p = \lambda \frac{\dot{m}^2}{2DA^2} RT\,\mathrm{d}x, \tag{5.12}$$

melyet a cső eleje (1) és vége (2) között integrálva

$$\int_{p_1}^{p_2} -p\,\mathrm{d}p = \int_0^L \lambda \frac{\dot{m}^2}{2DA^2} RT\,\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

adódik. Ezzel

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{\dot{m}^2}{2DA^2} RTL. \tag{5.14}$$

Ez a kifejezés egyszerűbb alakra hozható, ha a tömegáram és az RT szorzat helyére a cső elején kiértékelt állapotváltozókat helyettesítjük be, így

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 v_1 A)^2}{A^2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho_1}{2} v_1^2 p_1. \tag{5.15}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldalán megjelenik az inkompresszibilis nyomásesés a cső elejére vonatkozó adatokból számítva, azaz

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \Delta p'_{\text{inkompr.},1} p_1. \tag{5.16}$$

Ezzel tehát megkaptuk az izoterm csőáramlásokra érvényes egyenletet egy csőre, ami egy csőhálózat egy ágának lehet az **ágegyenlete**. A **csomóponti egyenleteket** a csomóponti kontinuitások adják — fontos kiemelni, hogy ezeket a változó sűrűség miatt mindenképpen **a tömegáramokra kell felírni**.

5.3. Súrlódásos adiabatikus csőáramlások

Súrlódásos adiabatikus áramlások alatt olyan áramlásokat értünk, melyeknél a fali súrlódást figyelembe vesszük, de az emellett jelentkező hőtranszportot elhanyagoljuk. A gyakorlatban ezt a közelítést jellemzően rövid csövekben kialakuló gyors áramlásokra vagy hőszigetelt gázvezetékekre lehet alkalmazni.

5.3.1. Az energiaegyenlet

Az **energiaegyenlet** hőközlés mentes (adiabatikus) esetben, ha a külső technikai munkavégzés is zérus

$$\Delta h_{\text{tot}} = h_2 - h_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0. \tag{5.17}$$

Mivel $h = c_p T$, és a helyzeti energia megváltozása elhanyagolható, így

$$T_1 + \frac{v_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{v_2^2}{2c_p} = T_{\text{ö}}, \tag{5.18}$$

ahol $T_{\text{ö}}$ az **összhőmérséklet**, vagy más néven torlóponti hőmérséklet, ami tehát gáz adiabatikus áramlásakor megmarad.

A gázdinamika egyik legfontosabb mennyisége a **Mach-szám**, mely megmutatja a lokális sebesség és a lokális izentrópikus hangsebesség hányadosát, azaz

$$M = \frac{v}{a}, \tag{5.19}$$

ahol a hangsebesség

$$a = \sqrt{\kappa RT}. \tag{5.20}$$

Mach-szám alapján csoportosíthatjuk az áramlásokat, szubszonikus áramlásról akkor beszélhetünk, ha a lokális sebesség az izentrópikus hangsebességnél kisebb, tehát a Mach-szám értéke kevesebb, mint 1. Ezzel szemben amikor a lokális sebesség jóval nagyobb, mint a hangsebesség szuperszonikus áramlásról beszélünk. Általában 1,3-as Mach-szám (de legalább $M>1$) felett érvényes a szuperszonikus áramlás elnevezés, azaz a lokális sebességnek minden esetben némileg meg kell haladnia a hangsebesség értékét.

Célszerű az energiaegyenletet is átírni úgy, hogy a sebesség helyett a Mach-szám szerepeljen benne. Ehhez használjuk ki az ideális gáz állapotegyenletét ($p = \rho RT$), illetve azt, hogy

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R. \tag{5.21}$$

Ezekkel

$$T_{\text{ö}} = T + \frac{v^2}{2c_p} = T + \frac{v^2}{2\frac{\kappa}{\kappa-1} R}\frac{T}{T} = T + \left(\frac{v}{a}\right)^2 \frac{\kappa - 1}{2} T \tag{5.22}$$

Rendezve adódik, hogy

$$\frac{T_{\text{ö}}}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \tag{5.23}$$

5.3.2. Alkalmazás csőáramlásokra (Fanno-görbe)

Első lépésben a célunk az úgynevezett **Fanno-görbe** egyenletének levezetése, mely egy súrlódásos adiabatikus csőáramlásban megadja a kapcsolatot az áramló közeg entrópiája és hőmérséklete között. A számítások állandó átmérőjű csőre vonatkoznak.
Induljunk ki a hőtan első főtételéből, mely szerint

$$\mathrm{d}q + T\,\mathrm{d}s_{\text{irr}} = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{5.24}$$

ahol $\mathrm{d}q$ a hőközléssel (vezetés, konvekció, sugárzás) bevezetett hő, $T\,\mathrm{d}s_{\text{irr}}$ a gáz súrlódása miatti disszipációs munka. Az egyenletben szereplő tagok közül az áramlás adiabatikus jellege miatt $\mathrm{d}q$ zérus, nincs hőközlés. Viszont a súrlódás miatt a közeg entrópiája változik, ezért a $T\,\mathrm{d}s_{\text{irr}}$ **irreverzibilis tag nem zérus**. A szintén hőtanból ismert $\mathrm{d}u = c_v\,\mathrm{d}T$ összefüggés segítségével

$$T\,\mathrm{d}s_{\text{irr}} = c_v\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{5.25}$$

Kihasználva a

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \tag{5.26}$$

átírást és az ideális gáz állapotegyenletét,

$$T\,\mathrm{d}s_{\text{irr}} = c_v\,\mathrm{d}T + \rho RT\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho \tag{5.27}$$

adódik, mely rendezés után

$$\mathrm{d}s_{\text{irr}} = c_v\frac{\mathrm{d}T}{T} - R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{5.28}$$

Mint ismeretes, $c_v = \frac{1}{\kappa-1}R$, ezzel

$$\frac{\mathrm{d}s_{\text{irr}}}{R} = \frac{1}{\kappa - 1}\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{5.29}$$

Ahhoz, hogy az egyenletben változóként csak az entrópia és a hőmérséklet maradjon, a $\mathrm{d}\rho/\rho$ tagot ki kell fejeznünk a hőmérséklettel. Ehhez induljunk ki a kontinuitásból, mely szerint

$$\dot{m} = \text{állandó}. \tag{5.30}$$

Állandó keresztmetszet mellett

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho v = \text{állandó}. \tag{5.31}$$

A kifejezés állandósága miatt a teljes deriváltja zérus, azaz

$$\mathrm{d}\rho v + \rho \, \mathrm{d}v = 0, \tag{5.32}$$

rendezve

$$-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}v}{v}. \tag{5.33}$$

Az energiaegyenlet (5.18) rendezés után

$$(T_{ö} - T) \frac{2c_p}{v^2} = 1 = \text{állandó}, \tag{5.34}$$

melynek teljes deriváltja szintén zérus, így

$$-\mathrm{d}T \frac{2c_p}{v^2} + (-2) \frac{2c_p}{v^3} (T_{ö} - T) \, \mathrm{d}v = 0. \tag{5.35}$$

Ezt $v^2/(2c_p(T_{ö} - T))$-vel szorozva és rendezve, valamint az (5.33)-as egyenlet felhasználásával

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}T}{T_{ö} - T} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{5.36}$$

Ezzel az (5.29)-es egyenletet újra felírva

$$\frac{\mathrm{d}s_{\mathrm{irr}}}{R} = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}T}{T_{ö} - T} \tag{5.37}$$

adódik, mely két pont között integrálva

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{1}{\kappa - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{T_{ö} - T_2}{T_{ö} - T_1}\right). \tag{5.38}$$

Ennek segítségével a **T-s diagram már megszerkeszthető**, de célszerű az alábbi formára rendezni:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{1}{\kappa - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_{ö}} \frac{T_{ö}}{T_1}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \frac{T_2}{T_{ö}}}{1 - \frac{T_1}{T_{ö}}}\right). \tag{5.39}$$

A görbének van **egy pontja** (5.1. ábrán x ponttal jelölve), ahol az érintője függőleges, ekkor

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s_{\mathrm{irr}}} \to \infty, \tag{5.40}$$

azaz

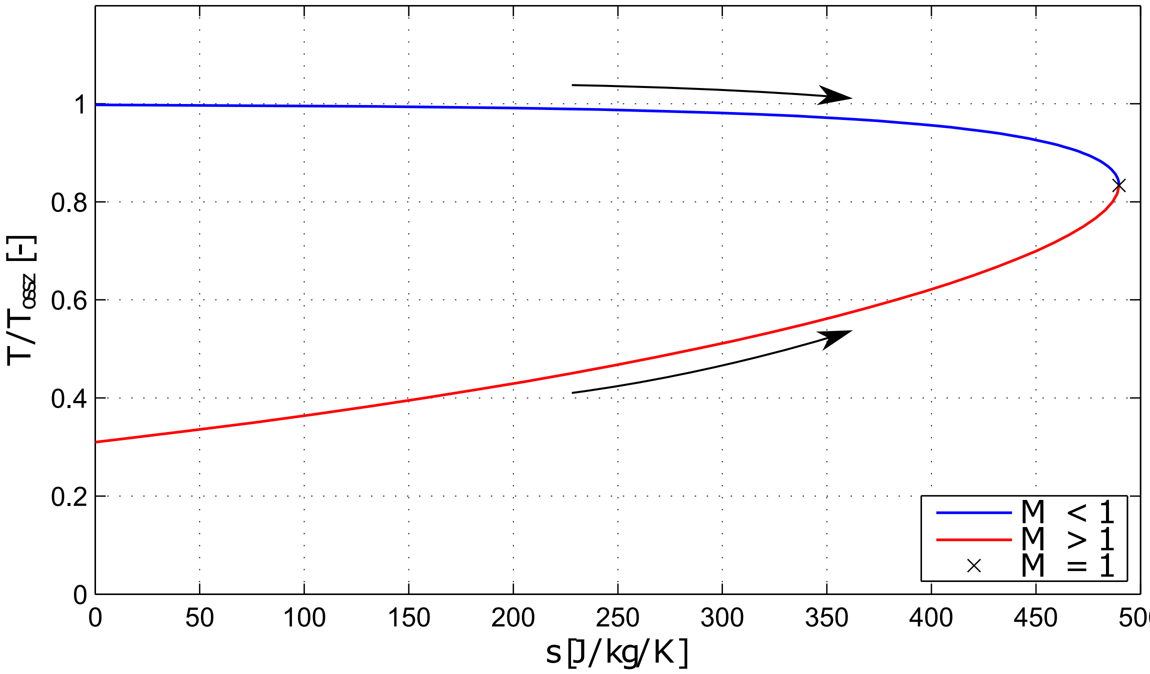
$$\frac{\mathrm{d}s_{\mathrm{irr}}}{\mathrm{d}T} = 0. \tag{5.41}$$

Az (5.37)-es egyenlet rendezése után így

$$\frac{\mathrm{d}s_{\mathrm{irr}}}{\mathrm{d}T} = \frac{R}{\kappa - 1} \frac{1}{T} - \frac{1}{2} \frac{R}{T_{ö} - T} = 0, \tag{5.42}$$

melyből végül adódik, hogy ebben a pontban:

$$\frac{T_{ö}}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2}. \tag{5.43}$$



5.1. ábra. Fanno-görbe levegőre ($\kappa = 1.4$). A zérus entrópia az $M = 0{,}1$-es Mach-számhoz van rendelve.

Átrendezve az egyenletet, a statikus hőmérséklet és az összhőmérséklet hányadosára vonatkozó összefüggést kapunk, amely csak az éppen hangsebességgel történő áramlás esetén teljesül:

$$\frac{T}{T_{\ddot{o}}} = \frac{2}{\kappa + 1}. \tag{5.44}$$

Visszatekintve az (5.23)-as egyenletre látható, hogy a függőleges érintő pontosan az $M = 1$ esethez tartozik, azaz az áramló közeg sebessége megegyezik a lokális hangsebességgel.

Az (5.39)-as egyenlet alapján megszerkesztett T-s diagram a **Fanno-görbe**, melyre egy példa a 5.1-es ábrán látható. A függő változó jelen esetben $T/T_{\ddot{o}}$, azonban ez az (5.23)-es egyenlet alapján egyértelműen meghatároz egy Mach-számot is. A felső, kék színű szakasz tartozik a szubszónikus zónához, ezen a Mach-szám balról jobbra haladva $M = 1$-ig nő. Ezzel szemben az alsó, piros színű görbe a szuperszónikus tartománynak felel meg, itt a Mach-szám balról jobbra haladva $M = 1$-ig csökken. Az entrópia csak növekedhet, így ez termodinamikailag is indokolja a szubszónikus áramlások gyorsulását, illetve a szuperszónikus áramlások lassulását. Tehát, ha a csőbe hangsebesség alatti áramlás lép be, akkor a súrlódás hatására növekszik a sebesség a cső végéig, míg a hőmérséklete csökken. Ellenkező esetben, ha hangsebesség feletti a belépő áramlási sebesség, akkor folyamatosan emelkedő hőmérséklet mellett lassul az áramlás, mindaddig míg a cső végén a sebesség el nem éri a helyi hangsebességet. A zérus abszolút entrópiához tartozó pont tetszőlegesen felvehető, az ábrán ez az $M = 0{,}1$-es Mach-számú ponthoz van rendelve.

Ugyan a T-s diagram komoly segítséget nyújt az áramlás értelmezésében, mérnöki oldalról általában arra vagyunk kíváncsiak, hogy ha a cső belépő végén ismerjük az állapotváltozókat, akkor a kilépésig ezek hogyan módosulnak. Ehhez először írjuk fel a mozgásegyenlet stacionárius alakját a súrlódás figyelembe vételével, amely

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{\lambda}{2D}v^2. \tag{5.45}$$

A célunk ebben az esetben is az, hogy mindent a Mach-szám függvényében fejezzünk ki. Az ideális gázokra vonatkozó állapotegyenlet és az energiaegyenlet felhasználásával a (5.45)-ös egyenlet a

$$\frac{2}{\kappa M^3}\,\mathrm{d}M - \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{1}{M+\frac{\kappa-1}{2}M^2}\,\mathrm{d}M = \lambda\frac{\mathrm{d}x}{D} \tag{5.46}$$

differenciálegyenletre transzformálható, melyet egy tetszőleges M_1-től $M = 1$-ig integrálva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{1-M_1^2}{\kappa M_1^2} + \frac{\kappa+1}{2\kappa}\ln\left(\frac{(\kappa+1)\,M_1^2}{2+(\kappa-1)\,M_1^2}\right) = \lambda\frac{x_{\max}}{D}. \tag{5.47}$$

Ebből az egyenletből tehát a belépő Mach-szám (M_1), a csősúrlódási tényező (λ) és az áramló közeg minőségének (κ) ismeretében meghatározható az a csőhossz ($x_{\max}$), ami alatt a közeg pontosan a hangsebességre gyorsul fel ($M_1 < 1$) vagy lassul le ($M_1 > 1$).

Az $M = 1$-hez tartozó állapotváltozókat összefoglaló néven **kritikus állapotváltozóknak** nevezzük, és *-gal jelöljük őket (például p^*). A kritikus hőmérséklet az energiaegyenletből vezethető le (lásd (5.23)-as egyenlet):

$$T_{\text{ö}} = \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_1^2\right)T_1 = \left(1+\frac{\kappa-1}{2}\times 1^2\right)T^* = \frac{\kappa+1}{2}T^*, \tag{5.48}$$

ami rendezés után

$$\frac{T_1}{T^*} = \frac{\kappa+1}{2+(\kappa-1)\,M_1^2}. \tag{5.49}$$

A többi állapotváltozóra:

$$\frac{p_1}{p^*} = \frac{1}{M_1}\sqrt{\frac{T_1}{T^*}} = \frac{1}{M_1}\sqrt{\frac{\kappa+1}{2+(\kappa-1)\,M_1^2}}, \tag{5.50}$$

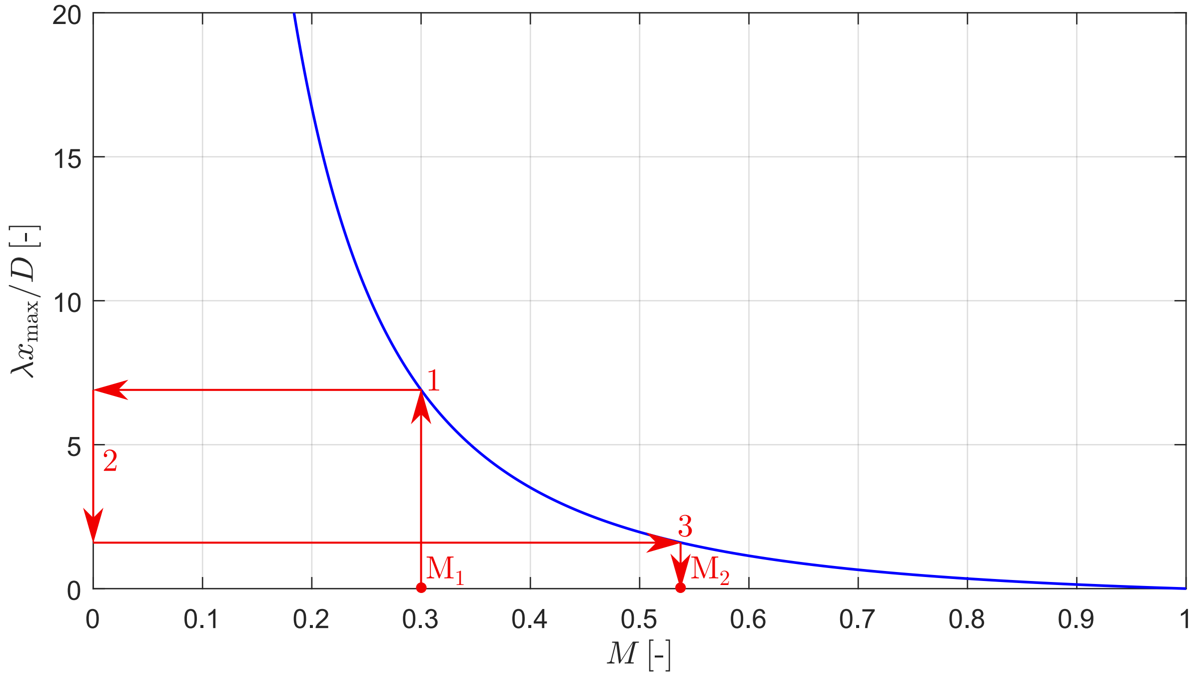
$$\frac{\rho_1}{\rho^*} = \frac{1}{M_1}\sqrt{\frac{T^*}{T_1}} = \frac{1}{M_1}\sqrt{\frac{2+(\kappa-1)\,M_1^2}{\kappa+1}}. \tag{5.51}$$

Az (5.47)-(5.51) egyenletek segítségével tehát egy tetszőleges pontban ismert állapotváltozókból meghatározhatóak a kritikus állapotváltozók (vagy fordítva). Azonban egy olyan számítási eljárásra lenne szükség, ami lehetővé tesz két tetszőleges keresztmetszet — például egy csőszakasz eleje és vége — közötti lépést. Ez a fent hivatkozott egyenletekkel szubszónikus esetben az alábbi módon tehető meg.

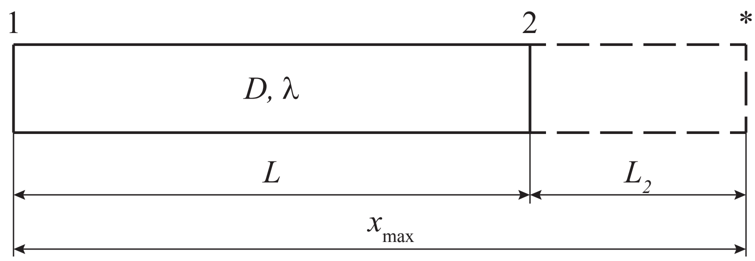
1. A cső elejére kapott Mach-számból az (5.47)-es egyenlet segítségével kiszámítjuk azt az $x_{\max}$ csőhosszt, ami alatt a közeg a hangsebességre gyorsulna. Ha ez kisebb, mint az L csőhossz, akkor a csőben egy merőleges lökéshullámunk lenne, de ezzel az esettel most nem foglalkozunk.

2. Kiszámítjuk az $L_2 = x_{\max} - L$ különbségét. Ha ennyivel hosszabb csövünk lenne, akkor érnénk el a hangsebességet.

3. Az (5.47)-es egyenlettel és $x_{\max} = L_2$ helyettesítéssel meghatározzuk, hogy ennek a fiktív csőnek az elején (ami az eredeti csövünk vége) mekkora a Mach-szám. Ez lesz az eredeti csövünk M_2 kilépő Mach-száma.



5.2. ábra. Mintaszámítás 0.3-es belépő Mach-számra és levegőre ($\kappa = 1.4$).



5.3. ábra. A számítási eljárás szemléltetése.

4. A Mach-számok ismeretében az (5.49)-(5.51) egyenletekkel a belépő (1) jellemzőkből meghatározzuk a kritikus (*) állapotváltozókat, majd azokból a kilépő (2) keresztmetszetbelieket.

Összefoglalva tehát a két tetszőleges ($1 \to 2$) pont közötti lépést felbontottuk két olyan részre ($1 \to^*$ és $^* \to 2$), melyekben a kiinduló vagy a végpont a kritikus keresztmetszet. A folyamat megértését az 5.2-es és 5.3-as ábrák segítik.

Az (5.47)-(5.51) egyenletekből a Mach-szám ismeretében x_{max} és az állapotváltozók könnyen számíthatóak, fordítva viszont ez nem igaz — egyik egyenletből sem fejezhető ki zárt alakban a Mach-szám. Ennek a megoldásához vagy valamilyen numerikus módszerre (például a Newton-módszerre) vagy gáztáblázaton alapuló interpolálásra van szükség.

5.4. Mintafeladatok

5.4.1. Elméleti kérdések

E 5.1. Írja fel az energiamegmaradás elvét leíró egyenletet összenyomható közegek esetére, és ismertesse a benne szereplő fizikai mennyiségek nevét és mértékegységét!
E 5.2. Írja fel és értelmezze az izoterm csőáramlásokra érvényes ágegyenletet!
E 5.3. Írja fel az energiaegyenletet, és ismertesse a benne szereplő fizikai mennyiségek nevét és mértékegységét!
E 5.4. Rajzolja fel a Fanno-görbét, és részletezze a belőle levonható következtetéseket!

5.4.2. Számítási feladatok

SZ 5.1. Egy 100 km hosszú és 1300 mm belső átmérőjű távvezetékben metánt (gázállandója 518 J/kg/K) szállítunk. A betáplálásnál nyomása 80 bar, a távvezeték végén pedig 40 bar. A hőmérséklet a teljes vezeték mentén 293 K, a csősúrlódási tényező 0,02. Mekkorák a sebességek és a térfogatáramok a cső elején és a végén, illetve mekkora a szállított tömegáram? (Megjegyzés: az ideális gáz feltételezés 80, illetve 40 bar nyomású levegő esetén 1,6%, illete 1.1% hibával teljesül.)

Megoldás:
$L = 100\,\mathrm{km} = 10^5\,\mathrm{m}$; $D = 1300\,\mathrm{mm} = 1{,}3\,\mathrm{m}$
$R = 518\,\mathrm{J/kg/K}$
$p_1 = 80\,\mathrm{bar} = 8 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$; $p_2 = 40\,\mathrm{bar} = 4 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$
$T_1 = T_2 = T = 293\,\mathrm{K}$
$\lambda = 0{,}02$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{8 \times 10^6}{518 \times 293} = 52{,}71\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{4 \times 10^6}{518 \times 293} = 26{,}36\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$A = \frac{D^2\pi}{4} = \frac{1{,}3^2\pi}{4} = 1{,}327\,\mathrm{m^2}$$

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \Delta p'_{\text{inkompr.,1}} p_1$$

$$\Delta p'_{\text{inkompr.,1}} = \frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{(8 \times 10^6)^2 - (4 \times 10^6)^2}{2 \times 8 \times 10^6} = 3 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$\Delta p'_{\text{inkompr.,1}} = \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho_1}{2} v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\Delta p'_{\text{inkompr.,1}}}{\lambda \frac{L}{D}\frac{\rho_1}{2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 10^6}{0{,}02 \times \frac{10^5}{1{,}3} \times \frac{52{,}71}{2}}} = 8{,}60\,\mathrm{m/s}$$

$$Q_1 = Av_1 = 1{,}327 \times 8{,}60 = 11{,}41\,\mathrm{m^3/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = 52{,}71 \times 11{,}41 = 601{,}42\,\mathrm{kg/s}$$

$$Q_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2} = \frac{601{,}42}{26{,}36} = 22{,}82\,\mathrm{m^3/s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{22{,}82}{1{,}327} = 17.20\,\mathrm{m/s}$$

SZ 5.2. Levegő ($\kappa = 1{,}4$, $R = 287\,\mathrm{J/kg/K}$) áramlik egy $21{,}3\,\mathrm{m}$ hosszú és $0{,}1524\,\mathrm{m}$ átmérőjű csőben, melynek súrlódási tényezője 0,0198. A belépő keresztmetszetben a nyomás $1{,}379\,\mathrm{bar}$, a hőmérséklet $294\,\mathrm{K}$, a sebesség $124\,\mathrm{m/s}$. Mekkora a kilépő keresztmetszetben a Mach-szám, a hőmérséklet és a nyomás, ha a gáz állapotváltozása adiabatikusnak tekinthető?

Megoldás:
$\kappa = 1{,}4$
$R = 287\,\mathrm{J/kg/K}$
$L = 21{,}3\,\mathrm{m}$
$D = 0{,}1524\,\mathrm{m}$
$\lambda = 0{,}0198$
$p_1 = 1{,}379\,\mathrm{bar} = 1{,}379 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$
$T_1 = 294\,\mathrm{K}$
$v_1 = 124\,\mathrm{m/s}$

$$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 294} = 343{,}70\,\mathrm{m/s},$$
$$M_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{124}{343{,}70} = 0{,}361 < 1, \text{ a közeg gyorsulni fog.}$$

A $\kappa = 1{,}4$-hez tartozó Fanno-táblázatból (ld. tanszéki honlap):

M	$\lambda x_{\max}/D$
0,35	3,4525
0,40	2,3085

Lineárisan interpolálva $M = 0{,}361$-hez:

$$\frac{\lambda x_{\max}}{D} = 3{,}4525 + \frac{2{,}3085 - 3{,}4525}{0{,}40 - 0{,}35} \times (0{,}361 - 0{,}35) = 3{,}2008,$$

$$x_{\max} = 3{,}2008 \frac{D}{\lambda} = 3{,}2008 \times \frac{0{,}1524}{0{,}0198} = 24{,}64\,\mathrm{m} > L, \text{ azaz nincs lökéshullám a csőben.}$$

Az eredeti és az $M = 1$ eléréséhez szükséges csőhossz különbsége:

$$L_2 = x_{\max} - L = 24{,}64 - 21{,}3 = 3{,}34\,\mathrm{m}.$$

Számolás a fiktív csővel:
$$\frac{\lambda L_2}{D} = \frac{0{,}02 \times 3{,}34}{0{,}1524} = 0{,}4383.$$

A fiktív cső elején, azaz az eredeti cső végén a Mach-szám a $\kappa = 1{,}4$-hez tartozó Fanno-táblázatból megkapható a kiszámított $\lambda L_2/D$ viszony alapján:

M	$\lambda x_{\max}/D$
0,60	0,49082
0,65	0,32459

Lineárisan interpolálva $\lambda L_2/D = 0{,}43830$-hoz:

$$M_2 = 0{,}60 + \frac{0{,}65 - 0{,}60}{0{,}32459 - 0{,}49082} \times (0{,}43830 - 0{,}49082) = 0{,}616.$$

Az állapotváltozók Fanno-táblázat vagy direkt számítás után:

$$T_1/T^* = 1{,}170, \quad p_1/p^* = 2{,}996;$$

$$T_2/T^* = 1{,}115, \quad p_2/p^* = 1{,}715.$$

A kilépési jellemzők:

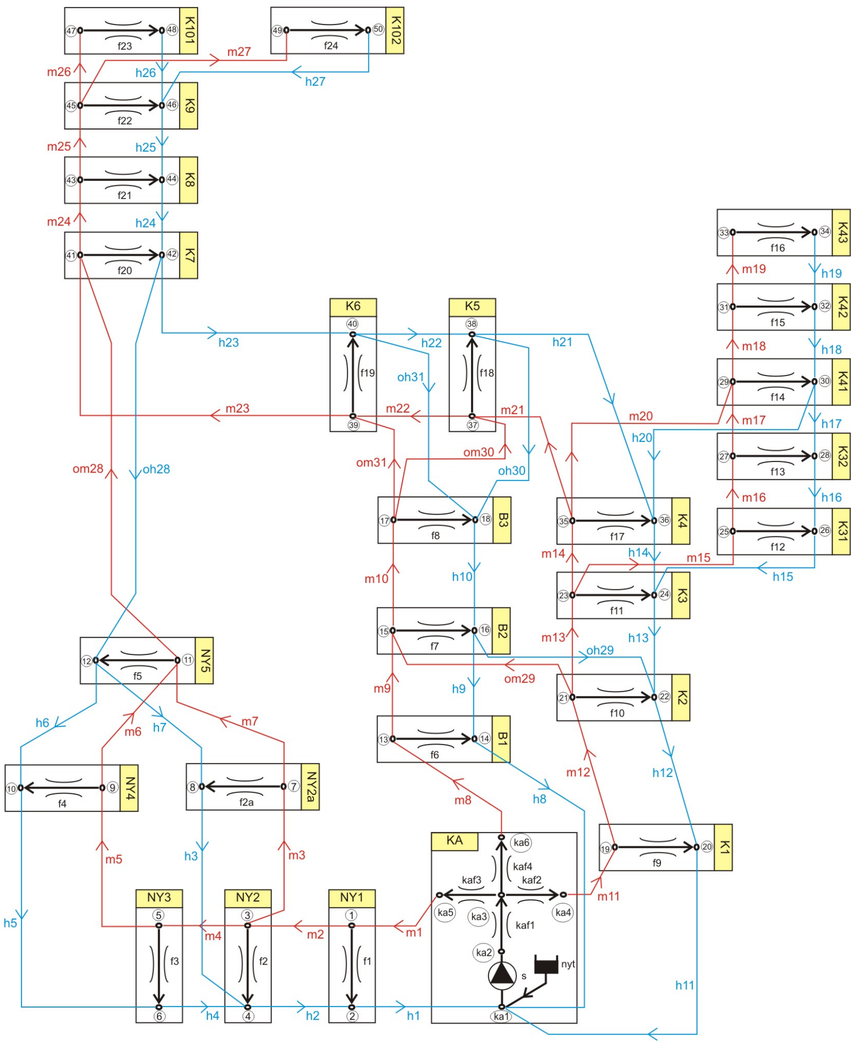
$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p*}{p_1}p_1 = 1{,}715 \times \frac{1}{2{,}996} \times 1{,}379 \times 10^5 = 78\,938\,\mathrm{Pa},$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T^*}\frac{T*}{T_1}T_1 = 1{,}115 \times \frac{1}{1{,}170} \times 294 = 280{,}18\,\mathrm{K}.$$

6. fejezet

Fűtőrendszerek modellezése

A fűtőrendszerek (FR) a nyomott vizes hidraulikai rendszerekhez (HR) hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. A hidraulikai méretezéskor azonban két célunk van: megfelelő mennyiségű és hőmérsékletű közeget kell eljuttatni a fogyasztókhoz. A fogyasztás termikus energia elvétel formájában jelentkezik. A fűtőrendszerek zárt kört képeznek, jól működő rendszerben nincs folyadék elvétel. A rendszerek két jól elkülöníthető rendszerre, meleg vizes és hideg vizes oldalra bonthatók.

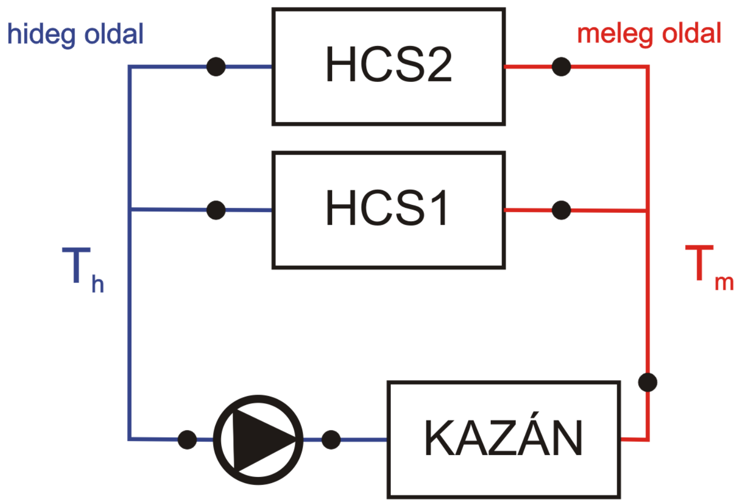


6.1. ábra. Városi távfűtő hálózat modellje [27]

FR modellezésekor tekinthetünk egy egyszerű családi ház fűtési rendszerére, ahol a kazán által felmelegített közeg egy szivattyú segítségével jut el a házban lévő radiátorokig; de egy egész város távfűtő hálózata is modellezhető a leírással; ld. pl. 6.1. ábra.
Általános esetben a következő elemeket tartalmazza: szivattyú, kazán, hőelosztó központok, radiátorok, hőcserélők, és az elemeket összekötő csővezeték rendszer.
Az áramlástan nyomott üzemű hálózatoknál leírt csomóponti és ágegyenletei érvényesek (ld. 3. fejezet, tömegáramokkal felírva), de kiegészülnek a kalorikus csomóponti és ágegyenlettel.
FR leírásakor a következő feltételezésekkel élünk:
- A közeg sűrűsége változik a hőmérséklet függvényében, ezt figyelembe kell vennünk (a kontinuitási törvényben ezért használunk tömegáramokat a térfogatáramok helyett).
- A közeg kitölti a szerelvényeket (teltszelvényű az áramlás).
- A folyamat stacionáriusnak tekinthető.
- A hálózat hurkolt felépítésű.
A témával számos szakirodalmi forrás foglalkozik, néhány példaként említjük az alábbiakat [28, 29, 27].

6.1. A leíró egyenletrendszer

Tekintsük a következő 6.2. ábrán bemutatott nagyon egyszerű hálózatot. A zárt rendszerben a lehűlt vizet egy szivattyú szállítja a kazán felé, hogy ismét felmelegedjen. Ezt követően áramlik a meleg víz a hőcserélők (radiátorok) felé, majd ott lehűl, és a folyamat ismétlődik. A modellezés szempontjából a hőátadás csak a kazánban, valamint a hőcserélőkön történik, azaz eltekintünk a szivattyún és a csővezetékeken történő hőátadástól.



6.2. ábra. Fűtőrendszer egyszerűsített modellje

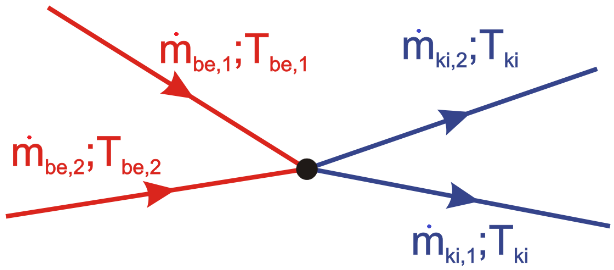
A hálózat modellezéséhez használjuk:

- csomóponti kontinuitási egyenleteket (n_{csp} db)
- hidraulikus ágegyenleteket (n_{ag} db)
- kalorikus csomóponti egyenleteket (n_{csp} db)
- kalorikus ágegyenleteket (n_{ag} db).

Az első kettő egyenlet nem különbözik a nyomott üzemű hálózatok stacionárius modellezésénél leírtaktól (2. fejezet), itt újra nem részletezzük őket. A **csomóponti kontinuitási egyenlet** esetében arra kell ügyelnünk, hogy mivel a sűrűség változhat, az egyenletet tömegáramokra kell felírni. Csomóponti elvétellel viszont nem kell számolnunk.

A **hidraulikus ágegyenletek**kel kapcsolatban megjegyzendő, hogy a fűtőrendszerek esetében nem lép fel olyan állapot, hogy közeg visszafelé folyik, így a $v|v|$ egyszerűsödik v^2-re. A hőcserélőket fojtásként modellezzük, veszteségtényezőt rendelünk hozzá, valamint referencia keresztmetszetet, ami szokásosan a csatlakozó cső keresztmetszete. (Tipikus veszteségtényező értékeket tartalmaznak magyar [1] illetve angol nyelvű [16] szakkönyvek; ismert továbbá, hogy a ζ függ a Reynolds-számtól, viszont a modellezéskor konstansnak tekintjük.) A kazánt jelentős nyomásesés nélküli ágelemként szokás modellezni.

A kalorikus csomóponti egyenlet a **keveredési egyenlet**. A modellezésben minden bejövő ágról feltételezzük, hogy különböző hőmérsékletű és tömegáramú közegek lépnek be, majd a csomópontban keverednek, így a kimenő hőmérséklet közös. Bár minden csomópontra felírható egy ilyen összefüggés, könnyen belátható, hogy csak olyan csomópontokban van jelentősége, ahol több, különböző hőmérsékletű ág lép be a csomópontba. Egyéb esetekben a belépő és kilépő hőmérséklet egyenlőségére egyszerűsödik.
A keveredési egyenlet alakja:



6.3. ábra. Kalorikus csomópont

$$\sum_{i=1}^{n_{be}} c\dot{m}_{be,i}T_{be,i} = T_{ki}\sum_{j=1}^{n_{ki}} c\dot{m}_{ki,j} \tag{6.1}$$

ahol, n_{be} a csomópontba bejövő, n_{ki} az onnan kiinduló ágak száma, $\dot{m}$ a tömegáram, T a hőmérséklet, c a folyékony közeg fajhője (gáz közegekkel ellentétben folyadékoknál nem szokás állandó nyomáson, illetve térfogaton vett fajhőt megkülönböztetni).
A **kalorikus ágegyenlet** összekapcsolja a tömegáramokat és az ágon átfolyó hőmennyiséget. Hőtanból is ismert, általános alakja:

$$P = c\dot{m}\Delta T \tag{6.2}$$

ahol, P a hőteljesítmény, ΔT a hőfoklépcső. Kalorikus ágegyenletet a kazán, radiátor, hőközpont, hőcserélő ágakra, vagyis a kalorikus ágakra szükséges felírni.
Hőcserélők esetén kétféle modell lehetséges. 1) Lehet szabályozható a hőteljesítmény, és így a számítások során a hőteljesítmény tekinthető ismertnek. 2) Ennél gyakoribb, hogy ΔT hőfoklépcső szabályozható, ezt tartják állandó értéken, így a számításnál ez az ismert, bemenő adat.

Numerikus megoldás A fent részletezett egyenletekből álló egyenletrendszer nagyméretű, nemlineáris rendszer, ismeretlenjei a nyomások, tömegáramok, hőmérsékletek és az ezzel változó sűrűségek. Megoldására a Newton-Raphson módszer használható. (lásd

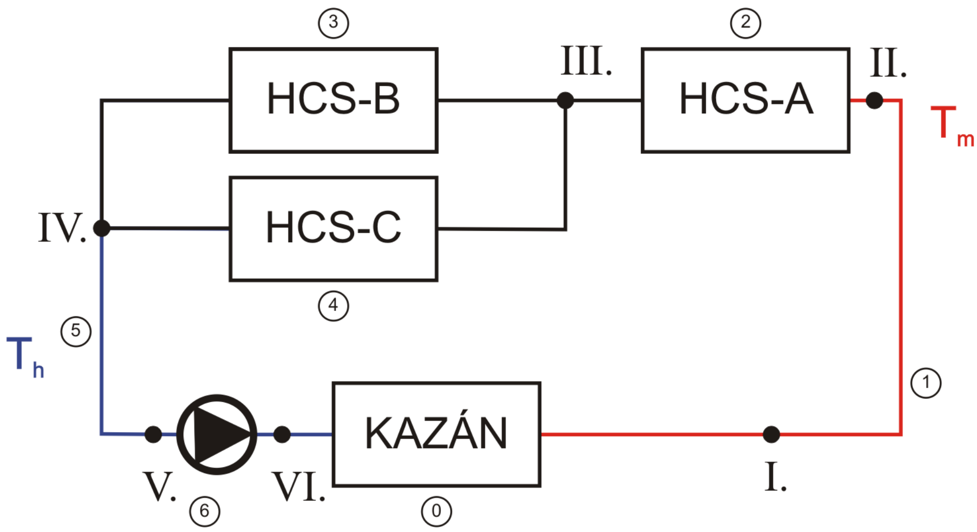
3.3.2. fejezet)

6.2. Példák

A következőkben két nagyon egyszerű példán keresztül mutatjuk be a fűtőrendszerek modellezésének lehetőségét. A feladatok megoldásához szükség van a kalorikus keveredési- és ágegyenletek mellett a korábbiakban részletezett hidraulikus csomóponti- illetve ágegyenletek felírására is. Ugyanis az FR egyes elemei pl.: szivattyú, cső ágelem esetén nem vesszük figyelembe azok hőváltozását (itt nincs hőteljesítmény bevitel, elvétel), de hidraulikai szempontból (pl.: nyomásfokozás, csősúrlódás) hatással vannak a rendszerre.

6.2.1. 1. példa

Az egyszerű fűtőhálózatban egy keringetőszivattyú és kazán biztosítja a három radiátor (HCS-A, HCS-B és HCS-C jelű) számára a meleg vizet, ami lehűlve áramlik vissza a szivattyúhoz. Adott paraméterek: a szivattyú jelleggörbéje, a kazán leadott hőteljesítménye, a három hőcserélő hőfoklépcsője, veszteségtényezője és az ehhez megállapított referencia keresztmetszet, az 1-es és 5-ös jelű csövek hossza, átmérője és csősúrlódási tényezője valamint a csomópontok geodetikus magassága. Keressük a nyomást, tömegáramot, hőmérsékletet és sűrűséget.



6.4. ábra. 1. példahálózat

Vegyük sorba a **CSOMÓPONTOKRA** felírható egyenleteket.

Hidraulikus csomóponti egyenletek.
Ezek az egyenletek fejezik ki a tömegmegmaradás törvényét. Sorrendben a következők írhatók fel:
I. csomópont

$$0 = \dot{m}_0 - \dot{m}_1 \tag{6.3}$$

II. csomópont

$$0 = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \tag{6.4}$$

III. csomópont

$$0 = \dot{m}_2 - \dot{m}_3 - \dot{m}_4 \tag{6.5}$$

IV. csomópont

$$0 = \dot{m}_3 + \dot{m}_4 - \dot{m}_5 \tag{6.6}$$

V. csomópont

$$0 = \dot{m}_5 - \dot{m}_6 \tag{6.7}$$

VI. csomópont

$$0 = \dot{m}_6 - \dot{m}_0 \tag{6.8}$$

Kalorikus keveredési egyenletek.
Az egyszerű rendszerben a IV. csomópont az egyetlen, ahol különböző hőmérsékletű közegek keveredése történik, így csak erre a pontra kell a keveredési egyenletet felírni. (A többi csomópontra a bemenő és kijövő ágak hőmérsékletének egyezősége írható fel.)
IV. csomópont

$$0 = \dot{m}_3 c T_{3,ki} + \dot{m}_4 c T_{4,ki} - \dot{m}_5 c T_V \tag{6.9}$$

ahol $T_{3,ki}$ és $T_{4,ki}$ a HCS-B és HCS-C ágakból kijövő közegek hőmérsékletei.

Vegyük sorba az **ÁGAKRA** felírható egyenleteket.

Hidraulikus ágegyenletek.
Haladjunk a körfolyamatnak megfelelő sorrendben.
Szivattyú (6. ágelem):

$$\rho_h H g = p_{VI} - p_V + \frac{\rho_h}{2}\frac{\dot{m}_6^2}{\rho_h^2}\left(\frac{1}{A_v^2} - \frac{1}{A_e^2}\right) \tag{6.10}$$

$$H\left(\frac{\dot{m}_6}{\rho_h}\right) = H(Q) \tag{6.11}$$

A szivattyún nincs jelentős hőmérséklet változás, így a sűrűség előtte és utána változatlan: $\rho_{VI} = \rho_V = \rho_h$, a hideg közeg sűrűsége.
Kazán (0. ágelem):

$$p_{VI} = p_I \tag{6.12}$$

A kazánon nincs jelentős nyomásesés.
Csővezeték (1. ágelem):

$$p_I + \rho_I g h_I = p_{II} + \rho_{II} g h_{II} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{\rho_I}{2}\left(\frac{\dot{m}_1}{\rho_1 A_1}\right)^2 \tag{6.13}$$

ahol $\rho_I = \rho_{II} = \rho_m$, a meleg közeg sűrűsége. Azaz élünk azzal a közelítéssel, hogy a (jó hőszigeteléssel rendelkező) csővezetékek hossza mentén nem változik a közeg hőmérséklete.

Hőcserélő (2. ágelem):

$$p_{II} - p_{III} = \zeta_2 \frac{\rho_2}{2} \left(\frac{\dot{m}_2}{\rho_2 A_{ref,2}} \right)^2 \tag{6.14}$$

A csővezetékeken, illetve a hőcserélő ágakon nem kell $v|v|$ taggal számolnunk, mert nem folyik az ágon visszafelé a közeg. A_{ref} referencia keresztmetszet megválasztható, célszerűen lehet a csatlakozó csővezeték keresztmetszete.

A **3. és 4. ágelem is hőcserélő**, ágegyenletük hasonló formában:

$$p_{III} - p_{IV} = \zeta_3 \frac{\rho_3}{2} \left(\frac{\dot{m}_3}{\rho_3 A_{ref,3}} \right)^2 \tag{6.15}$$

$$p_{III} - p_{IV} = \zeta_4 \frac{\rho_4}{2} \left(\frac{\dot{m}_4}{\rho_4 A_{ref,4}} \right)^2 \tag{6.16}$$

Csővezeték (5. ágelem):

$$p_{IV} + \rho_{IV} g h_{VI} = p_V + \rho_V g h_V + \lambda_5 \frac{L_5}{D_5} \frac{\rho_5}{2} \left(\frac{\dot{m}_5}{\rho_V A_5} \right)^2 \tag{6.17}$$

ahol $\rho_{IV} = \rho_V = \rho_h$, a hideg közeg sűrűsége.

Kalorikus ágegyenletek.

A kalorikus ágegyenletek a szivattyú, és a cső ágelemek esetében egyszerűen a hőmérséklet állandó értékét fejezik ki (ezeket nem részletezzük), hőteljesítmény bevitel ill. elvétel a kazánon és hőcserélőkön van.

Kazán (0. ágelem):

$$P_{kazan} = c \dot{m}_0 (T_I - T_{VI}) \tag{6.18}$$

ahol $T_I = T_m$ a meleg közeg hőmérséklete, $T_{VI} = T_h$ a hideg közeg hőmérséklete. Kazán esetében a bal oldali hőteljesítmény adott.

Hőcserélő (2., 3. és 4. ágelem):

$$P_2 = c \dot{m}_2 (T_{II} - T_{2,ki}) \tag{6.19}$$

$$P_3 = c \dot{m}_3 (T_{III} - T_{3,ki}) \tag{6.20}$$

$$P_4 = c \dot{m}_4 (T_{III} - T_{4,ki}) \tag{6.21}$$

ahol a $T_{2,ki}$, $T_{3,ki}$ és $T_{4,ki}$ a hőcserélők utáni hőmérsékletek, utóbbi kettő a keveredési egyenletben is megjelent. Hőcserélők esetében lehet a P hőteljesítmény, vagy a ΔT hőfoklépcső adott.

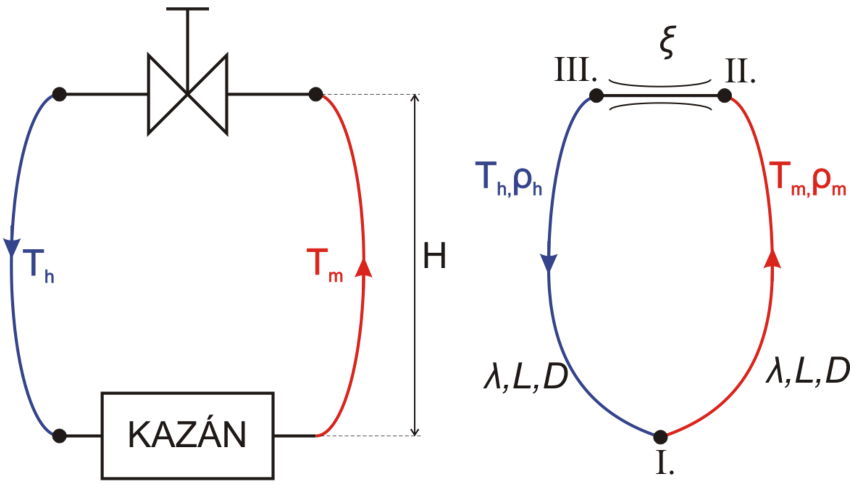
Az így összeállt egyenletrendszerhez szükséges két kezdeti feltétel megadása még a megoldáshoz, ez lehet pl. a szivattyú előtti nyomás p_V és hőmérséklet $T_V = T_h$.

A numerikus megoldáshoz a Newton-Raphson módszert használhatjuk.

Ugyanígy modellezhető egy városi távfűtőhálózat, pl: 6.1. ábrán bemutatott hálózat is.

6.2.2. 2. példa: Természetes áramlás

Abban az esetben, ha az áramlást nem külső erő hozza létre, hanem az áramló közegben lokálisan eltérő állapotjellemzők miatt létrejövő nyomásgradiens hajtja, szabad vagy természetes konvektív áramlásról beszélünk. Legyen a következő „kazán-előremenő csővezeték-hőcserélő-visszatérő csővezeték" rendszerünk. Lehet ilyen egy egyszerű épület (családi ház) fűtési rendszere, ahol a keringető szivattyút nem járatva, azt egy megkerülő vezetékkel elkerülve működtetjük a FR-t. A hálózatot leegyszerűsítve egy 3 csomópontból és három ágelemből álló zárt rendszert kapunk. A rendszerben nincs elvétel, így a tömegáram állandó. A kalorikus egyenleteket nem írjuk fel, a hőteljesítményt úgy vesszük figyelembe, hogy az előremenő és visszatérő vezeték hőmérséklete, és ennek folytán a közeg sűrűsége eltérő. (Az egyszerűség kedvéért a két cső ágelem hidraulikai tulajdonságai (hossz, átmérő és csősúrlódási tényező) megegyeznek.)
Írjuk fel a három ágra a Bernoulli-egyenletet. A hőcserélőt egyszerű fojtásként model-



6.5. ábra. 2. példahálózat: természetes áramlás vázlata (bal) és modellje (jobb oldalt).

lezzük. A magasság „0" szintjét válasszuk a kazán szintjére, a hőcserélő ennél H-val magasabban van. A három ág egyenlete sorban:

$$p_I = p_{II} + \rho_m g H + \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho_m}{2}\left(\frac{\dot{m}}{\rho_m A}\right)^2 \tag{6.22}$$

$$p_{II} = p_{III} + \xi \dot{m}^2 \tag{6.23}$$

$$p_{III} + \rho_h g H = p_I + \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho_h}{2}\left(\frac{\dot{m}}{\rho_h A}\right)^2 \tag{6.24}$$

ahol $\xi[Pa \cdot s/kg]$ legyen ún. „fojtási tényező", ami nem azonos a fojtás veszteségtényezőjével (dimenziója sem).
A 6.24. egyenletből fejezzük ki p_I-et, majd az egyenletben szereplő p_{III} helyére írjuk be a 6.23. egyenletből kifejezett formáját.

$$p_{III} + \rho_h g H - \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho_h}{2}\left(\frac{\dot{m}}{\rho_h A}\right)^2 = p_I \tag{6.25}$$

$$p_{II} - \xi \dot{m}^2 + \rho_h g H - \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho_h}{2}\left(\frac{\dot{m}}{\rho_h A}\right)^2 = p_I \tag{6.26}$$

Tegyük egyenlővé az így kapott 6.26 és az 6.22. egyenletben adott formáját p_1-nek.

$$p_{II} + \rho_m g H + \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho_m}{2} \left(\frac{\dot{m}}{\rho_m A} \right)^2 = p_{II} - \xi \dot{m}^2 + \rho_h g H - \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho_h}{2} \left(\frac{\dot{m}}{\rho_h A} \right)^2 \tag{6.27}$$

Rendezzük az egyenletet. Legyen $\lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2A^2} = \zeta_{cso}$, a kizárólag a csővezetékre jellemző „veszteségi tényező”.

$$(\rho_h - \rho_m) g H = \dot{m}^2 \left(\xi + \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2A^2} \frac{1}{\rho_h} + \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2A^2} \frac{1}{\rho_m} \right) \tag{6.28}$$

$$(\rho_h - \rho_m) g H = \dot{m}^2 \left(\xi + \frac{\zeta_{cso}}{\rho_h} + \frac{\zeta_{cso}}{\rho_m} \right) \tag{6.29}$$

Amennyiben ismert a közeg anyaga, a meleg és hideg hőmérsékletek, az anyagtörvény használatával kiszámolható a meleg és hideg közeg sűrűsége. Az ebből számolható hajtóerő (6.29 egyenlet bal oldala) tart egyensúlyt az áramlási veszteséggel (6.29 egyenlet jobb oldala). Vagyis **a hőmérsékletkülönbség természetes úton hajtja az áramlást**.

6.3. Mintakérdések a fűtőrendszerekhez

M6.1. Ismertesse a fűtőrendszerek leírásához használandó egyenleteket! Fogalmazza meg a hidraulikai rendszerektől való eltéréseket és azok okát!
M6.2. Ismertesse a kalorikus ágegyenletet és a kalorikus csomóponti egyenletet! Magyarázza a tagok jelentését!
M6.3. Adott egy egyetlen körből álló fűtési hálózat (keringető szivattyú, kazán, előremenő és visszatérő csővezeték, hőcserélő fojtással). A geodetikus magasságkülönbség elhanyagolható. Adja meg a megoldandó egyenleteket, ha a kazán leadott hőteljesítményét és a hőcserélő hőfoklépcsője ismert!
M6.4. Egy $L = 20$ m hosszú, $D = 20$ mm, 0,02-es súrlódási tényezőjű függőleges csővezetéken meleg víz áramlik felfelé, mely lehűlve ugyanilyen csővezetéken áramlik lefelé egy zárt csővezetékrendszeren keresztül. A hideg víz sűrűsége 1000 kg/m^3, a meleg vízé 980 kg/m^3. A fojtási tényezőt tekintse zérusnak. Számítsa ki a természetes konvektív áralmás hatására létrejövő tömegáramot (levezetés szükséges)! Mekkora a leadott hőteljesítmény? A hőfoklépcső 30C. (*Megoldás:* $\dot{m}$=0,1385 kg/s, $P_{le} = 34{,}835\ kW$)

7. fejezet

Tranziens jelenségek

Az eddig részletezett jelenségeket (nyomott üzemű hálózati modellezés, nyíltfelszínű áramlások, összenyomható közegek leírása és a fűtőrendszerek modellezése) időben állandó, stacionárius állapotban vizsgáltuk. Ez a fejezet egy rövid betekintést nyújt abba, hogy miért kell foglalkozni a kezdeti jelenségekkel és a tranziens üzemállapotokkal is. Ilyen például egy szivattyú indítása / leállítása, vagy egy tolózár hirtelen zárása HR-ben. Ezen jelenségek történhetnek szándékosan (üzemeltetés miatt) vagy egy nem várt esemény (áramszünet, üzemzavar) okán is. A témával számos szakirodalmi forrás foglalkozik, néhány példaként említjük az alábbiakat [9, 1].

7.1. Allievi-elmélet

Telt szelvényű csővezetékben áramló összenyomhatatlannak tekintett közeg esetén, a főidő alatt bekövetkező Δc sebességváltozásra

$$\Delta p = \rho a \Delta c \tag{7.1}$$

nyomásváltozás jön létre, ld. pl. [1]. Ezt a nyomásnövekedést Allievi-féle nyomáslökésnek is hívják. Egy csővezeték főidején a

$$T_f = \frac{2L}{a} \tag{7.2}$$

mennyiséget értjük, ahol L a csővezeték hossza. Ez megmutatja, hogy az „információ”, ami nyomáshullám formájában terjed a csőben, mennyi idő alatt ér a cső végéhez, és vissza. Az a hullámterjedési sebességet pedig a

$$a = \sqrt{\frac{E_{red}}{\rho}} \tag{7.3}$$

formulával számolhatjuk. ρ az áramló közeg sűrűsége, E_{red} pedig a redukált rugalmassági modulus az alábbi alakban

$$\frac{1}{E_{red}} = \frac{1}{E_{foly}} + \frac{1}{\frac{\delta}{D} E_{cső}}, \tag{7.4}$$

ahol δ a csővezeték falvastagsága, D a belső átmérője és $E_{cső}$ a csőfal, E_{foly} pedig a folyadék rugalmassági modulusa [1, 9]

7.1.1. Példák a hullámterjedési sebességre

- csak víz: $E_{foly} = 2{,}2$ GPa, $\rho = \rho_{víz} = 1000\ kg/m^3 \rightarrow a \cong 1483$ m/s
- víz + acélcső: $E_{acél} = 210$ GPa, $\delta = 7$ mm, $D = 200$ mm (PN 16 bar) $\rightarrow a \cong 1266$ m/s
- víz + PE cső: $E_{PE} = 0{,}8$ GPa, $\delta = 22$ mm, $D = 200$ mm (PN 16 bar) $\rightarrow a \cong 290$ m/s

Ezek alapján látható, hogy ha egy csővezetékrendszerben egy hosszú acélcsövet PE csőre cserélünk, akkor az a tranziens jelenségekre is kihathat, mivel a rendszer főidejét a többszörösére növeli.

7.1.2. Védekezés

A fent részletezett okok miatt kialakuló nyomáscsúcsok, „nyomáslökések" (amelyek értéke akár többszöröse is lehet a rendszerben uralkodó alapnyomásnak) végigfutnak a rendszeren és mechanikai károsodáshoz, csőtöréshez vezethetnek. Illetve, ha a hirtelen zárást követő depresszióhullámot tekintjük, akkor a csővezetékben negatív túlnyomás léphet fel, és „beszippanthatja" a nem erre méretezett csőkötések tömítéseit, vagy akár összeroppanthaja a vékonyfalú csővezetéket is. Ezen jelenségek okozta problémák védelmére az alábbi lehetőségekkel élhetünk.

- Lassú, fokozatos szivattyúindítás és leállítás frekvenciaváltó segítségével;
- légüst: a nagy nyomáscsúcsok „elnyelésére";
- légbeszívó (légtelenítő) szelep: a légköri nyomás alá esés elkerülésére;
- csővezeték átmérőjének növelése (a kisebb sebesség változás kisebb nyomáscsúcsot eredményez);
- csővezeték hosszának „csökkentése" (két cső közé nyíltfelszínű szakasz, ami kettévágja a rendszert).

7.2. Példafeladat

8 km hosszú, vízszintes, NA 200 távvezeték nyíltfelszínű medence fölé szállít 3600 l/min vizet. A csősúrlódási tényező 0,018. Mekkora nyomást kell létrehozni a szivattyúval a cső elején a stacionárius üzem fenntartásához? Időben lineáris sebességcsökkenést feltételezve a főidő hányszorosa alatt szabad elzárni a szivattyú nyomócsonkjához kapcsolódó tolózárat ahhoz, hogy a nyomás ott ne csökkenjen a légköri nyomás alá? A nyomáshullám 1200 m/s sebességgel terjed. Mekkora a főidő? Acél vagy PE csővezetékkel szállítunk?

$L = 8\,\text{km} = 8000\,\text{m}$
$D = 0{,}2$ m
$\lambda = 0{,}018$
$Q = 3600$ l/s $= 0{,}06\ m^3/s$
$\rho = 1000\ kg/m^3$
$a = 1200$ m/s

a, stacionárius üzem

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{D^2\pi} = 1{,}91\frac{m}{s} \quad \text{az áramló közeg átlagsebessége}$$

$$\Delta p = \Delta p' = \lambda\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}v^2 = 13{,}13bar \quad \text{a túlnyomás a csővezeték elején}$$

b, tranziens jelenségek

$$T_f = \frac{2L}{a} = 13{,}33s \quad \text{a főidő}$$

$$\Delta p = \rho a \Delta c \quad \text{a főidő alatt bekövetkező nyomásváltozás}$$

$$\Delta c_f = \frac{\Delta p}{\rho a} = 1{,}094\frac{m}{s},$$

ami kisebb, mint a csőbéli sebesség, így a főidőnél hosszabb idő alatt szabad elzárni. A zárási idő pedig (háromszög hasonlóság alapján)

$$T_z = T_f\frac{v}{\Delta c_f} = 23{,}27s,$$

ami a főidő 1,74-szerese. Ha ennél gyorsabban zárom el, a csővezeték összeroppanhat / kilapulhat; a tömítések tönkre mehetnek. A hullámterjedési sebesség alapján a csővezeték anyaga acél.
További jellemzők, következtetések:

- A fentiek szerint tehát ha „gyorsan”, a főidőn belül sebességváltozás következik be, az csak úgy lehetséges, ha nyomásnövekedés van.
- Ha pl. egy szivattyú csővezetékében átlagosan 0,5 m/s sebességgel vizet szállít, egy áramszünet miatti hirtelen kiesés esetén $\Delta p = \rho a \Delta c \approx 6bar$ nagyságú nyomáshullám indul meg a csőben, mely nyomáslengést okoz.
- A cső végére beérkező hullám zárt vég esetén azonos jelleggel verődik vissza (nyomáshullám nyomáshullámként), míg nyitott csővégről ellentétes jellegű (a nyomáshullám szíváshullámként indul vissza.)
- Ha a zárás hosszabb ideig tart (szabályozottan zárunk tolózárat, szelepet), a nyomáshullámok már visszaverődnek a cső végéről, és csökkentik a nyomást, vagyis a nyomáshullám amplitúdója közel sem lesz akkora.

Irodalomjegyzék

[1] T. Lajos, Az áramlástan alapjai. Műegyetem kiadó, 2008. ISBN 978 963 06 6382 3.

[2] „What is an ac driver?." http://drives.danfoss.hu/danfoss-drives/what-is-an-ac-drive/#//. Accessed: 2018-07-05.

[3] „A brief history of water distribution technology." https://pierderideapa.wordpress.com/2015/07/26/a-brief-history-of-water-distribution-technology/. Accessed: 2018-07-04.

[4] R. G. P.R. Bhave, Analysis of Water Distribution Networks. Alpha Science International Ltd., 2006. ISBN 1-84265-359-8.

[5] „Pipes-wood." http://www.sewerhistory.org/photosgraphics/pipes-wood/. Accessed: 2018-07-04.

[6] „What is the Reynolds-number?." https://www.simscale.com/docs/content/simwiki/numerics/what-is-the-reynolds-number.html.

[7] „Mcllroy network analyzer." https://dl.tufts.edu/catalog/tufts:UA136.002.DO.00140.

[8] H. Mala-Jetmarova, A. Barton, and A. Bagirov, „A history of water distribution systems and their optimisation," Water Supply, vol. 15, pp. 224–235, 11 2014.

[9] G. Halász, G. Kristóf, and L. Kullmann, Áramlás csőhálózatokban. Műegyetem kiadó, 2002. ISBN 963 420 7081.

[10] „Epanet." https://www.epa.gov/water-research/epanet.

[11] L. Mays, Water Distribution Systems Handbook. McGraw-Hill and American Water Works Association, 2008.

[12] G. Halász and P. Haraszti, Csőhálózatok hidraulikája előadásjegyzet. www.hds.bme.hu, 2018.

[13] O. Fűzy, Áramlástechnikai gépek és rendszerek. Tankönyvkiadó Budapest, 1991.

[14] B. Tolnai, Vízellátás Máttyus Sándor nyomán. Fővárosi Vízművek Budapest, 2003.

[15] L. Kullmann, Áramlástechnikai gépek. Akadémiai Kiadó, 2018.

[16] I. Idelchik, Handbook of hydraulic resistance, 3rd Edition. Begell House Inc.,New York, NY, 2003.

[17] H. Chanson, The Hydraulics of Open Channel Flow: An introduction. Elsevier, 2009.

[18] M. K. J. Bogárdi, Hidraulika II. Tankönyvkiadó Budapest, 1979.

[19] G. s. F. P. Agroszkin, I.I. és Dmitrijev, Hidraulika. Tankönyvkiadó Budapest, 1952.

[20] O. Starosolszky, Vízépítési hidraulika. Műszaki Konyvkiadó, 1970.

[21] E. Bobok, Áramlástan. Digitális Tankönyvtár, 2014.

[22] T. Környey, Termodinamika. Műegyetem kiadó, 2005.

[23] M. Zucrow and J. Hoffman, Gas Dynamics Volume I. 1 edition. John Wiley & Sons, 1976. ISBN-10: 047198440X.

[24] W. C. P.H. Oosthuizen, Introduction to Compressible Fluid Flow. CRC Press Taylor & Francis Group, 2014. ISBN-13:978-1-4398-7791-3 (Hardback).

[25] A. Shapiro, The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow Volume 1 and 2. The Ronald Press Company, New York, 1953.

[26] R. Zucker and O. Biblarz, Fundamentals of gas dynamics 2nd edition. John Wiley & Sons, 2007.

[27] BME-HDR, A Debreceni távhőrendszer vizsgálata téli üzemben. BME Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék, Kutatás-fejlesztési jelentés (1081.), 2007.

[28] L. Garbai, Távhőellátás. TYPOTeX eKIADÓ, 2012.

[29] F. Tompa, G. Halász, F. Hegedűs, G. Bárdossy, and Z. Pandula, „Computation of a district-heating network," Proceedings of Sixth Conference on Mechanical Engineering G-2008-E-09, pp. 769–773. Budapest, Hungary.

Ábrák jegyzéke