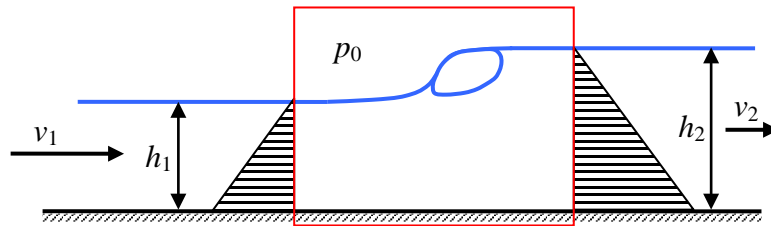


## Vízugrás előtti és utáni vízmélység viszonya, a vízugrás energiavesztése

A vízugrás és az azt körülvevő ellenőrző felület képe az 1. ábrán látható.



1. ábra

Az ellenőrző felületre érvényes a **kontinuitás**, a be és kiáramló tömegáram azonos:

$$\dot{m} = \rho v_1 B h_1 = \rho v_2 B h_2 \quad (1)$$

Innen

$$v_2 = \frac{h_1}{h_2} v_1 = \frac{1}{\chi} v_1, \quad (2)$$

itt a vízugrás utáni és előtti vízmélység viszonyát  $\chi$ -vel jelöltük. A csatorna  $B = \text{áll. szélességű}$ . Az ellenőrző felületre érvényes az **impulzus tétel** is, az impulzus változás oka az ellenőrző felületbe zárt folyadékra ható erők eredője. A **térerőt és a súrlódási erőt elhanyagolhatjuk**, az **áramlás stacionárius**, így csak a vonalkázással jelölt nyomáeloszlásból adódó nyomóerők hatnak. A légköri nyomás túlnyomásban mérve zérus, így a vonalkázással jelölt nyomás eloszlás a vízmélység lineáris függvénye,  $p = \rho g h$ . Ezt kell integrálni 0-tól  $h_1$ -ig, illetve 0-tól  $h_2$ -ig, figyelembe véve, hogy a csatorna szélessége  $B$ . Az impulzus tétel tehát

$$\dot{m} v_1 + \frac{B \rho g h_1 \cdot h_1}{2} = \dot{m} v_2 + \frac{B \rho g h_2 \cdot h_2}{2}. \quad (3)$$

Beírva a tömegáram (1) szerinti értékét

$$\rho v_1 B h_1 v_1 + \frac{B \rho g h_1 \cdot h_1}{2} = \rho v_1 B h_1 v_2 + \frac{B \rho g h_2 \cdot h_2}{2}.$$

Ezt az egyenletet  $\rho g B h_1^2$ -tel osztva és (2)-t is felhasználva

$$\frac{v_1^2}{g h_1} + \frac{1}{2} = \frac{v_1^2}{g h_1} \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2^2}{2 h_1^2}.$$

Írjuk be itt is a  $\chi$  jelölést, vezessük be továbbá a Froude szám négyzetét a vízugrás előtti, 1-es indexű áramlásra:

$$Fr_1^2 = \frac{v_1^2}{g h_1}. \quad (4)$$

Ekkor

$$2 Fr_1^2 + 1 = \frac{2 Fr_1^2}{\chi} + \chi^2.$$

Ezt az egyenletet rendezve  $\chi^2 - 1 + 2Fr_1^2 \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) = 0$ , azaz  $\chi^2 + \chi - 2Fr_1^2 = 0$ , innen

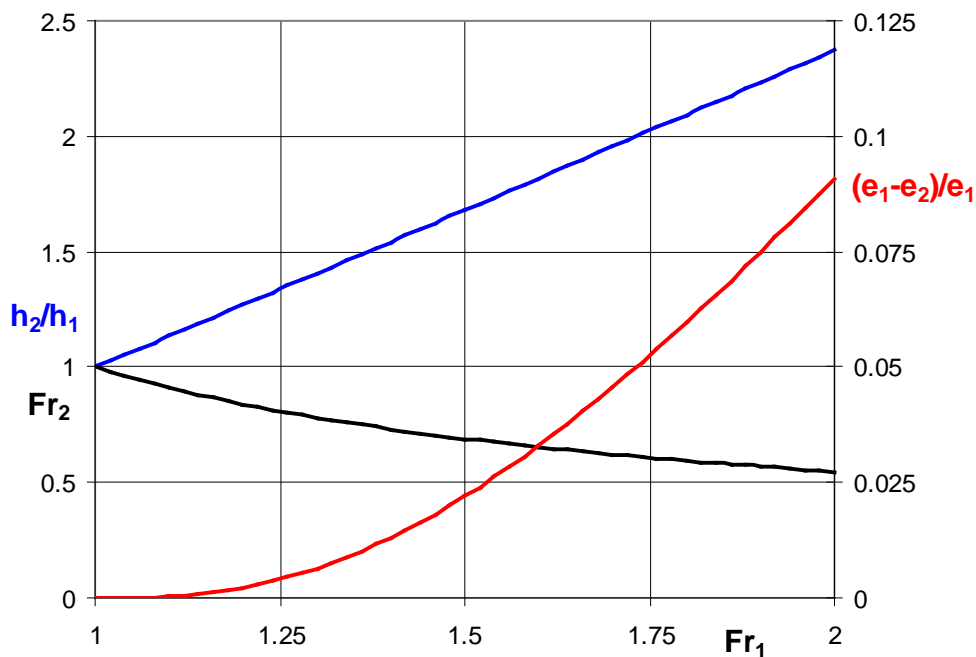
$$\frac{h_2}{h_1} = \chi = \frac{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1}{2} \quad (5)$$

a fizikailag valós gyök. Érdemes kiszámítani, hogy mekkora fajlagos energiaveszteséget okoz a vízugrás – amit a öntözőműveknél energiatorónek is használnak. Jelöljük  $e$ -vel a Bernoulli összeget, ennek csökkenése a vízugrás előtti értékhez viszonyítva:

$$\frac{e_1 - e_2}{e_1} = 1 - \frac{\rho gh_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2}{\rho gh_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2} = 1 - \frac{\frac{h_2}{h_1} + \frac{1}{2gh_1} v_2^2}{1 + \frac{1}{2gh_1} v_1^2} = 1 - \frac{\chi + \frac{Fr_1^2}{2} \frac{1}{\chi^2}}{1 + \frac{Fr_1^2}{2}} \quad (6)$$

Belátható végül, hogy a vízugrás előtti és utáni  $Fr$  számok viszonya a vízmagasságok  $\chi$  viszonyának egyszerű hatványfüggvénye:

$$Fr_2 = \frac{Fr_1}{\chi^{3/2}} \quad (7)$$

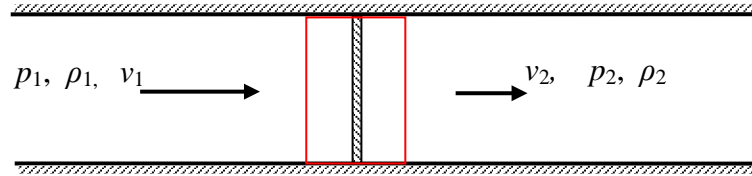


**2. ábra**

Az (5), (6), (7) képlet szerinti függvénygrafikonok a felvíz oldali Froude szám függvényében

## Merőleges lökéshullám előtti és utáni nyomások, sebességek, sűrűségek viszonya. A lökéshullám entrópia növekménye

A *stacionárius* merőleges lökéshullám egy állandó keresztmetszetű csőben van a 3. ábra szerinti helyzetben:



3.ábra

A lökéshullám előtti értékek adottak. A lökéshullám utáni 3 fizikai változót keressük. Ehhez 3 egyenletre van szükség, ezek:

a **kontinuitás**, amely figyelembe véve, hogy a cső  $A$  keresztmetszete állandó:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (8)$$

Az **impulzus tétel**

$$\dot{m}v_1 + Ap_1 = \dot{m}v_2 + Ap_2,$$

de a (8) képlet első egyenlősége miatt

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_1 v_1 v_2 + p_2. \quad (9)$$

Az **energiaegyenlet**, azaz  $ah_\delta = h + \frac{v^2}{2} = c_p T + \frac{v^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT + \frac{v^2}{2}$  az összentalpia állandó,

és **ideális gáznak** tekintve közegünket, melyre  $RT = \frac{p}{\rho}$ :

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} RT_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (10)$$

Osszuk el a (9) egyenletet  $p_1$ -gyel és bővítsük az első és harmadik tagot  $\kappa$ -val, így

$$\frac{\kappa v_1^2}{\kappa p_1} + 1 = \frac{\kappa v_1^2}{\kappa p_1} \frac{v_2}{v_1} + \frac{p_2}{p_1}.$$

Az első és harmadik tag nevezőjében most az izentropikus hangsebesség négyzete áll, a sebességnégyzet és a hangsebesség négyzet viszonya a Mach szám négyzete. A lökéshullám utáni és előtti sebesség hányadosa (8) miatt a megfelelő sűrűségek hányadosának reciproka, így végül – az egyenletet a nyomásviszonyra rendezve:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \kappa M_1^2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (11)$$

Teljesen hasonló gondolatmenettel a (10) egyenletből egy másik egyenletet kapunk a sűrűség és nyomásviszony kapcsolatára:

$$1 - \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 \left( \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 - 1 \right). \quad (12)$$

A (12) egyenletbe behelyettesítve a (11) egyenletet – némi átalakítások után – a sűrűségviszony és az  $M_1$  Mach szám kapcsolatára adódik egy egyenlet, ez a sűrűségviszony egyúttal a sebességviszony reciproka is, így

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\kappa+1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)}. \quad (13)$$

Innen (11)-gyel rögtön adódik a nyomásviszony,

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1). \quad (14)$$

A hőmérsékletviszony a (13) és (14) egyenletből – ha a közeg ideális gáz

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1)\right] \cdot \left[1 - \frac{2}{\kappa+1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)\right]. \quad (15)$$

A lökeshullám utáni Mach szám kifejezhető a lökeshullám előtti Mach számmal:

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_1^2 - 1)}{1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1)}}. \quad (16)$$

A termodinamika első főtételét adiabatikus áramlásra felírva a lökeshullámon keresztüli entrópia változás is meghatározható.

$$Tds = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v dT + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v dT - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Az egyenletet  $T$ -vel osztva és az ideális gázra vonatkozó törvényt felhasználva

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - \frac{p}{T\rho} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{dT}{T} - (c_p - c_v) \frac{d\rho}{\rho}.$$

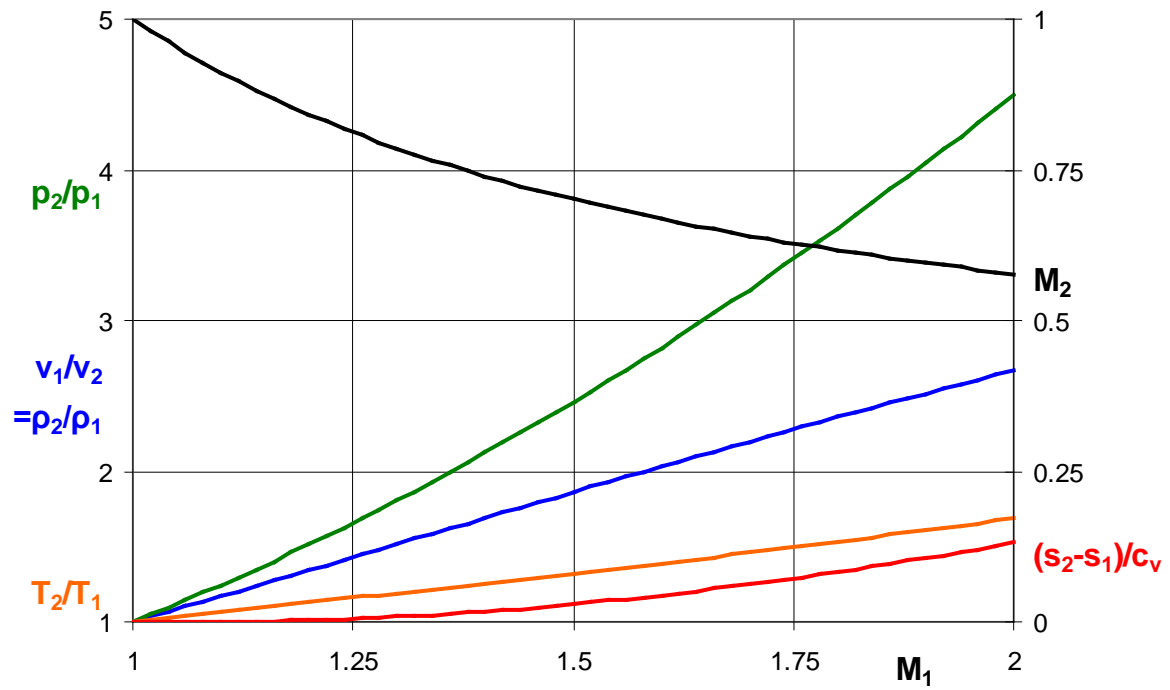
Az egyenletet az állandó térfogaton mért  $c_v$  fajhővel osztva és a fajhőviszonyt behelyettesítve, majd második lépésben az ideális gázra vonatkozó gáztörvényt felhasználva

$$\frac{ds}{c_v} = \left(\frac{dT}{T}\right) - (\kappa - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}\right) - (\kappa - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \kappa \frac{d\rho}{\rho}.$$

Végül ezt az egyenletet az 1 és 2 állapot között integrálva

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left(\frac{p}{\rho^\kappa}\right)\Bigg|_1^2 = \ln\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\kappa\right]. \quad (17)$$

Az alábbi ábrán a bekeretezett függvények grafikonja látható a lökeshullám előtti Mach szám függvényében. Feltűnő a hasonlóság a vízugrásra vonatkozó 2. ábra ugyancsak **kék**, **fekete** és **piros** grafikonjával (természetesen fontos, hogy a megfelelő ordinátatengely léptékét vegyük figyelembe).



**4. ábra**

A (13), (14), (15), (16), (17) képlet szerinti függvénygrafikonok a lökéshullám előtti Mach szám függvényében