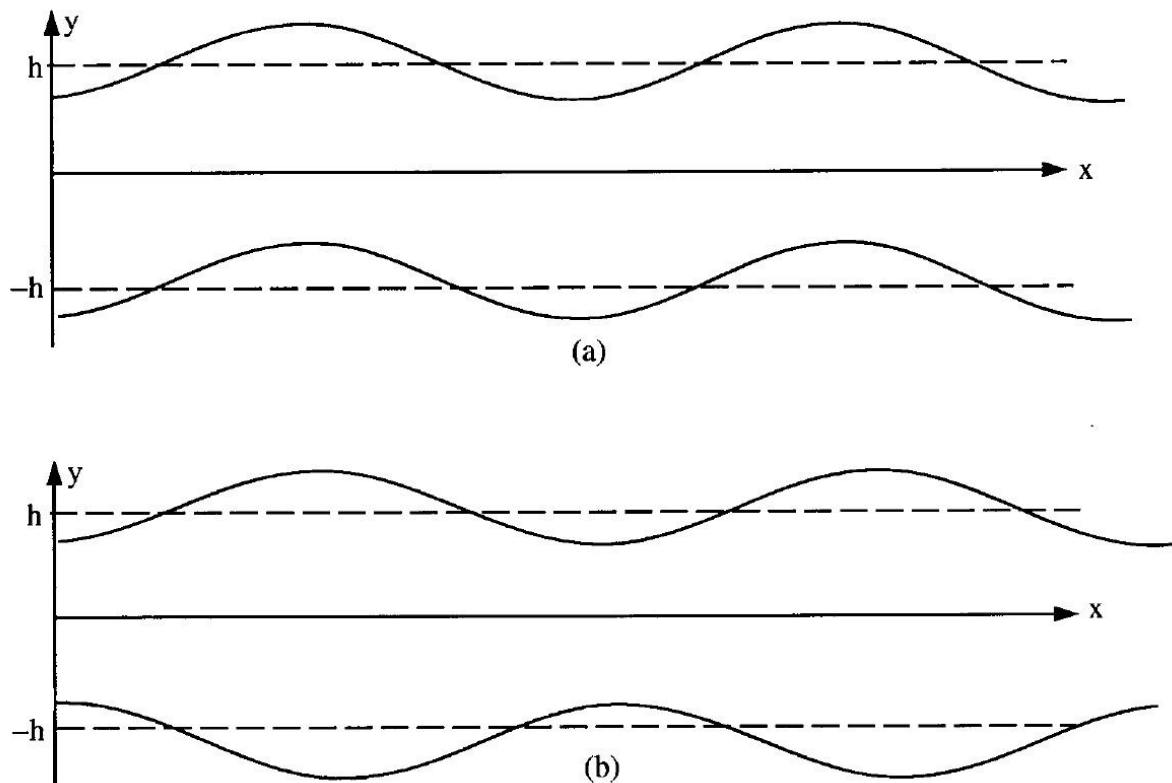


folyadékklapban kialakuló keresztirányú áramlás. Ez a jelenség problematikus pl. felületek bevonásánál, amikor a bevonó folyadékfüggönynek egyenletesnek kell lennie. A jelenséget elkerülni nem, de csökkenteni lehet. Végül, a függelékben saját kezdeti kísérleteinkről számolunk be.

E témákkal fogunk az alábbiakban foglalkozni.

Folyadékklap instabilitása

A folyadékklapnak két alapvető instabilitási módusza van: a szimmetrikus és antiszimmetrikus (az angol irodalomban ezeket rendre varicose = visszérszerű illetve sinuous = szinuszformájú móduszoknak nevezik). Ezeket a móduszokat szematikusan a 3. ábrán láthatjuk.



3. ábra. Az asszimmetrikus (a) és a szimmetrikus instabilitási hullám szematikusan megjelenítése. (Senecal et al., 1999)

Ha a folyadékklap tökéletesen sima, a rá ható erők egyensúlyban vannak. Ha azonban valami zavarás miatt egy kitüremkedés keletkezik, akkor az egyensúly megbomlik. A felületi feszültségi erők megpróbálják visszaállítani az eredeti (sík) állapotot, míg mind a gázban, mind a folyadékban keletkező normális feszültségek általában erősítik az instabilitást, azaz a zavarás amplitúdóját. A folyadék és gázfázis közötti relatív sebesség addig növeli a zavarások amplitúdóját, amíg azok szétesnek, és a keletkező folyadékszálak hamarosan cseppekre

bomlanak. Ha a felületi feszültségi erők dominálnak, a zavarás elhal, míg ha az aerodinamikai erők dominálnak, a zavarás erősödik. A két erő arányával definiálunk egy dimenziótlan számot, a Weber számot (We). Ha a Weber szám eléri egy kritikus értéket akkor lesz instabil a folyadékfelület.

A témával számos szerző foglalkozott, kezdve Squire-el (1953), majd Hagerty és Shea (1955), akik a mind folyadékfelületet, mind a környező gázt súrlódásmentesnek, a folyadékfelületet pedig egyenletes vastagságúnak tételezték fel. Eredményeik azt mutatták, hogy a gyakorlat számára érdekes tartományban mindig az antiszimmetrikus módusz dominál, a szimmetrikus módusz erősítési tényezője jóval kisebb, így nem figyelhető meg. Ezt más szerzők is így találták, két szerzőpárost kivéve (Li és Tankin, 1990; Rangel és Sirigano (1991)), akik magas Weber számoknál és szokatlanul magas gázsűrűségnél találtak egy tartományt, ahol a szimmetrikus zavarás erősödik jobban. Ennek azonban, a paraméterek szokatlansága miatt, kicsi a gyakorlati jelentősége. A fenti feltételezések mellett a kritikus gáz Weber szám $We_g = \rho_g/\rho_f = Q$, azaz a gáz és a folyadék sűrűségének aránya. ($We_g = U_0^2 h \rho_g / \sigma$, ahol U_0 a folyadékfelület és a környező gáz relatív sebessége, $2h$ a folyadékfelület vastagsága, σ a felületi feszültség.)

A teljesség kedvéért összefoglaljuk a körkeresztmetszetű folyadéksugár tulajdonságait és összehasonlítjuk a lappal, mielőtt folytatjuk a folyadékfelület tárgyalását.

(i) A sugár esetében a domináns instabilitási mód a szimmetrikus, szemben a lappal;

(ii) A sugár esetében alacsony sebességnél a felületi feszültség az instabilitást erősíti, míg nagyobb sebességnél ellene dolgozik. A lap esetében a felületi feszültség mindig az instabilitás ellen dolgozik, míg az instabilitást az aerodinamikai erők okozzák. Így a lap vákuumban mindig stabil maradna;

(iii) A sugár felbomlásához nem szükséges a relatív sebesség, de segíti a felbomlást. A lap relatív sebesség nélkül nem bomlik fel;

Az alábbiakban a vékony, egyenletes vastagságú folyadékfelület lineáris stabilitási elemzését közöljük, ahol a folyadék viszkozitását is figyelembe vesszük. A levezetés első része elsősorban Li és Tankin (1990) munkájára alapozódik.

Tekintsünk egy egyenletes, $2h$ vastagságú, ρ_f sűrűségű, σ felületi feszültségű kétdimenziós folyadékfelületet, amely U_0 sebességgel mozog a súrlódásmentes, ρ_g sűrűségű környező gázban. A koordinátarendszert a gázhoz rögzítjük, tehát U_0 a folyadék és a gáz relatív sebességének tekinthetjük. A sebesség kicsi a hangsebességhez képest, így mindkét közeget összenyomhatatlannak tekintjük, a gravitációs hatásokat elhanyagoljuk. Az x tengely a lap közepén, az áramlás irányával párhuzamosan, az y tengely arra merőlegesen van.

A két folyadékfelület a következő egyenletek adják meg:

$$y = \pm h + \xi; \xi = \xi_0 \exp(\omega t + ikx) \quad (1)$$

ahol $y = \pm h$ a folyadékfelület egyensúlyi helyzetei; ξ_0 a zavarás kezdeti amplitúdója, ami a lap félvastagságánál, h -nál sokkal kisebb; $k = 2\pi/\lambda$ a hullámszám, λ a zavarás hullámhossza; $\omega = \omega_r + i\omega_i$ a komplex körfrekvencia. A valós rész ω_r a zavarás növekedési vagy csökkenési rátáját (az előjeltől függően), a képzetes rész ω_i pedig 2π -szer a zavarás frekvenciája; ezzel a zavarás terjedési sebessége $-\omega_i/k$, t az idő.

A folyadék mozgása

Mint említettük, az alapáramlás U_0 nagyságú x irányú sebesség, 0 nagyságú y irányú sebesség és 0 környező nyomás. Erre szuperponálódnak a kicsinek feltételezett (u, v) zavarási sebességek az (x, y) irányban, valamint a p zavarási nyomás. A (2) kontinuitási egyenletet és a

(3) és (4) mozgásegyenleteket linearizálva közöljük, azaz elhagytuk a kis mennyiségek szorzatait, illetve magasabb hatványait:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \nabla^2 u \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_f \nabla^2 v \quad (4)$$

ahol ν_f a folyadék kinematikai viszkozitása. A (2)-(4) egyenletekhez a következő peremfeltételek kapcsolódnak. A folyadék-gáz határfelületen, ami elsőrendű közelítésben továbbra is $y \approx \pm h$ -nak vehető, nincsen átáramlás, tehát a folyadék normális sebessége a határfelületen egyenlő a határfelület normális sebességével. A csúsztatófeszültség eltűnik a felületen (a gáz súrlódásmentes) és a normális feszültség folytonos. Ezeket a peremfeltételeket matematikai formába öntve kapjuk:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad y \approx \pm h\text{-nál} \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = \mu_f \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad y \approx \pm h\text{-nál} \quad (6)$$

$$\tau_{yy} - \tau_{g,yy} = p_\sigma \quad y \approx \pm h\text{-nál} \quad (7)$$

ahol τ_{xy} és τ_{yy} a folyadék csúsztató- és normális feszültség, $\tau_{g,yy}$ a gáz normális feszültség és p_σ a felületi feszültség által okozott nyomás. (2)-(4) megoldásához az ú. n. Helmholtz dekompozíciót hívjuk segítségül. Ez azt jelenti, hogy a sebességmezőt felbontjuk két részre: a potenciális (1-es index) és a súrlódásos (2-es index) részre. Előbbihez potenciálfüggvényt, utóbbihoz áramfüggvényhez hasonló függvényt, ψ -t lehet definiálni.

$$u = u_1 + u_2; v = v_1 + v_2 \quad (8)$$

Levich (1962) kimutatta, hogy a nyomás ugyanaz a súrlódásmentes és a súrlódásos folyadékokban, mert a viszkozitás csak a hullám frekvenciáját befolyásolja, a nyomást nem. Így a nyomást az „1”-es sebességmezőből határozzuk meg. Definiáljuk a sebességpotenciált, ϕ -t.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}; v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (10)$$

A nyomást megkaphatjuk:

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (11)$$

A (2) és a (8)-(10) egyenletekből következik, hogy

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

A (3) és (4) egyenletekből rendre ezt kapjuk:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \nu_f \nabla^2 u_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} = \nu_f \nabla^2 v_2. \quad (14)$$

Definiáljuk ψ -t:

$$u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

Behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu_f \nabla^2 \psi. \quad (16)$$

A zavarások, hasonlóan (1)-hez a következő formát öltik:

$$\phi = \Phi(y) \exp(\omega t + ikx) \quad (17)$$

$$\psi = \Psi(y) \exp(\omega t + ikx). \quad (18)$$

(17)-et és (18)-at (10)-be és (16)-ba behelyettesítve adódik:

$$\Phi''(y) - k^2 \Phi(y) = 0 \quad (19)$$

$$\Psi''(y) - s^2 \Psi(y) = 0 \quad (20)$$

ahol

$$s^2 = k^2 + \frac{\omega + ikU_0}{\nu_f}.$$

A (19) és (20) egyenletek megoldásai könnyen megkaphatók:

$$\Phi(y) = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky} \quad (21)$$

$$\Psi(y) = C_3 e^{sy} + C_4 e^{-sy}, \quad (22)$$

ahol C_1, C_2, C_3, C_4 később meghatározandó integrációs konstansok. Így

$$\phi = (C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}) \exp(\omega t + ikx) \quad (23)$$

$$\psi = (C_3 e^{sy} + C_4 e^{-sy}) \exp(\omega t + ikx). \quad (24)$$

Az (5) és (6) peremfeltételekből kiszámolhatók a konstansok:

$$C_1 = -C_2 = \frac{k^2 + s^2}{2k \cosh(kh)} \nu_f \xi_0 \quad (25)$$

$$C_3 = C_4 = -\frac{ik}{\cosh(sh)} \nu_f \xi_0, \quad (26)$$

míg a normális feszültség a folyadékklapban

$$\begin{aligned}\tau_{yy} &= -p + 2\mu_f \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= \left\{ \rho_f (\omega + ikU_0) + 2\mu_f k^2 \right\} (e^{ky} - e^{-ky}) C_1 - i2\mu_f k s (e^{sy} - e^{-sy}) C_3 \exp(\omega t + ikx)\end{aligned}\quad (27)$$

A gáz mozgása

A gáz mozgására hasonló alapegyenleteket írhatunk föl, mint a folyadékéra, csak itt a viszkozitást 0-nak tekintjük.

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (29)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (30)$$

A peremfeltételek azt kívánják, hogy a határfelületen folytonos legyen a normális sebesség és távol a folyadékklaptól a zavarások elhalnak. Azaz:

$$v_g = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad y \approx \pm h\text{-nál} \quad (31)$$

$$v_g = 0, \text{ ha } y \rightarrow \pm\infty. \quad (32)$$

Mivel a gáz sűrűségmentes, itt is definiálható sebességpotenciál. Ezt szintén az eddig megszokott alakban tételezzük fel:

$$\phi_g = \Phi_g(y) \exp(\omega t + ikx). \quad (33)$$

(28), (31) és (32)-ből következik:

$$\phi_g = -(\omega/k) \exp(k(h-y)) \xi_0 \exp(\omega t + ikx) \quad y \geq h\text{-ra} \quad (34)$$

(29)-ből és (30)-ból következik, hogy a normális feszültség:

$$\tau_{g,yy} = -p_g = \rho_g \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = -\rho_g (\omega^2/k) \exp(k(h-y)) \xi_0 \exp(\omega t + ikx) \quad (35)$$

Felületi feszültség által indukált nyomás

A felületi feszültség által létrehozott nyomás elsőrendű közelítésben: $p_\sigma = \frac{\sigma}{R} \approx \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, ahol R a határfelület görbületi sugara. Eszerint:

$$p_\sigma = -\sigma k^2 \xi_0 \exp(\omega t + ikx) \quad (36)$$

Diszperziós egyenlet az antiszimmetrikus zavarásra

(27)-et, (35)-öt és (36)-ot (7)-be helyettesítve $y = h$ esetére adódik a diszperziós összefüggés a komplex növekedési ráta és zavarási hullámszám között:

$$\left[\rho_f (\omega + ik U_0) + 2\mu_f k^2 \right] v_f (k^2 + s^2) \tanh(kh) - 4\mu_f v_f k^3 s \tanh(sh) + \rho_g \omega^2 + \sigma k^3 = 0 \quad (37)$$

Diszperziós egyenlet a szimmetrikus zavarásra

A szimmetrikus zavarás diszperziós egyenlete rendkívül hasonló az antiszimmetrikus esetére. A levezetés hasonló, az egyenletet levezetés nélkül közöljük. A (37)-es egyenletben a tanh tagok helyett coth tagok jelennek meg.

$$\left[\rho_f (\omega + ik U_0) + 2\mu_f k^2 \right] v_f (k^2 + s^2) \coth(kh) - 4\mu_f v_f k^3 s \coth h(sh) + \rho_g \omega^2 + \sigma k^3 = 0 \quad (38)$$

Ezek az egyenletek komplikáltak, analitikus megoldásuk nem lehetséges. Bizonyos határesetekben azonban van analitikus megoldás.

További elemzés (Senecal et al. (1999) alapján)

A további elemzéshez kicsit más alakba hozzuk a (37) egyenletet. Elosztunk ρ_f -el, amivel megjelenik az egyenletben a két sűrűség aránya, Q , valamint koordinátatranszformációt hajtunk végre; koordinátarendszerünket most az U_0 sebességgel mozgó folyadékklaphoz rögzítjük. Ezt megtehetjük, hiszen az egész instabilitási jelenség Galilei-invariáns.

Matematikailag ez annyi változást eredményez, hogy ω -t $\omega - ik U_0$ -val helyettesítjük, valamint, hogy U_0 előjele ellentétes lesz. Következésképpen s definíciója is átalakul: az új

koordinátarendszerben $s^2 = k^2 + \frac{\omega}{v_f}$. Így egyenletünk átrendezés után a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \omega^2 [\tanh(kh) + Q] + \omega [4v_f k^2 \tanh(kh) + 2iQkU_0] + 4v_f^2 k^4 \tanh(kh) \\ - 4v_f^2 k^3 s \tanh(sh) - Qk^2 U_0^2 + \sigma k^3 / \rho_f = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Először elhanyagoljuk a folyadékviszkózitást, hogy bizonyos útmutatást kapjunk a megengedhető elhanyagolásokhoz. Később, a pontosabb számításoknál visszatérünk a viszkózus egyenlethez. A viszkózitás elhanyagolása után rendre a következő másodfokú egyenleteket kapjuk az asszimmetrikus és a szimmetrikus móduszokra:

$$\omega^2 [\tanh(kh) + Q] + \omega 2iQkU_0 - Qk^2 U_0^2 + \sigma k^3 / \rho_f = 0 \quad (40)$$

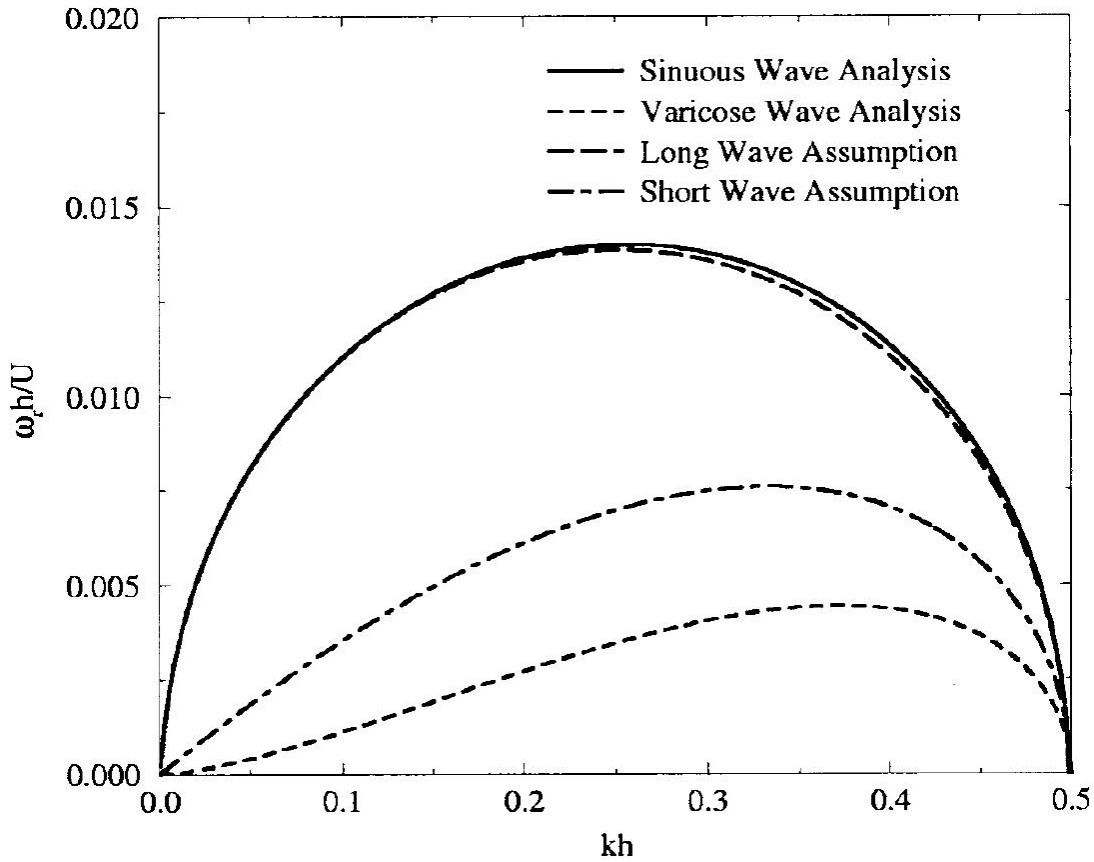
$$\omega^2 [\coth(kh) + Q] + \omega 2iQkU_0 - Qk^2 U_0^2 + \sigma k^3 / \rho_f = 0, \quad (41)$$

amiket zárt alakban megoldva kapjuk a következő kifejezéseket a körfrekvencia valós részére, ami nem más, mint a zavarás növekedési rátája. Megintcsak (42) az asszimmetrikus, (43) a szimmetrikus móduszra vonatkozik.

$$\omega_r = \frac{\sqrt{\tanh(kh)Qk^2 U_0^2 - \sigma k^3 / \rho_f [\tanh(kh) + Q]}}{\tanh(kh) + Q} \quad (42)$$

$$\omega_r = \frac{\sqrt{\coth(kh)Qk^2U_0^2 - \sigma k^3 / \rho_f [\coth(kh) + Q]}}{\coth(kh) + Q} \quad (43)$$

A 4. és az 5. ábrán láthatjuk az antiszimmetrikus és a szimmetrikus dimenziótlan növekedési rátát két különböző gáz Weber szám esetére ($We_g = \rho_g U_0^2 h / \sigma$). (A továbbiakban a gáz Weber számot index nélkül, egyszerűen We -nek fogjuk jelölni. Az alacsony Weber szám esetében nyilvánvaló, hogy a teljes tartományon az antiszimmetrikus hullámok dominálnak magasabb növekedési rátájuk miatt. A magas Weber szám esetében a tartomány egy részében a két görbe nagyon közel van egymáshoz, szinte megkülönböztethetetlenek. Ahogyan a bevezetésben említettük, Li és Tankin, 1990 valamint Rangel és Sirigano (1991) nagyon magas gázsűrűségnél találtak egy kis Weber szám tartományt, ahol a szimmetrikus zavarás növekedési rátája nagyobb, ennek azonban nincs gyakorlati jelentősége.



4. ábra. Növekedési ráta a hullámszám függvényében. Súrlódásmentes eset, $We = 0,5$ (Senecal et al., 1999)

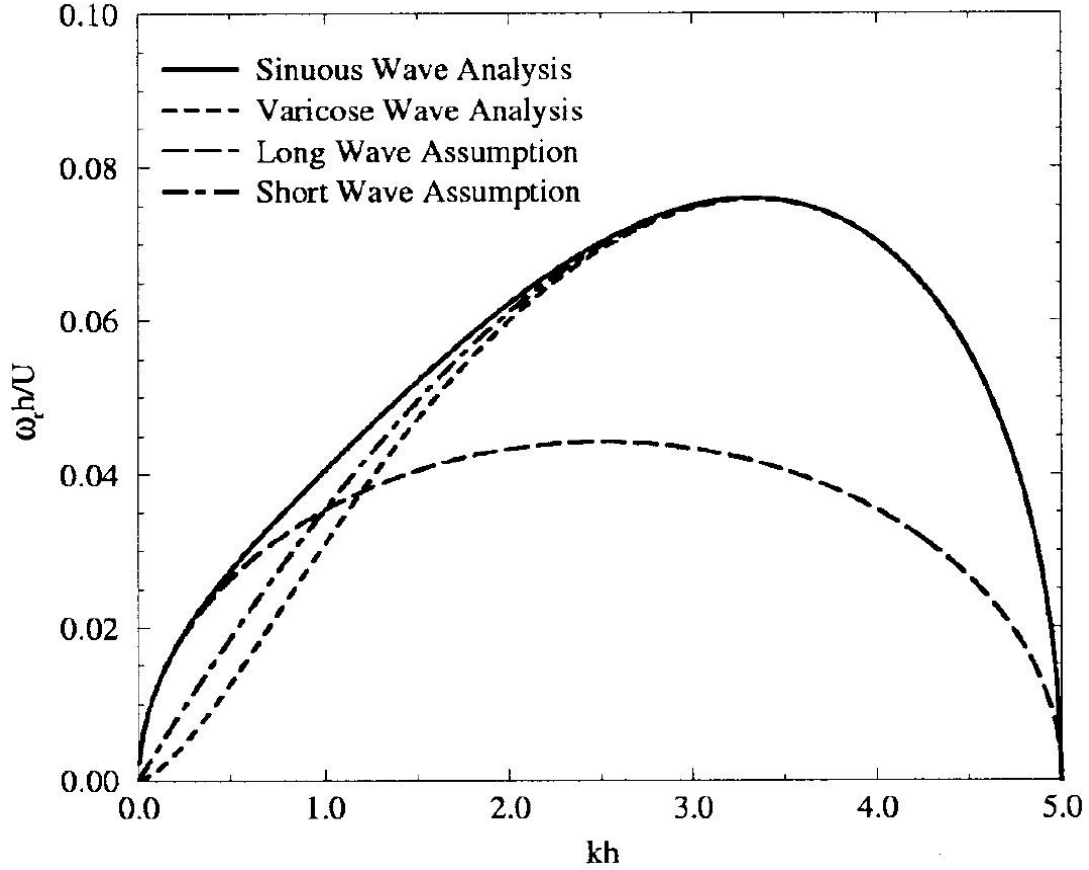
Mérnöki szempontból tehát kijelenthetjük, hogy a gyakorlatilag érdekes tartományban az antiszimmetrikus zavarások maximális növekedési rátája mindig nagyobb vagy egyenlő a szimmetrikusokénál. Kis kh , azaz hosszú hullámok esetén viszont egyértelműen dominálnak az aszimmetrikus hullámok. Erre az eredményre jutott Squire (1953), majd Hagerty és Shea (1955) is. A hosszú hullám feltételezésével $\tanh(kh) \approx kh$ és ezzel a közelítéssel (42) (44)-re egyszerűsödik.

$$\omega_r = \frac{\sqrt{Qk^3U_0^2h - \sigma k^3 / \rho_f [kh + Q]}}{kh + Q} \quad (44)$$

Ha ezenkívül még azt is feltételezzük, hogy $Q \ll kh$, ami esetünkben fennáll akkor az alábbi kifejezést kapjuk. Ez megegyezik Squire (1953) eredményével.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{Qk^2U_0^2 - \sigma k^3 / \rho_f}{kh}} \quad (45)$$

Ezt a kifejezést mutatja a 4. és 5. ábra „long wave assumption” név alatt. Azt láthatjuk, hogy alacsony Weber számnál a hosszú hullám közelítés rendkívül jó, viszont magas Weber számnál, a legalacsonyabb kh tartományt kivéve gyenge. Ez arra utal, hogy alacsony sebességű folyadékklapnál a hosszabb hullámok, magasabb sebességű folyadékklapnál a rövidebb hullámok erősödnek jobban. Ha tehát a rövid hullámú közelítést tesszük, $\tanh(kh) \approx \coth h(kh) \approx 1$, és akkor mindkét fajta zavarás erősítése:



5. ábra. Növekedési ráta a hullámszám függvényében. Súrlódásmentes eset, $We = 5,0$ (Senecal et al., 1999)

$$\omega_r = \frac{\sqrt{Qk^2U_0^2 - \sigma k^3 / \rho_f [1 + Q]}}{1 + Q}, \quad (46)$$

ami a további feltétel $Q \ll 1$ bevonásával

$$\omega_r = \sqrt{Qk^2U_0^2 - \sigma k^3 / \rho_f} \quad (47)$$

lesz. (45) és (47) összehasonlításával látjuk, hogy $\omega_{r, rövid} = \sqrt{kh} \omega_{r, hosszú}$. Másszóval, ha $kh > 1$, azaz, ha $\lambda/h < 2\pi$, akkor a rövid hullámok növekedése fog dominálni, míg ellenkező esetben a hosszú hullámoké. Ez világos az 5. ábrából, ami $We = 5$ -re készült. A 4. ábra viszont, ami $We = 0,5$ esetét mutatja, az egész tartományon a hosszú hullámok dominálnak. Az a tény, hogy kisebb Weber számra a hosszú hullámú közelítés, míg nagyobb Weber számra a rövid

hullámú közelítés bizonyul jobbnak, azt sejteti, hogy van egy kritikus Weber szám, ami alatt a hosszú, és ami fölött a rövid hullámok dominálnak. Mivel mindkét esetben a maximális növekedési ráta a meghatározó, ezzel fogunk számolni, és Ω -val illetve K -val jelöljük. A dimenziótlan és meghatározható a két határesetre a (45) és (47) egyenletből.

$$\left[\frac{\Omega h}{U_0} \right]_{\text{hosszú}} = \frac{1}{2} \sqrt{QWe} ; Kh = 1/2We \text{ -nél} \quad (48)$$

$$\left[\frac{\Omega h}{U_0} \right]_{\text{rövid}} = \frac{2}{3} We \sqrt{\frac{Q}{3}} ; Kh = 2/3We \text{ -nél} \quad (49)$$

A két maximális növekedési rátát egyenlővé téve adódik, hogy a kritikus Weber szám 27/16.

Most visszatérünk a viszkózus folyadék esetéhez, és próbáljuk a (39) egyenletet egyszerűsíteni. Először is, nagyságrendi elemzés azt mutatja, hogy a viszkózításban másodrendű tagok tipikus K és Ω értékek esetén elhanyagolhatóak a többi taghoz képest. Ezzel az egyszerűsítéssel az antiszimmetrikus instabilitás növekedési rátája:

$$\omega_r = \frac{-2\nu_f k^2 \tanh(kh) + \sqrt{4\nu_f^2 k^4 \tanh(kh) - Q^2 k^2 U_0^2 - [\tanh(kh) + Q](\sigma k^3 / \rho_f - Qk^2 U_0^2)}}{\tanh(kh) + Q} \quad (50)$$

Hosszú hullámok és $Q \ll kh$ esetén közelítőleg adódik:

$$\omega_r = -2\nu_f k^2 + \sqrt{4\nu_f^2 k^4 + U_0^2 Qk/h - \sigma k^2 / (\rho_f h)} \quad (51)$$

Rövid hullámhossz és $Q \ll l$ feltételezésével:

$$\omega_r = -2\nu_f k^2 + \sqrt{4\nu_f^2 k^4 + U_0^2 Qk^2 - \sigma k^3 / \rho_f} \quad (52)$$

A 6. és 7. ábrán látható a hosszú hullámú és a rövid hullámú közelítésre a súrlódásmentes és a súrlódásos közelítés összehasonlítása, rendre $We = 0,5$ -re és $We = 5$ -re. Alacsony We esetén a súrlódásmentes közelítés nagyon jó a teljes kh tartományon, mindkét határesetre. Magas We esetén viszont mindkét határeset súrlódásmentes közelítése rossz.

Végső ellenőrzésként a (39) pontos egyenletet numerikusan megoldva, összehasonlítjuk a viszkózus közelítésekkel, az (50) és (52) egyenletekkel. Az eltérés általában 3-4%, de sehol sem haladja meg a 8%-ot, így a közelítéseket kielégítőnek tekinthetjük.

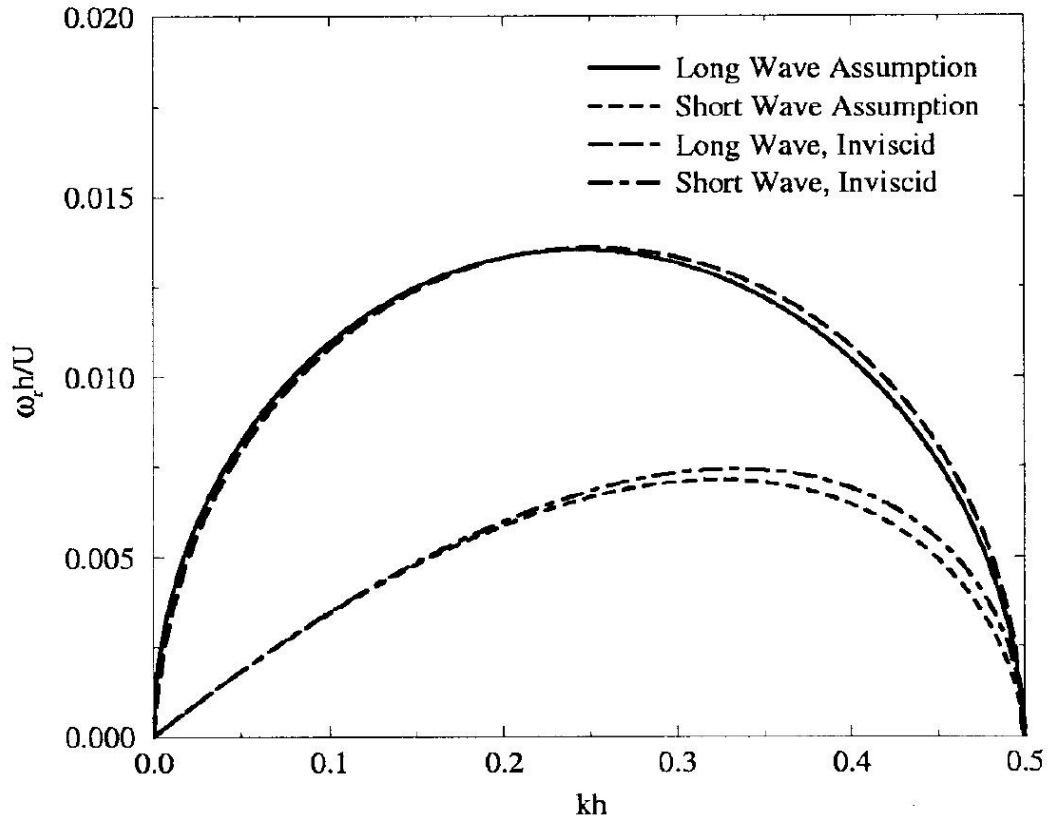
Li és Tankin (1991) szerint a viszkózításnak még további hatása az, hogy a súrlódásmentes esethez képest kiterjeszti a hullámszámtartományt, amiben az instabilitás föllép, nagyobb hullámszámokra is.

Ibrahim (1998) a folyadékklap sebességprofiljának hatását vizsgálta a stabilitási viselkedésre, hiszen eddig implicite feltettük, hogy a folyadékklap sebességeloszlása egyenletes. Azt találta, hogy a leginstabilabb az egyenletes sebességprofil, és a parabolikusba való átmenet során az instabilitás mértéke egyre csökken. Így utólag igazolódott az egyenletes sebességeloszlás feltételezése.

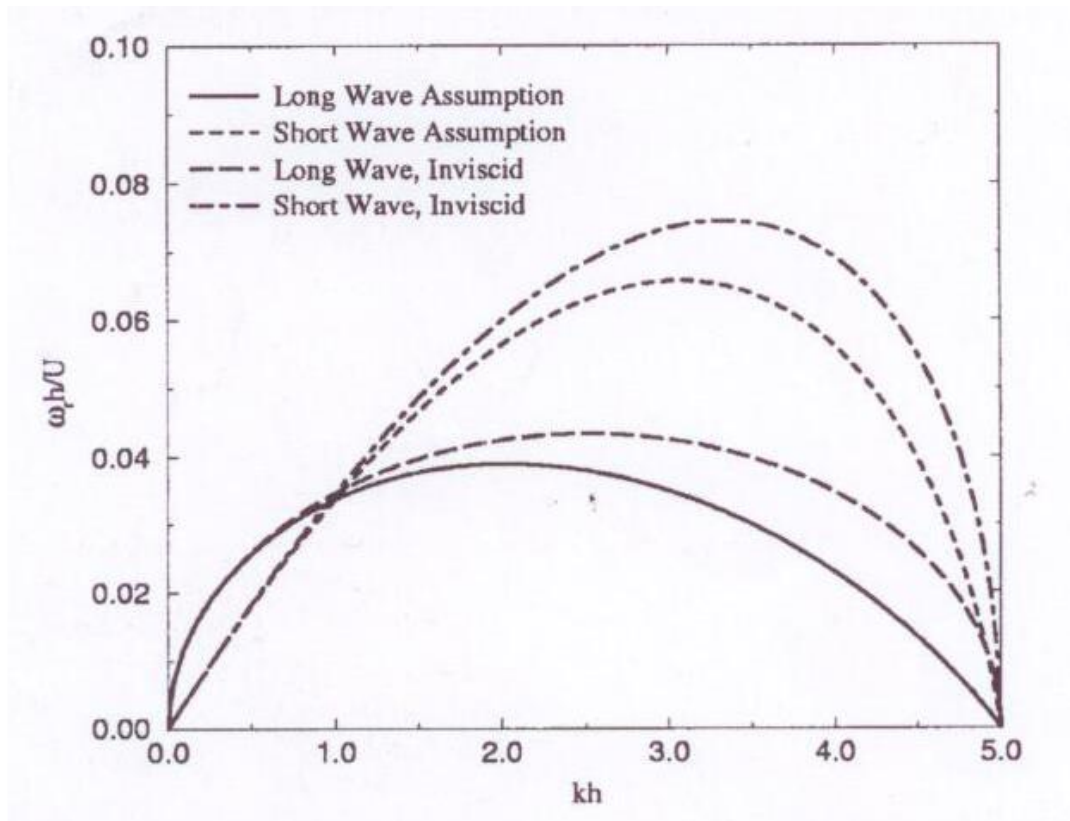
Bremond et al. (2007) újabb instabilitási mechanizmust fedezett fel, ami keresztirányú hullámokhoz, majd áramlás irányú folyadékcsálak keletkezéséhez vezet. Ennek segítségével sikeresen jósolták meg a cseppátmérő eloszlását. Munkájukat részletes kísérleti alátámasztás kísérte, igen látványos fényképekkel.

Számítógépes modellezés

Az előző eredményeket Senecal et al. (1999) úgy használta fel a számítógépes modellezésben, hogy definiált egy kritikus hullámamplitúdót, aminél a folyadékklap szétszakad. Az erősítési tényező segítségével meghatározható az idő, amíg ezt eléri, abból pedig egy felbomlási távolság számolható, ahol az összefüggő lap cseppekre bomlik. A modell segítségével becslés adható az átlagos cseppátmérőre is. A szoftver elsősorban autóban használt injektor modellezésére készült, és számos egyéb érdekes tulajdonsága van, ami jelen jelentés



6. ábra. Növekedési ráta a hullámszám függvényében. Súrlódásmentes és súrlódásos eset összehasonlítása, $We = 0,5$ (Senecal et al., 1999)



7. ábra. Növekedési ráta a hullámszám függvényében. Súrlódásmentes és súrlódásos eset összehasonlítása, $We = 5,0$ (Senecal et al., 1999)

szempontjából nem érdekes. Mindenesetre az egyezés a mérésekkel minden mennyiségben kiváló, példaként tekintünk a 8. ábrát, ahol a cseppek Sauter átlagátmérőjét ábrázoltuk.