A hullámsebesség számítása különféle esetekben

Hullám, fázissebesség, csoportsebesség

Egy H_0 amplitúdójú, haladó hullám leírható a

$$H(x,t) = H_0 \cos(kx - \omega t)$$

függvénnyel. Itt k jelöli a hullámszámot, ω a körfrekvenciát. Ezek kifejezhetők a λ hullámhosszal és a ν frekvenciával: $k = \frac{2\pi}{\lambda}; \omega = 2\pi \cdot \nu$. A fenti képlet kétszeri deriválásával látható, hogy valóban $H(x,t)$ kielégíti a $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$ hullámegyenletet. Az $\frac{\omega}{k} = a_p$ hányadost fázis(*phase*) sebességnek hívjuk, ezzel a sebességgel mozog a $H(x,t)$ hullám. Nyilván $a_p = \nu\lambda$ is teljesül.

Ha az ω körfrekvencia nem állandó, hanem a k hullámszám $\omega(k)$ függvénye, akkor a több elemi hullám szuperpozíciójaként kialakuló hullámcsomag sebessége eltér az egyes komponensek fázissebességétől.

A hullámcsomag sebességét csoport(*group*) sebességnek hívjuk és a_g-vel jelöljük.

$$a_g = \frac{d\omega(k)}{dk}.$$

Valóban, két enyhén perturbált hullám összege,

$$\cos\left((k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t\right) + \cos\left((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t\right) = 2\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)\cos(kx - \omega t),$$

aminek amplitúdója már nem állandó, hanem maga is harmonikus függvény. Az amplitúdó fázissebessége $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$, ennek határértéke $\frac{d\omega}{dk}$, éppen ezt hívjuk csoportsebességnek.

Hullámsebesség csőben áramló folyadékban

Változó keresztmetszetű csőben áramló enyhén összenyomható folyadék 1D mozgásegyenlete

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A v)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + v\frac{\partial(\rho A)}{\partial x} + \rho A\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ha a (ρA) szorzat csak a nyomás, mint állapotjellemző függvénye, akkor az első két tagban a derivált átalakítható:

$$\frac{d(\rho A)}{dp}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \rho A\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d(\rho A)}{dp} = A\frac{d\rho}{dp} + \rho\frac{dA}{dp} = A\frac{\rho}{E_f} + \rho\frac{dA}{dp}.$$

Vékonyfalú, kör keresztmetszetű cső nyomásváltozás hatására létrejövő keresztmetszet változását írjuk fel! A jól ismert kazánformulából, $D \cdot dp = 2\delta \cdot d\sigma$ és a Hook törvényből $d\sigma = \frac{dK}{K}E_{cső}$ induljunk ki. Itt a cső falvastagsága δ, belső átmérője D, a fali húzófeszültség σ, a cső kerülete K és a csőfal rugalmassági modulusza $E_{cső}$. A cső keresztmetszete $A = \frac{D^2\pi}{4} = \frac{D^2\pi^2}{4\pi} = \frac{K^2}{4\pi}$. Ezekből $\frac{dA}{dK} = \frac{2K}{4\pi} = \frac{2D\pi}{4\pi}\cdot\frac{D}{D} = \frac{2A}{K}$, innen rendezés után

$\frac{dK}{K} = \frac{1}{2}\frac{dA}{A}$. Helyettesítsük ezt be a Hook törvénybe: $d\sigma = \frac{dA}{A}\frac{E_{cső}}{2}$, így $D \cdot dp = \delta \cdot 2\, d\sigma = \delta \cdot \frac{dA}{A} E_{cső}$. Azt kaptuk, hogy $\frac{dA}{dp} = A\frac{D}{\delta \cdot E_{cső}}$. Ezzel végül a kontinuitási egyenlet alakja

$\left(A\frac{\rho}{E_f} + \rho A\frac{D}{\delta E_{cső}} \right)\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho A\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Az A keresztmetszettel egyszerűsíthetünk és bevezetjük az E_r redukált rugalmassági moduluszt:

$$\rho\left(\frac{1}{E_f} + \frac{D}{\delta E_{cső}} \right)\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\rho}{E_r}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0 .$$

A hullámsebesség a legegyszerűbb esetben, **vékonyfalú, kör keresztmetszetű cső esetén**

$$a = \sqrt{\frac{E_r}{\rho}}, \qquad \frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_f} + \frac{D}{\delta E_{cső}}, \tag{1}$$

ha a csőben kis mértékben összenyomható folyadék áramlik.

Ehhez az alapegyenlethez képest eltérést okozhat a **cső hosszirányú koncentrált megfogása**, vagy folytonos beágyazása pl. talajba. A μ Poisson-szám a tengelyirányú és a kerületi irányú megnyúlások hányadosa, értéke 0< μ <0,5. A cső megfogásának hatását egy n tényezővel vehetjük figyelembe. A Poisson tényező értéke acélra és üvegszál erősítésű polimerre 0,27 – 0,30 öntöttvasra 0,21 – 0,28, betoncsőre 0,20, azbesztcement csőre 0,30.

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_f} + n\frac{D}{\delta E_{cső}}, \tag{2}$$

- tengelyirányban egyik végén megfogott vékonyfalú cső esetén $n_{vékony} = 1-\mu/2$,
- tengely irányban végig megfogott csőnél $n_{vékony} = 1-\mu^2$,
- szabad csővégeknél természetesen $n_{vékony} = 1$.

Az átmérőhöz képesti **vastag csőfal esetén** az n tényező értékét az imént megadott $n_{vékony}$ értékéből számíthatjuk ki:

$$n = \frac{2\delta}{D}(1+\mu) + \frac{D}{D+\delta} n_{vékony}. \tag{3}$$

Ha a (3) képlet második tagjában δ-val végtelenhez tartunk és az így kapott $n = \frac{2\delta}{D}(1+\mu)$ határértéket behelyettesítjük a (2) összefüggésbe, akkor adódik, hogy

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_f} + \frac{2\delta}{D}(1+\mu)\frac{D}{\delta E_{cső}} = \frac{1}{E_f} + \frac{2(1+\mu)}{E_{cső}}, \tag{3'}$$

ez a sziklába fúrt, bélelt csőalagútra érvényes redukált rugalmassági modulusz.

Nyílt felszínű csatorna áramlásban

$\frac{dp}{d\rho}$ helyett $\frac{dy}{dA} = \frac{1}{B}$ volt a megfelelő együttható az anyag-megmaradási egyenlet

$$B\left(\frac{\partial y}{\partial t} + v\frac{\partial y}{\partial x}\right) + A\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

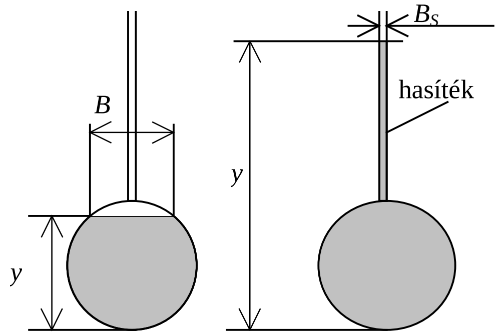
levezetése során. Ezt az egyenletet ρ/A-val szorozva (itt ρ = áll!) és a zárójelbeli tagokat g-vel bővítve

$$\frac{B}{Ag}\left(\frac{\partial(\rho g y)}{\partial t} + v\frac{\partial(\rho g y)}{\partial x}\right) + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

és ez már dimenziójában teljesen azonos a másik két kontinuitási egyenlettel, innen látszik, hogy a felszíni hullám terjedési sebessége

$$\frac{B}{Ag} = \frac{1}{a^2}\text{, azaz } a = \sqrt{\frac{Ag}{B}}. \tag{4}$$

Az (4) összefüggésből teljesen megtelő cső esetén végtelen hullámsebesség adódnék, hiszen a keresztmetszet véges, B pedig zérushoz tart. Szokásos megoldás ilyen esetre, hogy a cső felső alkotója mentén egy keskeny, párhuzamos falú hasítékot helyezünk, melynek B_S szélessége éppen akkora, hogy a telt csőkeresztmetszet (1) képlet szerinti hullámsebessége adódjék.



Hullámsebesség gáz áramlása esetén

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

ahol ideális gáz feltételezésével $\frac{dp}{d\rho} = \kappa RT$, így

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}, \tag{5}$$

ami valóban a hanghullám jól ismert izentropikus terjedési sebessége.

Mivel $\frac{E}{\rho} = a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa\frac{p}{\rho}$, nyilván gázok esetén $E_{gáz} = \kappa p$.

Hullám-, illetve csoportsebesség rugalmas falú négyszög keresztmetszetű csatornában

A légtechnikában gyakran használnak **téglalap keresztmetszetű, lemezből hajlított csatornák**at, 1-2 m-es csatorna darabokat építenek össze. Állóhullámokkal végzett kísérleti eredmények igazolták, hogy ilyen esetben az *a* fázissebesség erősen függ a hullám ω körfrekvenciájától, $a = a(\omega)$. Ez a tény a számítást nagy mértékben megnehezíti és a hullámok diszperziójához vezet. A hullámsebesség ilyen esetben:

$$a(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1+\rho c^2 \cdot f(\omega)}}\,, \tag{6}$$

c az izentropikus hangsebesség levegőben és a csatorna méreteitől, anyagától és az ω körfrekvenciától függő $f(\omega)$ függvény *L* oldalhosszúságú, négyzet keresztmetszetű, δ vastagságú lemezből készített csatorna esetén:

$$f(\omega) = \frac{2L^3}{E_{fal}\delta^3\Omega^5}\left(\frac{2}{\operatorname{ctg}\Omega + \operatorname{cth}\Omega} - \Omega\right), \text{ és } \qquad \Omega = \sqrt[4]{\frac{3\rho L^4\omega^2}{4E_{fal}\delta^2}}\,.$$

Az $f(\omega)$ függvénynek bizonyos frekvenciákon szakadása (függőleges aszimptotája) van, ezt a mérések is igazolták.

Jelentősen változik a hangsebesség a **folyadékból kiváló gáz** hatására is. Gázos folyadékban a hullámsebesség néhányszor *10 m/s*-ra is lecsökkenhet annak ellenére, hogy tiszta gázban – például normál állapotú levegőben – a hullámsebesség *340 m/s*. A gáz-folyadék elegy ρ_g sűrűségű kivált gáz és ρ_f sűrűségű folyadék $\alpha = \frac{V_g}{V}$ térfogati gázkoncentrációjú elegye (nyilván $1-\alpha = \frac{V_f}{V}$). Az elegy tömege $\rho_g V_g + \rho_f V_f = \rho V$. Ezt *V*-vel végigosztva és bevezetve az α jelölést: $\rho = \alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_f$ az elegy átlagos sűrűsége. Ilyen esetben az átlagos sűrűségből és az eredő rugalmassági modulusztól kell a hullámsebességet kiszámítani, utóbbi ebben az esetben a gáz kompresszibilitásától is függ. Az elaszticitási modulusz definíciója miatt $dV_g = -\frac{V_g}{E_g}dp$, illetve $dV_f = -\frac{V_f}{E_f}dp$. A *V* térfogat teljes megváltozása tehát

$$dV = dV_g + dV_f = -\left(\frac{\alpha V}{E_g} + \frac{(1-\alpha)V}{E_f}\right)dp = -\left(\frac{\alpha}{E_g} + \frac{(1-\alpha)}{E_f}\right)Vdp$$

és innen az elegy E_e modulusza $E_e = -V\frac{dp}{dV} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{E_g} + \frac{(1-\alpha)}{E_f}\right)}$.

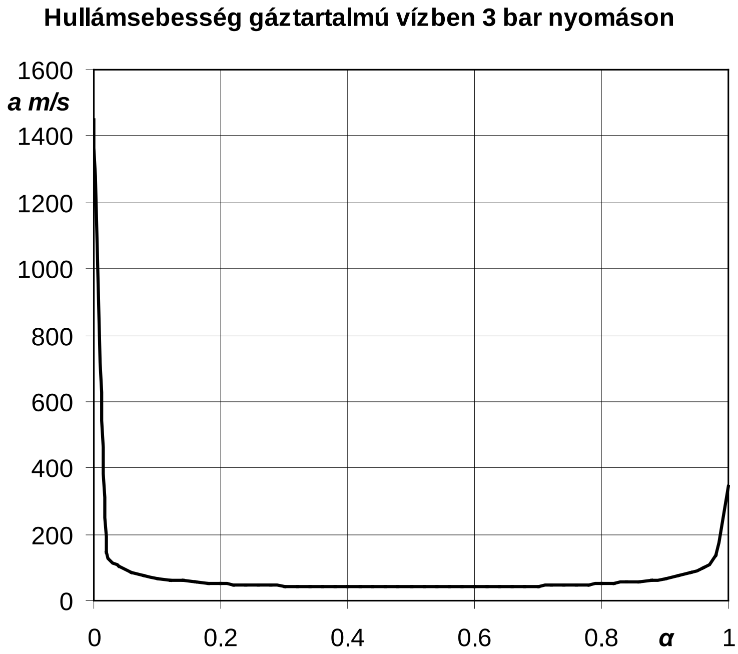
Végül a hullámsebesség négyzete (figyelembe véve, hogy a cső tágulása elhanyagolható a gáz összenyomhatósága mellett):

$$\frac{E_e}{\rho} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{E_g} + \frac{(1-\alpha)}{E_f}\right)\cdot\left(\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_f\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\kappa p} + \frac{(1-\alpha)}{E_f}\right)\cdot\left(\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_f\right)}\,, \tag{7}$$

mert a gáz kompresszibilitási tényezője az izentropikus hangsebesség négyzetének és a sűrűségnek a szorzata, $E_g = \kappa p$.

A gáz-folyadék elegyben a hullámsebesség tovább egyszerűsíthető, mert a nevező első tényezőjében a gázra vonatkozó tag, a második tényezőben pedig a folyadékra vonatkozó tag dominál. Így végül:

$$a = \sqrt{\frac{E_e}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\kappa p}{\alpha(1-\alpha)\rho_f}}\ . \tag{8}$$



Példa a relatív gáztartalom hullámsebességet jelentősen változtató hatására

A (8) közelítő képlet deriválásával belátható, hogy a minimuma α = 0,5-nél van.