Egydimenziós instacionárius gázáramlás, nyíltfelszínű csatornabeli folyadékáramlás

Kontinuitási egyenlet egy A ellenőrzőfelülettel határolt V térfogatra:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \oint_A \rho \underline{v}\, d\underline{A} = 0 . \tag{1}$$

Mozgásegyenlet (impulzustétel: az impulzus időbeli változásának és a felületi impulzusáramoknak az összege a felületi nyomó- és súrlódó erők következménye):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \underline{v}\, dV + \oint_A \underline{v}\rho \underline{v}\, d\underline{A} = -\oint_A p\, d\underline{A} + \oint_A \underline{\underline{\tau}}\, d\underline{A} . \tag{2}$$

Energiaegyenlet (a belő- és kinetikus energia összegének időbeli változása + a felületi energiaáramok összege a nyomóerők és hőáramok teljesítményének következménye:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e\, dV + \oint_A e\rho \underline{v}\, d\underline{A} = -\oint_A p\underline{v}\, d\underline{A} + \oint_A \underline{q}\, d\underline{A} . \tag{3}$$

Állapotegyenlet:

$$p = f(\rho, u). \tag{4}$$

Fentiekben $\underline{\underline{\tau}}$ a viszkózus feszültségtenzor, e az egységnyi tömegre vonatkoztatott belső- és mozgási energia összege: $e = u + \frac{v^2}{2}$, $\underline{q}$ a hőáramsűrűség-vektor.

A mozgásegyenlet jobb oldalán található nyomóerő tartalmazza a keresztmetszeti nyomóerőket, valamint a változó keresztmetszetű csatorna faláról átadott nyomóerő tengely irányú vetületét: $F_p = p\frac{dA}{dx}$. A csúsztatófeszültség felületi integrálja szintén tengely irányú erőt eredményez.

Az energiaegyenlet jobboldalán a nyomás munkája csak a keresztmetszet mentén ad zérustól eltérő értéket, ugyanis álló rendszerben szemlélve a cső nyugvó falán nem adódik át munka sem nyomás sem pedig csúsztatófeszültség révén az áramló folyadéknak. Hőforgalom tekintetében a továbbiakban csak a fali hőátadást vesszük figyelembe, a gázon belül történő hőtranszportot elhanyagoljuk.

Alkalmazzuk a fenti egyenleteket egy változó keresztmetszetű cső vagy csatorna rövid, dx hosszúságú szakaszára! Feltételezzük, hogy a cső keresztmetszetében az áramlási sebesség és minden állapotjelző állandónak tekinthető (1D modell) és a sebesség tengelyre merőleges komponensei elhanyagolhatók. Az (1) kontinuitási egyenletet egy $dV = A \cdot dx$ térfogatú, elemi hosszúságú csőszakaszra integrálva kapjuk:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dx + [\rho v A]_x^{x+dx} = 0 .$$

Innen:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = 0 , \tag{5}$$

hasonló meggondolással meghatározhatjuk a mozgásegyenlet és az energiaegyenlet differenciál alakjait is:

$$\frac{\partial(\rho v A)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v^2+p\right)A}{\partial x}=F_p+F_s\,. \tag{6}$$

$$\frac{\partial(\rho e A)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v e+p v)A}{\partial x}=\dot{Q}\,. \tag{7}$$

1. Vizsgáljuk ideális gáz súrlódásmentes 1D áramlását *A = áll* keresztmetszetű csőben

Ekkor

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0\,. \tag{8}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v^2+p\right)}{\partial x}=0\,. \tag{9}$$

Tegyük fel, hogy az áramlás adiabatikus és reverzibilis, azaz ***izentropikus***. Ekkor

$$\frac{p}{\rho^\kappa}=\frac{\rho R T}{\rho^\kappa}=\frac{RT}{\rho^{\kappa-1}}=áll.$$

Az izentropikus hangsebesség négyzete

$a^2=\kappa R T$,ezt felhasználva $\frac{a^2}{\rho^{\kappa-1}}=\kappa\cdot áll$, differenciális alakban $\frac{2ada}{\rho^{\kappa-1}}-(\kappa-1)\frac{a^2}{\rho^\kappa}d\rho=0$, rendezve

$$d\rho=\frac{2}{\kappa-1}\frac{\rho}{a}da\,. \tag{10}$$

Innen $\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{2}{\kappa-1}\frac{\rho}{a}\frac{\partial a}{\partial x}$ és $\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{2}{\kappa-1}\frac{\rho}{a}\frac{\partial a}{\partial t}$. A (8) egyenletbe beírva ezt és $\frac{\rho}{a}$ -val szorozva:

$$\frac{2}{\kappa-1}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{2}{\kappa-1}v\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial x}=0\,, \tag{11}$$

a (9) egyenletben a differenciálást elvégezve és a (8) <u>kontinuitási egyenletet</u> is figyelembe véve $\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\underbrace{v\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}}_{=0}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0$. A sűrűséggel osztva és az állapotegyenletet is figyelembe véve $\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$. Itt $\frac{dp}{d\rho}=a^2$, azaz $\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$. (10)-et is figyelembe véve

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2}{(\kappa-1)}a\frac{\partial a}{\partial x}=0\,. \tag{12}$$

A (12) és (11) egyenlet összegét a deriváltak szerint rendezve

$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2}{\kappa-1}\frac{\partial a}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2}{\kappa-1}v\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{2}{\kappa-1}a\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial x}=0$. Összevonás után

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v+\frac{2}{\kappa-1}a\right)+(v+a)\frac{\partial}{\partial x}\left(v+\frac{2}{\kappa-1}a\right)=0\,. \qquad (13)$$

A (12) és (11) egyenlet különbségéből pedig

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v-\frac{2}{\kappa-1}a\right)+(v-a)\frac{\partial}{\partial x}\left(v-\frac{2}{\kappa-1}a\right)=0\,. \qquad (14)$$

A $\left(v+\frac{2}{\kappa-1}a\right)$ és a $\left(v-\frac{2}{\kappa-1}a\right)$ az úgynevezett Riemann változó, ezek helyettesítik az (5) és (6) egyenlet p, ρ, v primitív változóit. A (13) és (14) egyenlet azt is jelenti, hogy a

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|^{+}=v+a \text{ és a } \left.\frac{dx}{dt}\right|^{-}=v-a\,, \qquad (15)$$

úgynevezett karakterisztikus vonalon a megfelelő Riemann változó állandó, hiszen az idő szerinti teljes deriváltja $\frac{d}{dt}(...)=\frac{\partial}{\partial t}(...)+\frac{\partial}{\partial x}(...)\cdot\frac{dx}{dt}=0$.

2. Vizsgáljuk *ρ = áll* sűrűségű folyadék súrlódásmentes 1D áramlását prizmatikus csatornában

Most az (5) egyenletből

$$\frac{\partial A}{\partial t}+v\frac{\partial A}{\partial x}+A\frac{\partial v}{\partial x}=0\,. \qquad (16)$$

A keresztmetszet alakja legyen téglalap, melynek szélessége B = *áll*, benne a vízmélység *y=y(t,x)*, így $A = By$. Ekkor $B\left(\frac{\partial y}{\partial t}+v\frac{\partial y}{\partial x}\right)+By\frac{\partial v}{\partial x}=0$. $\frac{g}{B}$ -vel szorozva, természetesen *g=áll*,

$\frac{\partial(gy)}{\partial t}+v\frac{\partial(gy)}{\partial x}+gy\frac{\partial v}{\partial x}=0$. Mint ismeretes $a^2=\frac{Ag}{B}=gy$, így $\frac{\partial a^2}{\partial t}+v\frac{\partial a^2}{\partial x}+a^2\frac{\partial v}{\partial x}=0$, innen

$$2\frac{\partial a}{\partial t}+2v\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial x}=0\,. \qquad (17)$$

A (6) mozgásegyenlet súrlódásmentes esetben prizmatikus csatornában $\left(\frac{dA}{dx}=0\right)$ $\frac{\partial(vA)}{\partial t}+\frac{\partial(vA)v}{\partial x}+A\frac{\partial(gy)}{\partial x}=0$. Deriválás után $A\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}+v\frac{\partial(Av)}{\partial x}}_{=0}+A\frac{\partial a^2}{\partial x}=0$. Az aláhúzott tagok a (16) egyenlet miatt zérust adnak, így végül

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+2a\frac{\partial a}{\partial x}=0\,. \qquad (18)$$

(18)+(17): $$\frac{\partial}{\partial t}(v+2a)+(v+a)\frac{\partial}{\partial x}(v+2a)=0\,. \qquad (19)$$

(18)-(17): $$\frac{\partial}{\partial t}(v-2a)+(v-a)\frac{\partial}{\partial x}(v-2a)=0\,. \qquad (20)$$

és a $v\pm 2a=\acute{a}ll$ a

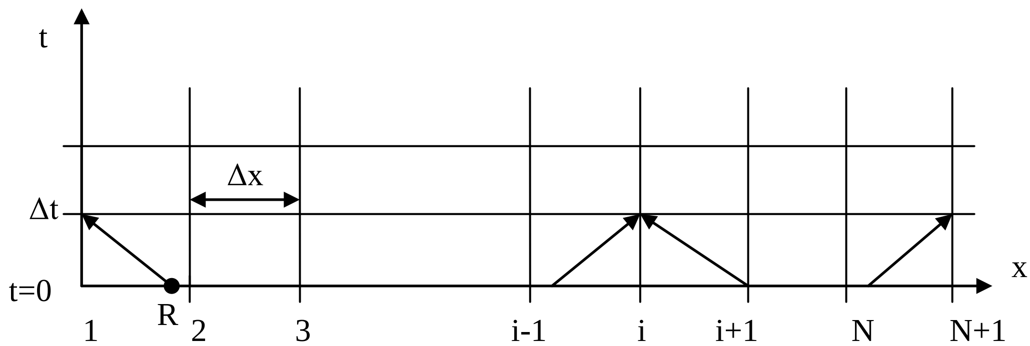
$$C^{\pm} = \left.\frac{dx}{dt}\right|^{\pm} = v \pm a \tag{21}$$

karakterisztikus irányok mentén. A (19)-(21) egyenleteket Saint-Venant egyenleteknek hívják. Látható az analógia a gázáramlás és a csatornabeli folyadékáramlás között. A Riemann változóban a hullámsebesség együtthatója levegő esetén $\frac{2}{\kappa - 1} = \frac{2}{1{,}4 - 1} = 5$. Van olyan csatornaszelvény, melyre a Saint-Venant egyenletekben az a hullámsebesség együtthatója ugyanekkora.

3. Peremfeltételek és kezdeti feltételek

A kezdeti feltétel a primitív változók, p, ρ, v csőhossz menti eloszlása. Ebből az a izotermikus hangsebesség is minden pontban számítható.
A cső L hosszát N szakaszra bontjuk, ezek határát az i = 1, 2, …, N, N+1 index jelöli, amint az ábrán látható. A Δt időlépésre teljesülnie kell, hogy az ne legyen nagyobb, mint amennyi idő alatt a karakterisztika a Δx utat megteszi, azaz

$$\Delta t = \min_i \left(\frac{\Delta x}{v_i \pm a_i} \right) \qquad (i = 1,2,\ldots,N+1) \tag{22}$$



Szubszónikus gázáramlás esetén a belépő peremfeltétel megadása azt jelenti, hogy az ismert R talppontú karakterisztika talppontjában ismerjük a v_R gázsebesség és a_R hullámsebesség interpolált értékét. Az interpolációt az 1 és 2 pontbeli értékekkel végezzük. Az R talppont helye $x = -\Delta t(v-a)\big|_R \approx -\Delta t(v-a)\big|_2$. A (21) képlet szerinti C^- karakterisztikán a Riemann változó értéke állandó:

$$v_R - \frac{2}{\kappa - 1} a_R = v_1 - \frac{2}{\kappa - 1} a_1 \tag{23}$$

Érvényes továbbá az állapotegyenlet, az összentalpia, illetve összhőmérséklet a 0-állapotú külső térben és az 1 perempontban azonos: $T_0 = T_1 + \frac{v_1^2}{2c_p} = T_1 + \frac{v_1^2}{2\frac{\kappa R}{\kappa - 1}}$. Innen

$\kappa R T_0 = \kappa R T_1 + \frac{\kappa - 1}{2} v_1^2$, és a hangsebességeket bevezetve

$$a_0^2 = a_1^2 + \frac{\kappa - 1}{2} v_1^2 \tag{24}$$

A (23) és (24) egyenletből a két ismeretlen, v_1 és a_1 meghatározható.
Szubszónikus áramlás esetén a kilépő peremfeltétel egy C karakterisztikára felírt egyenletből (a Riemann változó állandó e karakterisztikán) és a kilépési veszteség figyelembe vételéből álló egyenletpár megoldásából adódik. Az állapotváltozás izentropikus. Legyen a kilépés most

is a <u>cső elején</u>, ekkor $\left(\frac{p_1}{p_R}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{T_1}{T_R} = \frac{a_1^2}{a_R^2}$. A kilépés helyén a nyomás azonos a külső tér p_0 nyomásával. Innen $\frac{a_1}{a_R} = \left(\frac{p_0}{p_R}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$.

Most tehát azonnal adódik a_1, abból T_1, de ismert p_1=p_0 is, így az ideális gáz állapotegyenletéből számítható ρ_1. A karakterisztikára felírt Riemann egyenletből pedig adódik v_1.

Hogyan dönthető el, hogy belépés vagy kilépés történik a cső elején, az 1 jelű keresztmetszetben? Tegyük fel, hogy $v_1 > 0$, azaz a gáz belép a csőbe. Az 1 ponthoz az aktuális időlépésben két karakterisztika tartozik.

A C^+ karakterisztikán $\alpha \overset{jel}{=} v_1 + \frac{2}{\kappa-1} a_1$ összeg, a C^- karakterisztikán $\beta \overset{jel}{=} v_1 - \frac{2}{\kappa-1} a_1$ összeg a Riamann változó. Ezekből $2v_1 = \alpha + \beta > 0$, azaz $\alpha > -\beta$. A két Riamann változó különbsége pedig $\alpha - \beta = \frac{2}{\kappa-1} 2a_1$. A (24) energiaegyenletből azonban $a_0^2 > a_1^2$, tehát

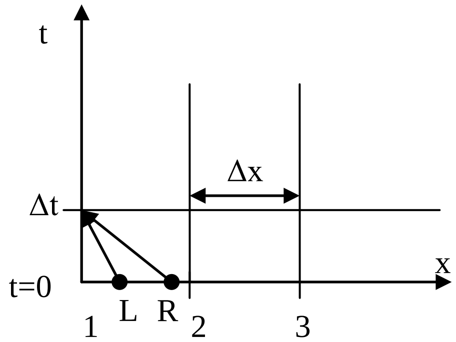
$2a_0 > 2a_1 = \frac{\kappa-1}{2}(\alpha-\beta) > -\frac{\kappa-1}{2} 2\beta$.

Rendezés után végül

$$\frac{2}{\kappa - 1} a_0 > -\beta \tag{25}$$

teljesülése esetén történik belépés a cső elején.

Szuperszónikus kilépő áramlás esetén nem ad hatók meg fizikai peremfeltételek, hiszen a gáz nagyobb sebességgel lép ki, mint amilyen sebességgel az információ befelé terjedhet.



Mivel a balra mutató (kiáramlást tételezünk fel) sebesség nagyobb, mint a helyi hangsebesség, így mind az L pontból induló C^+, mind az R pontból induló C^- karakterisztika meredeksége negatív. A karakterisztikák talppontjában, az L és R pontban ismert a

$v_1 - \frac{2}{\kappa-1} a_1 = v_R - \frac{2}{\kappa-1} a_R$, illetve a $v_1 + \frac{2}{\kappa-1} a_1 = v_L + \frac{2}{\kappa-1} a_L$ érték, azaz

$v_1 = \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{a_L - a_R}{2}$, majd a_1 is számolható.

Szuperszónikus belépés esetén viszont nem fut be karakterisztika a cső elején lévő 1 pontba a cső felől, így csak fizikai peremfeltétel írható elő a cső elején. Előírható tetszőlegesen a belépő gáz $v_1$sebesség, és érvényes az energiaegyenlet (24) alakban.