

Mérés, jelfeldolgozás, elektronika

BME Gépészmérnöki Kar hallgatói számára
Dr. Halász Gábor előadásai alapján készítette Varga Roxána

2018. február 28.

1. A jelfeldolgozás lépései

Mérési modellek felállításakor a célunk az, hogy egy mérendő mennyiséget számszerűsíteni tudjunk, és abból információt nyerjünk. A megméréendő mennyiséget, *jelet* (pl.: hőmérséklet, nyomás, stb.) egy *érzékelő* segítségével folytonos villamos jellé (áram vagy feszültség jellé) tudunk alakítani, melyet egy *analóg-digitális konverterrel* digitális jellé alakíthatunk. Ahhoz hogy a jel információtartalma használható legyen, a berendezést *kalibrálni* kell. A tárgy célja az így kapott *jel feldolgozása* műszaki-szakmai szempontból, különböző módszerek megismerése.



1. ábra. A jelfeldolgozás lépései.

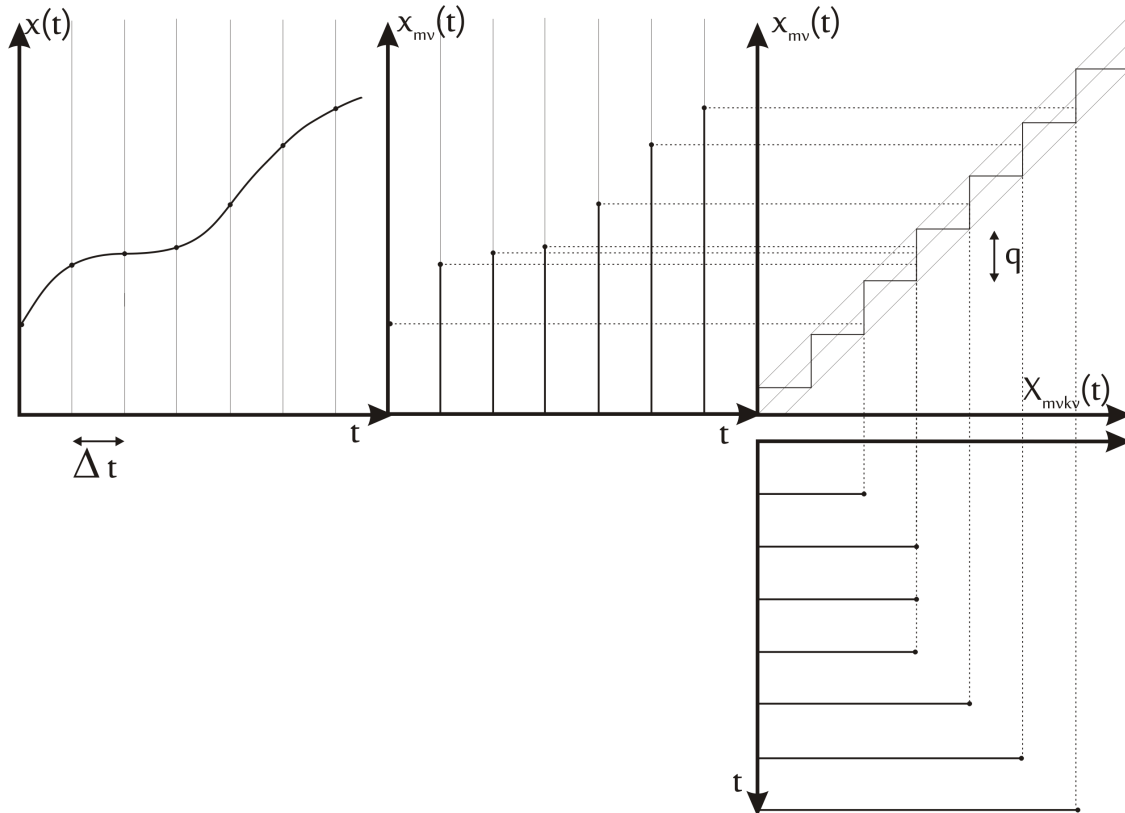
1.1. Jel

Jel alatt az információt hordozó mennyiséget értjük. Mivel általában időben változó mennyiség, $x(t)$ -vel jelöljük. Megköveteljük, hogy az $x(t)$ jel az értelmezési tartományában (vagyis az időben) és amplitúdójában is folytonos legyen. A jel lehet *determinisztikus*, illetve *sztochasztikus*. Determinisztikus a jel, ha periodikus vagy tranzienst (átmeneti, egy állapotból egy másikba megy át). A jel sztochasztikus, ha véletlenszerűen változik az idő függvényében. A sztochasztikus jel lehet *stacionárius* vagy *nem stacionárius* (ezek leírását lásd később).

1.2. Analóg-digitális konverzió

Az **analóg-digitális konverzióra** (A/D konverzió) azért van szükség, mert analóg jelet nem tudunk tárolni, azt digitalizálni kell. Első lépésben a folytonos jelet időben diszkrétizáljuk, vagyis $n\Delta t$ ($n = 0, 1, \dots$) időpontokban mintavételezzük, így kapjuk az $x_{mv}(t)$ mintavételezett jelet, mely amplitúdójában még folytonos, a 2. ábra felső sorában az első diagram a folytonos jelet, míg a második az időben már diszkrétizált jelet mutatja. Ezt a jelet, amely tehát amplitúdójában még folytonos, amplitúdó kvantálással lehet diszkrétizálni. Az amplitúdó kvantálás során a 2. ábra felső

sorában az utolsó ábra alapján lépcsőket állítunk elő, melyek segítségével az amplitúdót is diszkrétizálni tudjuk. Az így kapott x_{mvkv} jelet ábrázolja a 2. ábra alsó diagramja. A kvantálás során a lépcsőket úgy kell megválasztani, hogy a kapott x_{mvkv} időben is, és amplitúdójában is diszkrétizált jelből vissza tudjuk kapni az eredeti $x(t)$ jel jellemzőit. Mielőtt kimondjuk a tételt, amely Δt megválasztására ad egy korlátot, szükségünk van a sáv szélesség definíciójára. A **sáv szélesség**, melyet B -vel szokás jelölni, a jelben levő perióduskomponensek Hertz-ben megadott frekvenciáinak maximuma. Vagyis a sáv szélesség az az érték, amelynél (és felette) nincs komponens a jelben. Ami azt a következményt is tartalmazza, hogy a jel Fourier-sorában a B feletti frekvenciák esetében a Fourier-együtthatók mind 0-k. Ha $B < \infty$, akkor a jel **sávkorlátozott**.



2. ábra. Analóg-digitális konverzió. Balról jobbra haladva rendre a Δt időpontokban a mintavételezés; a mintavételezett jel valamint az amplitúdó kvantálás diagramjai.

A következőkben ismertetésre kerülő mintavételi tétel csak a mintavételezés hibájával foglalkozik, és nem foglalkozik a kvantálás hibájával.

Shanon-féle mintavételezési tétel (~1948)

Legyen a folytonos jelünk sávkorlátozott, és sávkorlátja $B < \infty$. Ekkor ha $\Delta t = \frac{1}{2B}$ -vel mintavételezzük, akkor információ veszteség nélkül visszaállítható a jel, és $x(t)$ a következő alakban

számolható:

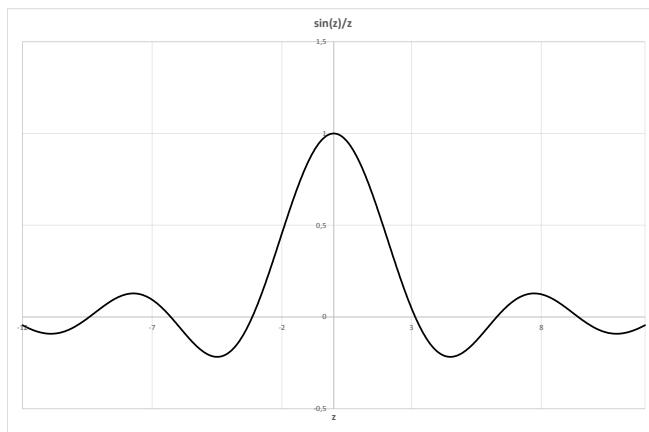
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - n\Delta t)}{\omega_B(t - n\Delta t)}, \quad (1)$$

ahol $\omega_B = 2\pi B$ és $x(n\Delta t)$ a jel értékei az $n\Delta t$ időpillanatokban.

Érdeemes észrevenni, hogy $z_n := \omega_B(t - n\Delta t)$ jelöléssel, a képletben szereplő tört

$$\frac{\sin z_n}{z_n} \rightarrow 1, \quad \text{ha } z_n \rightarrow 0$$

és egyébként egy csökkenő amplitúdójú függvény (3. ábra). Vagyis az eredeti $x(t)$ jel előáll egy megfigyelt értéksorozat és egy függvénysorozat szorzataként.

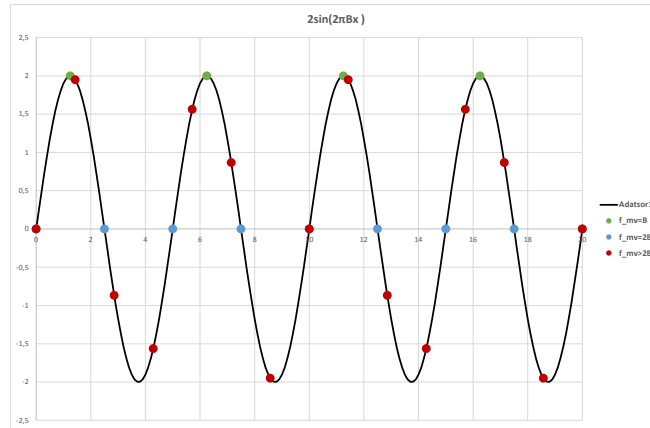


3. ábra. A $\frac{\sin(z)}{z}$ függvény.

A tételre nem adunk egy precíz matematikai bizonyítást (ez megtalálható a jegyzet végén felsorolt szakirodalomban), azt csak nagy vonalakban mutatjuk be a hallgatónak. $x(t)$ jel legyen sávkorlátozott, sávkorlátja B . Figyeljük meg T ideig, tehát a megfigyelés időintervalluma $[0, T]$. Fedjük le a megfigyelt sávval az egész síkot, így kapunk egy periodikus jelet. Mivel periodikus a jel, Fourier-sorba fejthető, aminek az alulfrekvenciája $\Delta f = \frac{1}{T}$. Feltettük, hogy $x(t)$ sávkorlátozott jel, így létezik egy határ amely felett nincs frekvencia a jelben. A Fourier-sornak $\frac{B}{\Delta f} = BT$ darab tagszáma van, az együtthatóinak a száma pedig $2BT$. Vagyis ahhoz, hogy a jelet egyértelműen megkapjuk $2BT$ darab adatra van szükség, tehát $2BT$ pontban kell mintavételezni, ami azt jelenti, hogy az $f_{mv} = 2B$ mintavételi frekvencia jó.

Gondoljuk meg, hogy a formula a mérési pontokban valóban visszaadja a mintavételezett jelet. A tétel állítása azt mondja, hogy ha a mintavételezési frekvencia a határfrekvencia kétszerese, akkor két mintavételezett pont között is a megfigyelt jelet kapjuk vissza a képletben szereplő $\sin(z_n)/z_n$ függvény segítségével. Tehát mondhatjuk azt, hogy az (1)-es képlettel megadott függvény két mintavételezési pont között interpolációs polinom.

A fenti tételhez a további megjegyzések fűzhetőek. Tekintsük az $x(t) = A \sin(2\pi Bt)$ függvényt (4. ábra, folytonos görbe). Mekkora f_{mv} mintavételezési frekvenciát érdemes választani?



4. ábra. Mintavételezés

1. Ha $f_{mv} < 2B$, legyen például $f_m = B$. Ekkor periódusonként egy pontot mintavételezünk (4. ábra, zöld pontok), amely a $[-A, A]$ tartományban bármilyen értéket felvehet. Így nyilvánvalóan kevés pontot tárolunk el ahhoz, hogy a szinusz függvényt vissza tudjuk nyerni azok ismeretében. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy *alul-mintavételezés* történt.
2. Ha $f_{mv} = 2B$. Ekkor már periódusonként két pontot mintavételezünk (4. ábra, kék pontok), ami szintén kevés. Akár előfordulhat az az eset is, hogy az azonosan 0 sorozatot mintavételezzük. Megjegyezzük, hogy az 1. esetben nyilvánvalóan nem teljesül a mintavételi frekvenciára vonatkozó feltétel. A 2.eset külön megfontolást igényel: a jel frekvenciája pontosan B , vagyis a határfrekvencia nagyobb mint B . Ezért a jel visszaállításához nem elegendő a $2B$ mintavételi frekvencia, ennél nagyobb kell.
3. Ha $f_{mv} > 2B$, akkor fél periódusnál sűrűbben mintavételezünk (4. ábra, piros pontok), de még ez is lehet kevés. Elvben ez elegendő, de "szemre" nem lehet felismerni a keresett jelet.
4. A gyakorlatban $f_{mv} \geq (5 - 8)B$ mintavételezési frekvenciát szokás alkalmazni, ekkor a jel helyreállítható. Ezt az esetet nevezzük *túlmintavételezésnek*. Ha viszont nem cél a jel helyreállítása, nincs szükségünk minden információra amit az hordoz, akkor alul-mintavételezés is alkalmazható.
5. Ismeretlen jel esetén a B sávszélességet általában nem lehet meghatározni a jelfeldolgozás előtt, ezért f_{mv} mintavételezési frekvencia megválasztása sem egyértelmű. Azonban minden berendezésnek van egy fizikai korlátja, aminél nagyobb sávszélességet nem bír el, így létezik lehetséges legnagyobb frekvencia is. A frekvencia mesterséges úton is korlátozható például alul-áteresztő szűrővel, melyet később részletesebben tárgyalunk.

A tétel bizonyos általánosítások esetében is igaz marad:

- A tételben a mintavételezés ideje $\delta t > 0$ időintervallum ($\delta > 0$). A tétel akkor is igaz, ha a mintavevő valós, véges idejű.
- Egy folyamatból eredő zaj is rákerülhet a jelre. Zajjal terhelt jel esetén is igaz a tétel, de ekkor már nem determinisztikus, hanem várható értékekre.
- A tétel igaz marad nem egyenértékű mintavételezés esetén is, vagyis ha nem azonos Δt időközönként mintavételezünk..

Összefoglalva a tételhez kapcsolódó alapfogalmak:

- B a határfrekvencia, vagy sávkorlát, amely a jel sajátossága.
- f_{mv} a mintavételi frekvencia, amely a berendezéshez és a méréshez tartozik.
- $\Delta t = \frac{1}{f_{mv}}$ két mintavételezés között eltelt idő.
- T [s] a megfigyelés hossza.
- $N = \frac{T}{\Delta t}$ a megfigyelt értékek száma.
- Δf a Fourier-transzformáció alapfrekvenciája, vagyis $\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_{mv}}{N}$. Tehát a frekvenciafelbontás, melyet csakis T határoz meg.

Az amplitúdó kvantálás hibája - Kvantálási tétel

Amint már említettük, az amplitúdó kvantálás során véges lépcsőket veszünk fel és azokon ábrázoljuk az amplitúdókat. Ekkor nyilván információt veszünk, a hiba mértékéről a kvantálási tétel ad információt.

Ha az eredeti $x(t)$ jel sűrűségfüggvénye sávkorlátozott, akkor a kvantált jel várható értéke megegyezik az eredeti jel várható értékével, vagyis a kvantálás torzítatlan becslés:

$$M(x_{kv}(t)) = M(x(t)) \quad (2)$$

A kvantált jel szórása és az eredeti jel szórása között a következő összefüggés áll fenn:

$$D^2(x_{kv}(t)) = D^2(x(t)) + \frac{q^2}{12}, \quad (3)$$

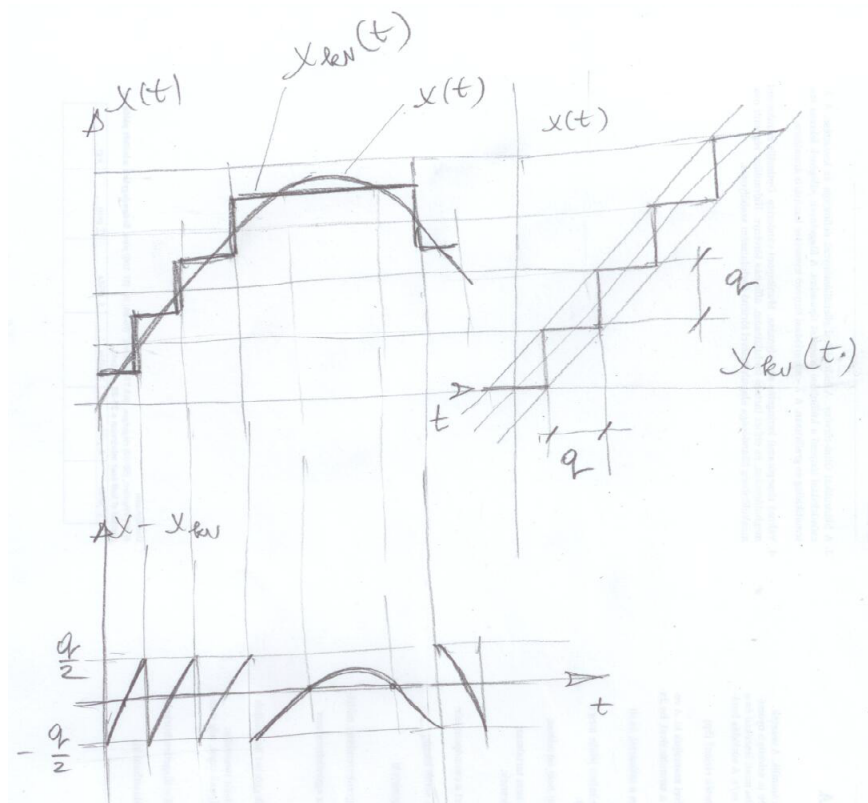
ahol q jelöli a lépcsők nagyságát. A $\frac{q^2}{12}$ tagot nevezzük *Shepard-féle korrekciós tagnak*. Tehát a hiba mértéke csakis q megválasztásától függ.

A szórás hibájának mértékét érzékeltetendő, tekintsük a következő példát. Tegyük fel, hogy az érzékelőnkrol egy 0 – 10 V-os jel jön le, és legyen egy szó 10 bit-es (régii számítógépről lévén szó). Ekkor a lépcsők száma

$$2^{10} \approx 1000, \quad (4)$$

és így

$$q = \frac{10V}{1000} = 10^{-2}V. \quad (5)$$



5. ábra. A kvantálás hibája

Ebből pedig a szórásnégyzet hibája

$$\frac{q^2}{12} = \frac{10^{-4}}{12} \approx 10^{-5} V^2. \quad (6)$$

Melynek gyöke

$$\sqrt{\frac{q^2}{12}} \approx \sqrt{10 \cdot 10^{-6}} \approx 3 \cdot 10^{-3} = 0,003V. \quad (7)$$

Vagyis a szórá becslésének hibája az esetek nagy többségében elhanyagolható, nem érdemes vele foglalkozni.

1.3. Kalibrálás

Az érzékelőről lejöő jel digitalizálása után az információ számsorozatként tárolódik a memóriában. Ahhoz, hogy ebből a számsorozatból visszkapjuk az általunk keresett fizikai mennyiséget, **kalibrációra** van szükség.

A kalibrációhoz szükségünk van egy ismert nagyságú jelre, *etalonra*, mely az adott fizikai mennyiség egységének megtestesítője ismert hibakorlással. Az egyszerű mennyiségeknek létezik etalonja (hosszúság, tömeg térfogat, stb.). Más mennyiségek etalonját származtatjuk (pl. hőmérséklet).

Ekkor a bemenő x jel az etalon, a kimenő η jel pedig az érzékelőről lejöő jel. A kalibráció feladata az x és η változók közötti összefüggés keresése. Általában a mérőeszközök olyanok, hogy ez a kapcsolat lineáris, vagyis a feladat egy *kalibrációs egyenes* meghatározása. Erre a statisztikai tanulmányaink során megismert legkisebb négyzetek módszerét szokás alkalmazni.

Ábrázoljuk a megfigyelt $[x_i, \eta_i]$ pontpárokat az $x - y$ koordináta-rendszerben. A módszer alkalmazásának feltétele, hogy az x változó determinisztikus legyen (tehát azt pontosan ismerjük, ne terhelje hiba), valamint az η változót normális eloszlású véletlen hiba terhelje, vagyis ne legyen rendszeres hibája. Ezekre a pontpárokra illesztünk $y = a_0 + a_1x$ egyenletű egyenest. Az együtt-hatókat úgy szeretnénk megválasztani, hogy $y(x_i)$ és η_i pontok közötti négyzetes távolságok összege minimális legyen:

$$D = \sum_{i=1}^n (\eta_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i))^2 \rightarrow \min! \quad (8)$$

Ahol α_0 és α_1 az a_0 és a_1 együtt-hatók becslése. Vegyük észre, hogy D értéke csakis α_0 és α_1 értékétől függ, tehát $D(\alpha_0, \alpha_1)$ kétváltozós függvény lokális minimumát keressük. Matematikából jól ismert, hogy lokális minimuma egy függvénynek ott lehet, ahol a parciális deriváltak zérus értéket vesznek fel. A számolás részletes ismertetése nélkül a kapott együtt-hatók:

$$\alpha_1 = \frac{\sum \eta_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (9)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 \bar{x} = \bar{\eta}, \quad (10)$$

ahol \bar{x} és $\bar{\eta}$ az átlagokat jelölik. Ekkor a Gauss-Markov tétel alapján α_0 és α_1 az a_0 és a_1 együtt-hatók torzítatlan becslései [8].

A kalibrálás nem örök életű, újra és újra el kell végezni, hiszen a berendezésünk az idő múlásával nem biztos, hogy mindig ugyanúgy működik. Tehát α_0 és α_1 nem állandó mennyiségek. A kalibrációs egyenesnek létezik egy elméleti értéke, ami körül a számított egyenesünk mozog. Ahhoz, hogy mondani tudjunk valamit a számításunk hibájáról, jó lenne egy sávot meghatározni az elméleti egyenes körül, ami tartalmazza a számított egyeneseket. A célunk tehát *konfidencia sáv* meghatározása a kalibrációs egyenes körül.

Először elevenítsük fel a konfidencia intervallumokról tanultakat [8]. A konfidencia intervallum olyan r sugarú környezet a mért mennyiségek átlagának, mely adott p valószínűséggel tartalmazza az átlag várható értékét. Vagyis, ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ a mért mennyiségeink, és átlaguk $\bar{\xi}$, akkor az r sugarú konfidenciaintervallum olyan, hogy

$$P(\bar{\xi} - r \leq M(\bar{\xi}) \leq \bar{\xi} + r) = p. \quad (11)$$

r a következőképpen számolható:

$$r = \frac{s^* \lambda_{st}}{\sqrt{N}}, \quad (12)$$

ahol $\lambda_{st} = \lambda_{st}(N, p)$.

A konfidencia sávot úgy kapjuk, hogy a kalibrációs egyenes minden pontja körül megadunk egy konfidencia intervallumot. A továbbiakban bemutatjuk, hogy hogyan is kell meghatározni ezt a sávot.

Legyen a legkisebb négyzetek módszerével meghatározott egyenes $Y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, ahol tudjuk, hogy $M(\alpha_0) = a_0$ és $M(\alpha_1) = a_1$. Ekkor Y várható értéke:

$$M(Y) = M(\alpha_0 + \alpha_1 x) = M(\alpha_0) + M(\alpha_1)x = a_0 + a_1 x. \quad (13)$$

Tehát Y torzítatlan becslése a kalibrációs egyenesnek. Y szórása, felhasználva a (10)-es egyenletet:

$$D^2(Y) = D^2(\alpha_0 + \alpha_1 x) = D^2(\bar{\eta} - \alpha_1 \bar{x} + \alpha_1 x) = D^2(\bar{\eta} + \alpha_1(x - \bar{x})). \quad (14)$$

Mivel $\bar{\eta}$ és α_1 egymástól független változók:

$$D^2(\bar{\eta} + \alpha_1(x - \bar{x})) = D^2(\bar{\eta}) + D^2(\alpha_1(x - \bar{x})). \quad (15)$$

Az átlag szórásnégyzete számolható az eredeti szórásnégyzetből, valamint a szórásnégyzetből a konstansok négyzetesen kiemelhetők:

$$D^2(\bar{\eta}) + D^2(\alpha_1(x - \bar{x})) = \frac{\sigma^2}{N} + (x - \bar{x})^2 D^2(\alpha_1) \quad (16)$$

$D^2(\alpha_1)$ a (9)-es egyenlet alapján:

$$D^2(\alpha_1) = D^2\left(\frac{\sum \eta_i(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 D^2(\eta_i)}{[\sum (x_i - \bar{x})^2]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (17)$$

Itt a második egyenlőség azért igaz, mert az x_i mennyiségek hibamentesek, azokat pontosan ismerjük a kalibráció során. Ezzel a kalibrációs egyenes szórásnégyzete:

$$D^2(Y) = \frac{\sigma^2}{N} + (x - \bar{x})^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}. \quad (18)$$

Ebből a szórás:

$$D(Y) = \sigma \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (19)$$

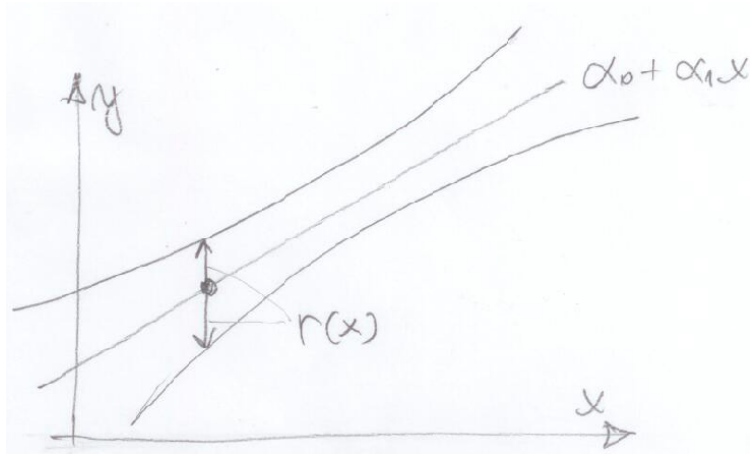
Ezzel a konfidenciasáv sugara a kalibrációs egyenes egy adott x pontja körül:

$$r(x) = \lambda_{st} \sigma \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (20)$$

Tehát összefoglalva, a konfidencia sáv az $Y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ egyenes körül egy olyan sáv mely egy adott \tilde{x} pontban az $Y(\tilde{x})$ pont fölött és alatt $r(\tilde{x})$ távolságra van, és az $a_0 + a_1 x$ egyenes p valószínűséggel ebben a sávban helyezkedik el. Gondoljuk meg, hogy amikor $x = \bar{x}$ akkor a sáv a legszűkebb, hiszen sugara $r(\bar{x}) = \lambda_{st} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Ha pedig \bar{x} -től távolodunk, akkor az $r(x)$ sugár nő.

A konfidenciasáv kiszámításának lépései

1. Az $[x_i, \eta_i]_{i=1}^N$ adott mérési sorozat \bar{x} és $\bar{\eta}$ átlagainak kiszámítása, valamint az α_0 és α_1 együtthatók meghatározása a (10) és (9) képletek segítségével.
2. A maradék szórás kiszámítása: $s^{*2} = \frac{1}{N-2} \sum_{j=1}^N (\eta_j - \alpha_0 - \alpha_1 x_j)^2$. Ekkor a (20)-as képletben szereplő σ s^* -gal közelíthető.
3. p valószínűségi szint megválasztása (általában $p = 0,95$).



6. ábra. A konfidenciasáv meghatározása.

4. p és N ismeretében λ_{st} meghatározható. Figyelem, Excel-ben λ_{st} $N - 1$ és $1 - p$ értékekkel számolandó.
5. A mérési tartományban x értékekhez $r(x)$ sugár számolható a (20)-as képlettel. Ekkor az alsó és felső határok (diszkrét pontokban):
 - alsó határ: $\alpha_0 + \alpha_1 x - r(x)$
 - felső határ: $\alpha_0 + \alpha_1 x + r(x)$

A konfidenciasáv használata

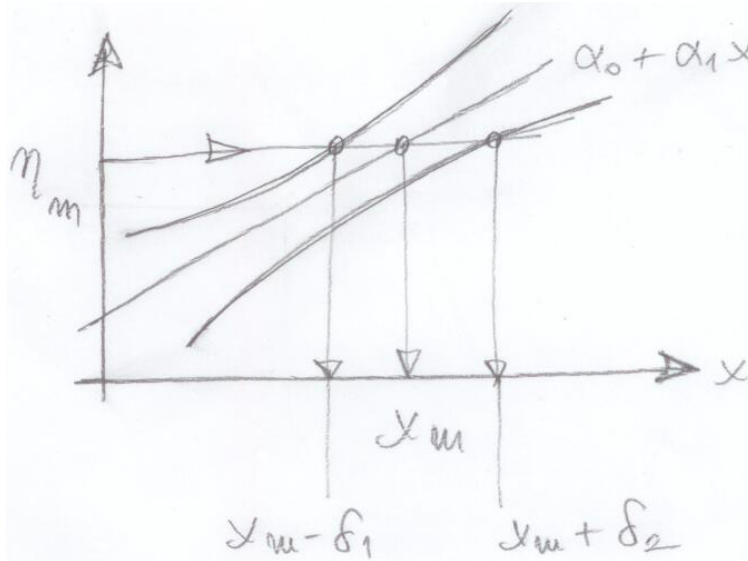
Mérés során a hibával terhelt η_m -et tudjuk, ehhez szeretnénk x_m -et és hibakorlátot meghatározni. Tehát éppen fordítva kell eljárunk. Általában a konfidenciasáv felső határára egy másodfokú görbét illesztve, a görbe egyenletéből η_m ismeretében x_m kifejezhető. A mérési gyakorlaton használt műszerek-eszközök "jó" berendezések, ezért a gyakorlaton számolt konfidencia sáv szűk lehet. Ábrázoláshoz lehet pl. λ_{st} -t növelni (p valószínűség növelésével) vagy a diagramunkat felnagyítani.

Megjegyezzük, hogy ha az α_0 és α_1 együtthatókkal meghatározott egyenes meredeksége kicsi (vagyis az egyenes lapos), akkor kicsi η változásokhoz nagy x értékbeli változás tartozik, így pontos mérés esetén is lehet az eredmény pontatlan. A meredekséget szokás az elektronikában *erősítésnek* nevezni.

2. Fourier-sor, Fourier-transzformáció, spektrum

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az $x(t)$ jel Fourier-sorba fejthető, ha

- periodikus T periódusidővel
- T -n létezik a Riemann integrálja, vagyis $\int_T x(t) dt < \infty$.



7. ábra. A konfidenciasáv használata.

Ekkor $x(t)$ **Fourier-sora**:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \quad (21)$$

ahol $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ a **körfrekvencia** és $f_0 = \frac{1}{T}$ a **frekvencia**. Az együtthatók a következő integrálokkal adhatók meg:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (22)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (23)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (24)$$

A Fourier-sor komplex alakja - Fourier transzformáció

A komplex számsíkon az exponenciális függvény és a trigonometrikus függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$e^{ik\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + i \sin(k\omega_0 t), \quad (25)$$

$$e^{-ik\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) - i \sin(k\omega_0 t). \quad (26)$$

Ez az úgynevezett Euler-féle összefüggés. Ezekből $\cos(k\omega_0 t)$ -t és $\sin(k\omega_0 t)$ -t kifejezve, majd (21)-be beírva kapjuk:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \quad (27)$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k). \quad (28)$$

Habár (27) komplex kifejezés, az összegzés során az imaginárius tagoknak ki kell esniük, hiszen $x(t)$ valós jel. Megjegyezzük továbbá, hogy a fenti végtelen sor pusztán formális kifejezés, amely nagy mértékben megkönnyíti a számolásokat, viszont semmiféle fizikai tartalma nincsen.

A Fourier-transzformáció bevezetéséhez további átalakításokat kell végeznünk. A c_k együttható a_k és b_k együtthatók definícióját felhasználva a következő alakba írható:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - i \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt. \quad (29)$$

Amely az Euler-formulát felhasználva:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad (30)$$

Ha az $x(t)$ függvény nem periodikus, hanem $T \rightarrow \infty$, ekkor $\Delta\omega := \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$. Tegyük fel továbbá, hogy az $\omega := k\omega_0$ szorzat véges. A fenti jelölések mellett (27) a következő alakban írható:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (31)$$

Innen az $x(t)$ jel **Fourier-transzformáltja**:

$$F(\omega) = \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (32)$$

Felhasználva, hogy $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$, (31) így írható:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(\omega) \Delta\omega, \quad (33)$$

Melyből $T \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk az $x(t)$ jel **inverz Fourier-transzformáltját**:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega, \quad (34)$$

A Fourier transzformált komplex értékű függvény, tehát egy ω helyen $F(\omega) = a(\omega) + b(\omega)i = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$, ahol a és b valós értékű függvények, $\varphi(\omega)$ az $F(\omega)$ komplex szám fázisa (szöge). Az $x(t)$ jel amplitúdó- és fázis-spektruma megkapható $F(\omega)$ hosszából és fázisából:

- $|F(\omega)|$ az amplitúdó spektrum,
- $\varphi(\omega)$ a fázis-spektrum.

Periodikus összetevőkből álló $x(t)$ jelek amplitúdó-spektruma vonalas spektrum. Tekintsük például az $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$ függvény egy periódusát. Ha a megfigyelt jel nem periodikus, például valamilyen zaj terheli, akkor az amplitúdó-spektrum ω -ban már folytonos spektrum lesz. Fizikai jelenségek többségénél a spektrum egy idő után azonosan 0. Emlékezzünk vissza, hogy ez épp azt jelenti, hogy a jelünk sávkorlátozott. A mért jelek általában determinisztikus részből és zajból állnak össze. Ha a jel spektruma olyan, hogy a periodikus komponensek és a zaj szétválhatnak, akkor szűrővel eltávolítható a zaj (lásd 4. fejezet).

2.1. Periodikus jelek feldolgozása

Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Tekintsük az $x(t)$ jelet, melyet f_{mv} mintavételezési frekvenciával, $\Delta t = 1/f_{mv}$ időközönként mintavételezzük. Legyen a megfigyelés hossza T és a megfigyelési időpontok $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t = t_k$. Tegyük fel, hogy páratlan számú, azaz $2n - 1$ darab megfigyelésünk van (ez azért fontos, hogy a megfigyeléseket meg lehessen felezni). A Fourier sorba fejtés alapfrekvenciája (frekvenciafelbontása) legyen $\Delta f = 1/T$, és a j . frekvencia $f_j = j\Delta f$.

A fenti jelölések mellett a digitalizált Fourier-transzformált integrál-közelítő összege:

$$F(f_j) = F_j \simeq \sum_{k=0}^{2n-1} x(k\Delta t) e^{-i2\pi f_j t_k} \Delta t, \quad (35)$$

Alakítsuk át a kitevőben lévő kifejezést:

$$i2\pi f_j t_k = i2\pi j \Delta f k \Delta t = i2\pi j \frac{1}{T} k \frac{T}{2n} = \frac{i\pi}{n} jk.$$

Legyen továbbá

$$W = e^{-\frac{i\pi}{n}} \quad \text{és} \quad x(k\Delta t) = x_k.$$

Ezzel diszkrét Fourier-transzformált:

$$F_j \simeq \Delta t \sum_{k=0}^{2n-1} x_k W^{jk}, \quad (36)$$

W előnye, hogy nem függ a jeltől, és értékei egy főátlójára szimmetrikus mátrixba írhatók.

j \ k	0	1	2	3	...
0	1	1	1	1	...
1	1	W	W^2	W^3	...
2	1	W^2	W^4	W^6	...
3	1	W^3	W^6	W^9	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

1. táblázat. A $W = e^{-\frac{i\pi}{n}}$ hatványainak mátrixa.

W hatványinak tulajdonságai:

1. $W^{-n} = e^{\frac{i\pi}{n}n} = e^{i\pi} = -1$,
2. $(W^{-n})^{2k} = 1$,
3. ha $j > n$ (vagyis a félfrekvencia feletti értékekre), akkor $W^{j-n} = W^j W^{-n} = -W^j$,
4. $W^{2k(j-n)} = W^{2kj-2kn} = W^{2kj}$.

Mennyi a diszkrét Fourier-transzformált előállításának műveletigénye? Egy darab F_j kiszámításához, $2n$ szorzásra majd $2n - 1$ összeadásra, végül még egy szorzásra van szükség. Ez összesen $2n + 2n - 1 + 1 = 4n$ darab művelet. Összesen $2n$ darab F_j van, így a DFT műveletigénye $2n * 4n = 8n^2$.

Gyors Fourier-transzformáció (FFT)

W hatványainak tulajdonságaiból már jól látszik, hogy a Fourier-transzformálthoz nem szükséges minden együtthatót kiszámolni, hiszen sok megegyezik. A gyors Fourier-transzformált ötlete abban rejlik, hogy az együtthatókat csak a fél frekvenciáig számoljuk ki, utána felhasználjuk az előzőeket, ezzel lényegesen lecsökkentve a műveletigényt.

Válasszuk külön a páros és páratlan számú megfigyeléseket. A páros megfigyeléseket jelölje $x_k'' = x_{2k}$, a páratlanokat pedig $x_k' = x_{2k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Ekkor a páros tagokra a diszkrét Fourier-transzformált:

$$F_j'' = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} x_k'' W^{2jk}. \quad (37)$$

A páratlan tagoké, felhasználva, hogy $W^{j(2k+1)} = W^j W^{2kj}$:

$$F_j'^* = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} x_k' W^{j(2k+1)} = \Delta t W^j \sum_{k=0}^{n-1} x_k' W^{2kj}. \quad (38)$$

Legyen

$$F_j' = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} x_k' W^{2kj}, \quad (39)$$

Ezzel (36) így írható:

$$F(f_j) = F_j'' + W^j F_j', \quad (40)$$

Gondoljuk meg, hogy ha $j > n$, vagyis a fél frekvencia feletti tagokra a következők igazak:

- $F_j'' = F_{j-n}''$, W 4. tulajdonsága miatt,
- $F_j'^* = -F_{j-n}'^*$, W 3. tulajdonsága miatt.

Ezekből pedig rögtön következik, hogy $j > n$ -re

$$F_{j-n} = F_j'' - W^j F_j', \quad (41)$$

valamint az együtthatókat elég n -ig kiszámolni, majd onnantól azokat újra fel lehet használni.

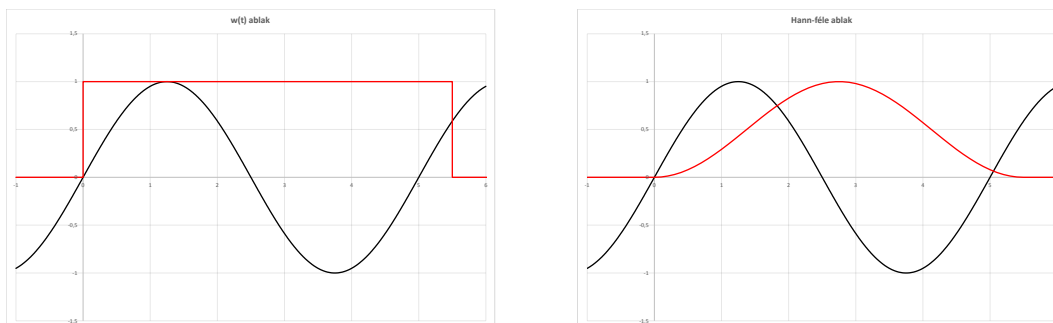
A gyors Fourier-transzformált esetén egy F_j' és F_j'' kiszámításához $2n + (2n - 1) + 1 = 4n$ darab művelet szükséges, majd $F(f_j)$ -hez még egy darab szorzásra és egy darab összeadásra, ez összesen $4n + 2$ művelet. Ezeket a műveleteket elég $j < n$ -ig kiszámítani, vagyis a félfrekvenciáig $n(4n+2) = 4n^2 + 2n$ műveletre van szükség. A félfrekvencián túl már fel lehet használni a korábban meghatározott F_j' és F_j'' értékeket, így csak egy szorzást és egy kivonást kell elvégezni, ami a maradék n darab $F(f_j)$ -re $2n$ művelet. Ezzel az összes elvégzendő műveletek száma $4n^2 + 2n + 2n = 4n^2 + 4n$.

Látható, hogy a FFT esetében a műveletigény lényegesen lecsökkent a DFT-hez képest. Sőt, további felezésekkel a műveletigény tovább csökkenthető, ezért is érdemes 2^N elemű mintavételezést csinálni. Megjegyezzük, hogy az Excel éppen ezért tudja csak egy 2^n elemű számsor Fourier-transzformáltját kiszámítani.

Ablakozás

A gyakorlatban legtöbbször a megfigyelt $x(t)$ jel nem periodikus, és $-\infty < t < \infty$ is lehet. Sőt a mérésünk biztosan véges idejű. Már említettük, hogy az a szokás, hogy a T ideig megfigyelt jelet többször egymás mellé téve szokás periodikussá tenni azt. Ezzel viszont az a probléma, hogy a kT időpontokban a jel szakadásos lehet. Ennek a problémának a kezelésére szokás úgynevezett **ablakozást** alkalmazni. Ekkor egy adott $w(t)$ függvénnyel szorozzuk meg az $x(t)$ megfigyelt jelünket és azt vizsgáljuk. A $w(t)$ függvény olyan, hogy a mérési tartományunkon kívül mindenütt 0 (8. ábra, bal oldal, piros görbe). A legegyszerűbb ilyen ablak:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in [0, T] \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$



8. ábra. Bal oldalon a $w(t)$ ablak, jobb oldalon a Hann-féle ablak látható.

Amikor $x(0) \neq x(T)$, ezzel a $w(t)$ függvénnyel vett szorzat nem segít. A Hann-féle ablak mesterségesen elnyomja ezt a szakadást (8. ábra, jobb oldal, piros görbe.):

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi}{T}t)) & \text{ha } t \in [0, T] \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

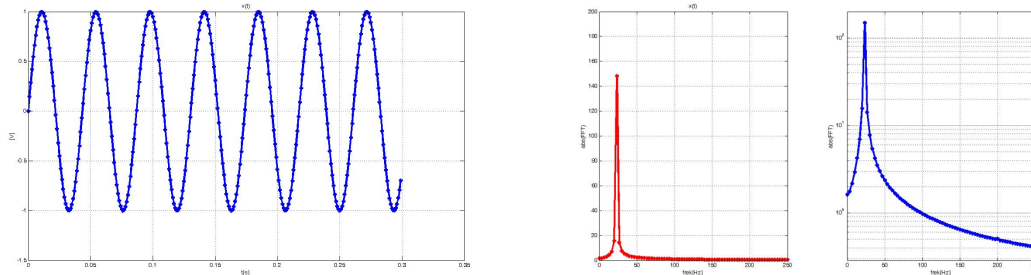
Számos más ablak is ismeretes, lásd pl. [1] és [3] javasolt irodalomban, ahol megtalálhatók az ablakok konstrukciójának és alkalmazásának szempontjai is. Nem szabad elfelejteni, hogy ablak alkalmazásával nem az $x(t)$ jel, hanem az $x(t) \cdot w(t)$ szorzat Fourier transzformáltját képezzük, ennek hatásairól is az említett irodalmakból lehet tájékozódni. Ugyanez a helyzet, ha véges T hosszúságú jel Fourier transzformáltját képezzük, ekkor "derékszögű" ablakkal vágtuk ki a jelet.

A következő példa mutatja az ablaktechnika hatásosságát. Legyen a vizsgálandó jel:

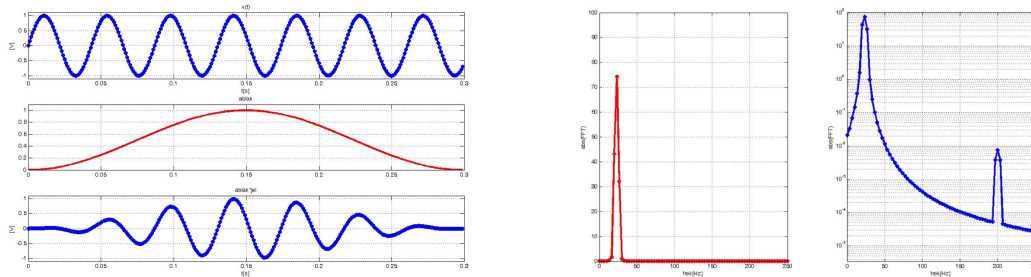
$$x(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t) + a_3 \sin(2\pi f_3 t)$$

A választott paraméterek: $a_1 = 1$ [V]; $a_3 = 0.0001$ [V]; $f_1 = 23$ [Hz]; $f_3 = 200$ [Hz]; $f_{mv} = 1000$ [Hz]; $T = 0.3$ [s]. Vagyis az első "szinusz"-ra rakódó második jelrész frekvenciája egy nagyságrenddel

nagyobb, mint az első jelerész frekvenciája, és amplitúdója négy nagyságrenddel kisebb. A jel grafikonja a 9. ábra bal oldalán látható, ez a derékszögű ablakkal kivágott jel. A Hann ablakkal kivágott jel látható 10. ábra bal oldalán. A derékszögű ablakkal kivágott jel spektrumában nem ismerhető fel a második komponens (9. ábra jobb, oldal), de a Hann ablak alkalmazása megmutatja ezt is (10. ábra, jobb oldal) .



9. ábra. Derékszögű ablakkal kivágott jel és spektruma.



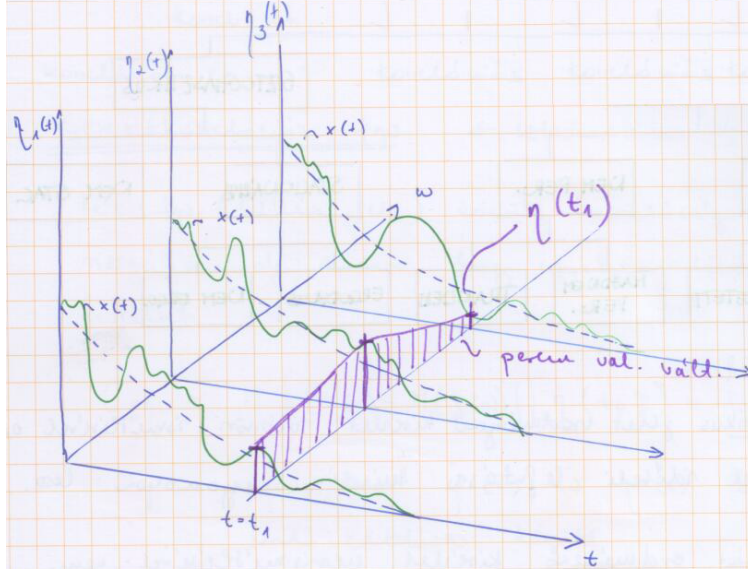
10. ábra. Hann ablakkal kivágott jel és spektruma.

3. Stacionárius jelek kezelése

Az időben lezajló folyamat mindig egy determinisztikus részből és egy torzító zajból tevődik össze, melyeket nem lehet megkülönböztetni. A zaj egyrészt adódhat a folyamatból (pl. áramlástan folyamatoknál örvények válhatnak le, turbulens áramlás alakulhat ki), vagy a műszerek elektronikájából. Az időben megfigyelt $\eta(t)$ jel tehát áll egy $x(t)$ a determinisztikus jelből, és egy $\varepsilon(t)$ a zajból:

$$\eta(t) = x(t) + \varepsilon(t). \quad (42)$$

$\eta(t)$ maga is valószínűségi változó, ami nem csak a véletlentől, de az időtől is függ, $\varepsilon(t)$ zaj normális eloszlású. Így tehát a folyamatot többször megmérve nem mindig ugyanazt az eredményt kapjuk, hanem különböző η_1, η_2, \dots méréseket, melyek mind ugyanabból az $x(t)$ determinisztikus jelből és egy $\varepsilon(t)$ zajból állnak, és a **folyamat realizációjának** nevezzük őket.



11. ábra.

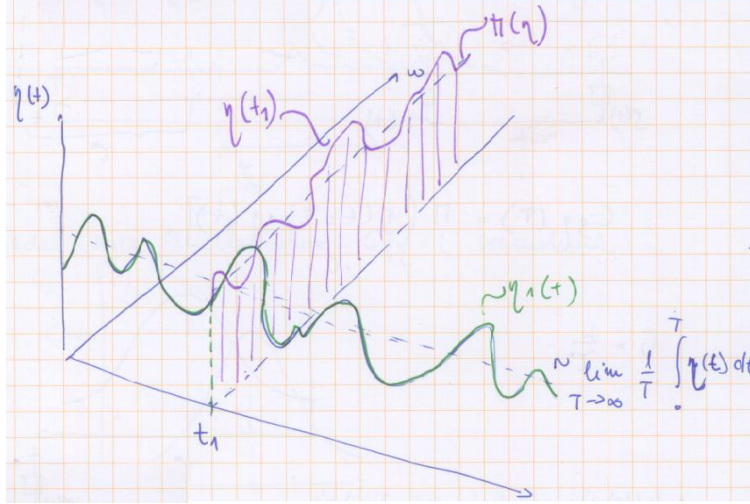
Tekintsünk most egy t_1 időpontban vett keresztirányú metszetet. Legyen az ekkor megfigyelt értékek vektora $\eta(t_1) = [\eta_1(t_1), \eta_2(t_1), \dots, \eta_m(t_1)]$, $\eta(t_1)$ -et **perem valószínűségi változónak** nevezzük. $\eta(t_1)$ sűrűségfüggvénye szintén időfüggő: $f(z, t_1)$, amely valójában $f(z, t)$, ennek kezelése igen bonyolult és nehéz, ezért két fontos egyszerűsítést teszünk:

1. Legyen a folyamat **stacionárius**. A stacionaritás azt jelenti, hogy a jel statisztikai jellemzői (legalább a várható értéke és a szórása) időben ne változzanak. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy maga a jel időtől független (a stacionaritás elvi ellenőrzése nehéz feladat, lásd a 2. pont utáni megjegyzést). A stacionaritáshoz szükséges, hogy a jel determinisztikus része ne legyen időfüggő. Ha azt látjuk, hogy $x(t)$ időfüggő, akkor ennek becslését vonjuk ki a jeltől: Például legyen $x(t)$ -re a becslésünk $\tilde{x}(t)$ és $\eta^*(t) = \eta(t) - \tilde{x}(t)$, ekkor ha jó a becslésünk $M(\eta^*(t)) = 0$ kell legyen.
2. Legyen a folyamat **ergodikus**, vagyis feltesszük, hogy az idő irányú változásból megkapható a keresztirányú változás. Ekkor egyetlen realizáció is elegendő. Ha egy folyamat ergodikus, akkor stacionárius, és a várható értékére fennáll:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt. \quad (43)$$

Vagyis a sokaság átlaga megegyezik az időátlaggal.

A stacionaritás és ergodicitás ellenőrzése nehéz feladat, sokszor nem is tudjuk elvégezni. Ha a jelet "elegendően" hosszú T ideig meg tudjuk figyelni, akkor szeletekre vágthatjuk. A szeletek egymástól független megfigyeléseknek tekinthetők, így az átlag és a tapasztalati szórás állandósága statisztikai módszerekkel (pl. próbákkal) vizsgálható.



12. ábra.

Várható érték becslése ergodik folyamatok esetében

Egyenközű mintavételezés esetén $T = n\Delta t$, ekkor az $\eta(t)$ ergodik folyamat várható értékének becslése:

$$M(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \simeq \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta t. \quad (44)$$

Ebből pedig

$$M(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i. \quad (45)$$

Vagyis a várható érték az átlaggal becsülhető.

A sűrűségfüggvény becslése ergodik folyamatok esetében

Mivel az $\varepsilon(t)$ zaj feltehető, hogy normális eloszlású, ezért, ha $\tilde{x}(t)$ jó becslés, akkor $\eta^*(t)$ is normális eloszlású kell legyen.

Tekintsünk egy $\eta(t)$ realizációt. Becsüljük meg a sűrűségfüggvényét! Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a változó intervallumba esésének valószínűsége becsülhető a sűrűségfüggvény és az intervallum hosszának szorzatából. Vagyis, ha $f(z)$ -vel jelöljük a sűrűségfüggvényt, akkor

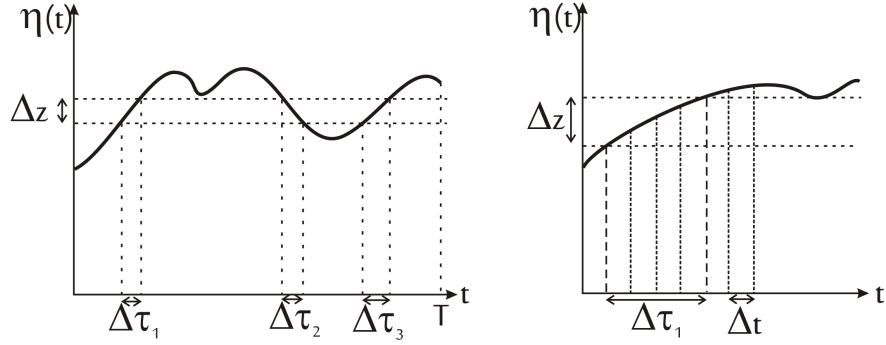
$$f(z)\Delta z \simeq P(\eta \in \Delta z).$$

Mivel a valószínűség becsülhető a relatív gyakorisággal, ezért

$$f(z)\Delta z \simeq \sum \frac{\Delta \tau_i}{T}, \quad \text{ahol } \eta(\Delta \tau_i) \in \Delta z.$$

Δt egyenközű mintavételezés esetén $\Delta \tau_i = k_i \Delta t$, ezzel

$$f(z)\Delta z \simeq \sum \frac{\Delta \tau_i}{T} = \frac{\Delta t(k_1 + k_2 + \dots)}{T} = \frac{\Delta t(k_1 + k_2 + \dots)}{n\Delta t} = \frac{\nu}{n},$$



13. ábra.

ahol $\nu = k_1 + k_2 + \dots$ a Δz intervallumba esés gyakorisága. Tehát

$$f(z) \simeq \frac{\nu}{n\Delta z}. \quad (46)$$

$f(z)$ neve **amplitúdó sűrűségfüggvény**, hiszen az amplitúdókból hoztuk létre.

Példa: A jobb megértés érdekében tekintsük az $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ függvényt, ahol $f_0 = 1/T$ a frekvencia, és számítsuk ki az amplitúdó sűrűségfüggvényét:

$$f(x)\Delta x = \frac{\sum \tau_i}{T} = \frac{2\Delta t}{T} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{T} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ és $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel

$$f(x) = \frac{2}{T} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Számítsuk ki $\frac{dx}{dt}$ deriváltat:

$$\frac{dx}{dt} = A2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t).$$

Kihasználva, hogy $\sin^2(2\pi f_0 t) + \cos^2(2\pi f_0 t) = 1$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{1 - \sin^2(2\pi f_0 t)}.$$

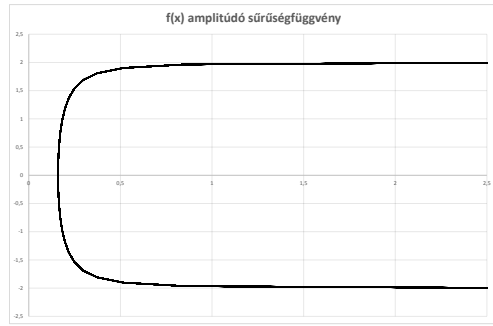
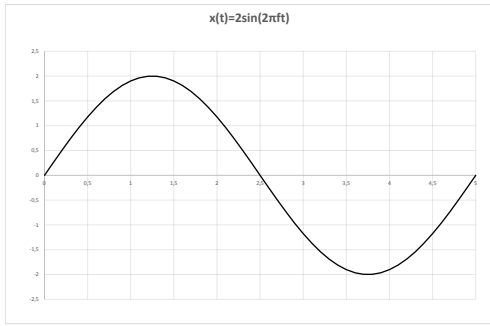
És ezzel

$$\frac{dx}{dt} = A2\pi f_0 \sqrt{1 - \sin^2(2\pi f_0 t)} = A2\pi f_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = 2\pi f_0 \sqrt{A^2 - x^2}.$$

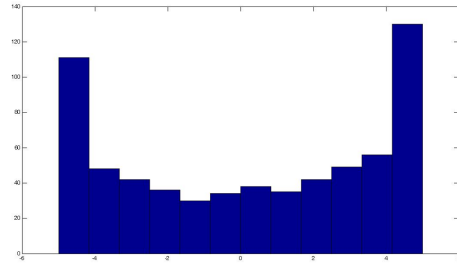
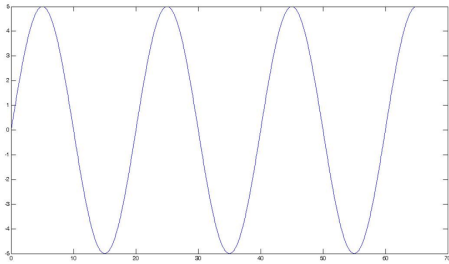
Tehát a keresett sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{2}{T} \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}.$$

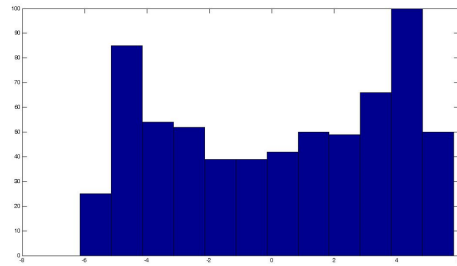
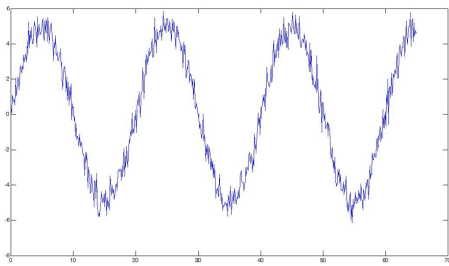
Ha a jel még valamilyen normális eloszlású zaj is terheli, akkor az összeg sűrűségfüggvénye általában egy "két púpú" sűrűségfüggvény. Tehát a mért jel sűrűségfüggvényének alakjából lehet következtetni a determinisztikus jelre.



14. ábra. Az $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ és $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$ amplitúdó sűrűségfüggvénye

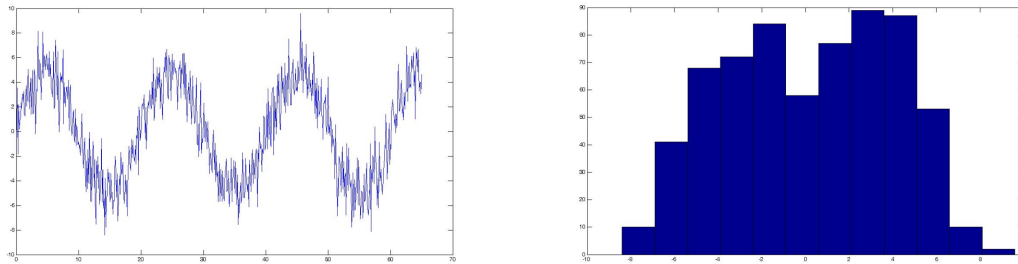


15. ábra. A szinusz függvény zaj nélkül és amplitúdó sűrűségfüggvénye

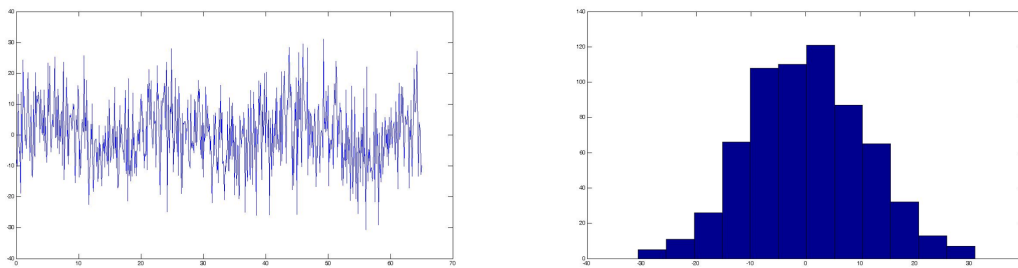


16. ábra. A szinusz függvény zajjal és amplitúdó sűrűségfüggvénye

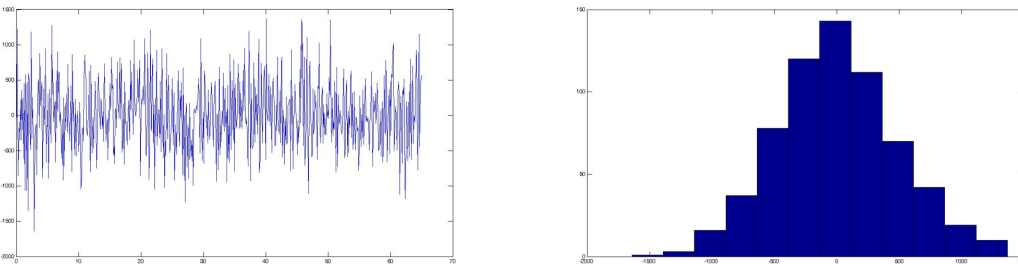
Példa: Tekintsük a $x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \varepsilon(t)$ függvényt, ahol $\varepsilon(t)$ véletlen zaj. A 15.-19 ábrák mutatják, hogy hogyan változik $x(t)$ amplitúdó sűrűségfüggvénye a zaj mértékét növelve. Jól megfigyelhető, hogy minél nagyobb a zaj mértéke, az eredeti szinuszos jel annál kevésbé vehető ki a bal oldali ábrákon, valamint az amplitúdó sűrűségfüggvény egyre jobban hasonlít egy normális eloszlású változó sűrűségfüggvényéhez.



17. ábra. A sinusz függvény zajjal és amplitúdó sűrűségfüggvénye



18. ábra. A sinusz függvény zajjal és amplitúdó sűrűségfüggvénye



19. ábra. A sinusz függvény zajjal és amplitúdó sűrűségfüggvénye

Autokorreláció és keresztkorreláció ergodikus jelek esetében

Emlékeztető: A ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója:

$$\rho^2(\xi, \eta) = \frac{M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)])}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad (47)$$

amely azt mondja meg, hogy van-e a két változó között lineáris kapcsolat. A fenti képlet számlálójában levő kifejezés a kovariancia.

Legyen most $\xi(t)$ és $\eta(t)$ ergodik folyamatok, és $M(\xi) = M(\eta) = 0$. Ekkor a **keresztkorrelációs függvényük**:

$$C_{\xi,\eta}(\tau) = \int_0^{+\infty} \xi(t)\eta(t+\tau)dt. \quad (48)$$

Bizonyítható, hogy ergodik folyamatok esetében a keresztkorrelációs függvény csakis az eltolástól függ.

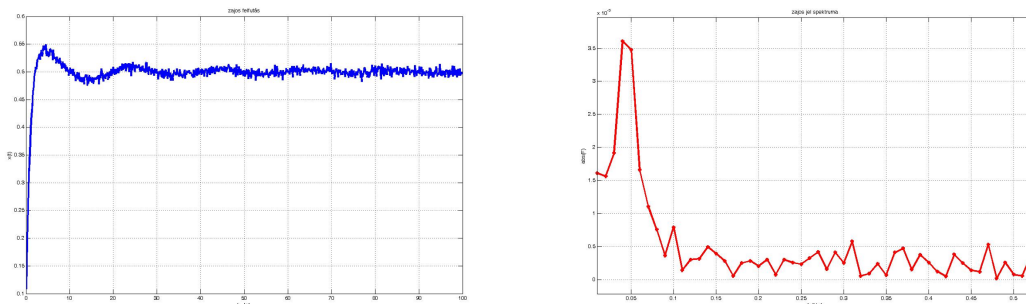
A függvényt a gyakorlatban tipikusan csőben áramló szemcsék sebességének megállapítására használják. Tekintsünk egy csövet melyben nagy sebességű levegő áramlik, és szórjunk bele valamilyen szemcséket. Kérdés, hogy mennyi idő alatt jutnak el a szemcsék a cső 1-es pontjából a 2-esbe, melyek L távolságra helyezkednek el egymástól. Tegyük egy-egy induktív érzékelőt az 1-es és 2-es pontokba, melyeknek feszültségjele legyen rendre $\xi(t)$ és $\eta(t)$. Ahol $C_{\xi,\eta}(\tau)$ maximális, legyen ez $C_{\xi,\eta}(\tau^*)$, az lesz az L távolság megtételéhez szükséges idő.

Ha a keresztkorrelációs függvényt nem kettő, hanem egy változóra írjuk fel, akkor kapjuk az **autokorrelációs függvényt**:

$$C_{\xi,\xi}(\tau) = \int_0^{+\infty} \xi(t)\xi(t+\tau)dt. \quad (49)$$

Az autokorrelációs függvény periodikusnak tűnő függvények periódusidejének meghatározására való.

Példa: Legyen $x(t)$ egy másodrendű mérőrendszer válasza ugrásfüggvény bemenetre. Keressük a sajátlengés frekvenciáját.



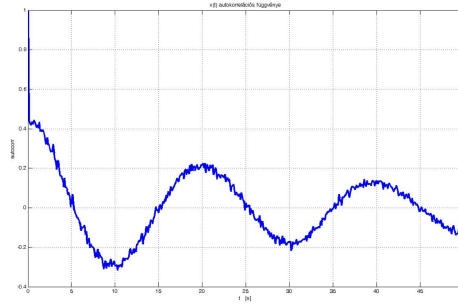
20. ábra. $x(t)$ függvény és spektruma.

Az autokorrelációs függvény első maximuma a $T = 20$ [s] helyen van, vagyis a sajátfrekvencia $f = 1/T = 0,05$ [Hz].

4. Szűrés (gépész hallgatóknak)

A következőkben arról lesz szó, hogy hogyan lehet kezelni az eltárolt zajos jelet.

Szűrés során egy bemenő $x(t)$ jelet (*gerjesztést*) egy F filter kimenő (*válasz*) $y(t)$ jelle alakít. A filter vagy egy adott frekvenciatartományból a nagy frekvenciás részeket, vagy egy adott frekvenciasávot tart meg vagy szűr ki. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan viselkedhet egy szűrő, honnan tudhatjuk, hogy egy adott válaszból milyen gerjesztésre lehet következtetni.



21. ábra. Az autokorrelációs függvény

Szűrővizsgálat

Legyen F szűrő és tegyük fel, hogy egy speciális $x_0(t)$ gerjesztésre ismerjük az $y_0(t)$ válaszát. Ekkor tetszőleges $x(t)$ bemenő jel esetén ki szeretnénk tudni számítani az $y(t)$ kimenő jelet. A speciális jel lehet az ugrás függvény vagy a Dirac delta. Vizsgáljuk meg mi történik a Dirac delta bemenő jel esetén.

Emlékeztető: a $\delta(t)$ **Dirac delta** függvényt úgy kapjuk, hogy vesszük az origóba helyezett $\Delta(t)$ szélességű 1 területű téglalapot, ekkor a téglalap magassága $\delta(t, \Delta(t))$. Ha $\Delta(t) \rightarrow 0$, akkor $\delta(t) \rightarrow +\infty$. Ha az origót a t_0 pontba toljuk, akkor $\delta(t - t_0)$.

Tegyük fel, hogy az F szűrő lineáris és invariáns, vagyis

- gerjesztések lineáris kombinációjára a válaszfüggvény, a válaszok lineáris kombinációja.
- a jellemzők időben nem változnak.

Tegyük fel továbbá, hogy ismerjük F válaszát a $\delta(t)$ gerjesztésre, legyen ez $w(t)$, és $\delta(t - t_0)$ -ra a válasz $w(t - t_0)$. Ekkor más tetszőleges $x(t)$ bemenő jelre a válasz a következőképpen számolható. Egyetlen impulzusra a válasz

$$x(\tau_k)\Delta\tau w(t - \tau_k),$$

ez az összesre összeadódik:

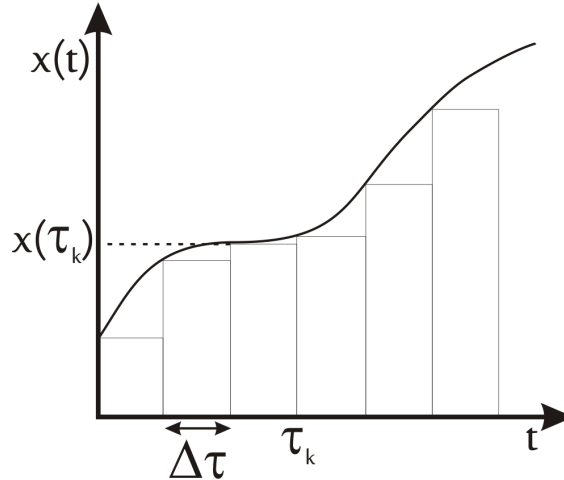
$$y(t) \simeq \sum_{k=0}^n x(\tau_k)w(t - \tau_k)\Delta\tau.$$

$\Delta\tau \rightarrow 0$ határátmenettel:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau)w(t - \tau)d\tau. \quad (50)$$

$y(t)$ ekkor az $x(t)$ és $w(t)$ függvények **konvolúciója**, melyet *-gal szokás jelölni: $y(t) = x(t) * w(t)$. Tehát $x(t)$ és $w(t)$ ismeretében $y(t)$ számolható. Igaz a következő állítás is, melyet nem bizonyítunk. Legyen

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= F(y(t)) \\ X(\omega) &= F(x(t)) \\ W(\omega) &= F(w(t)) \end{aligned}$$

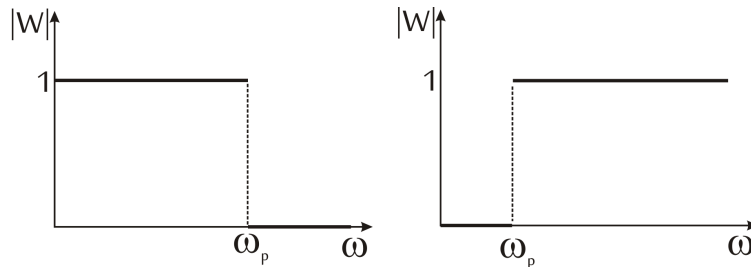


22. ábra.

Ekkor ha $y(t) = x(t) * w(t)$, akkor $Y = XW$. Vagyis ha $y(t)$ előáll az $x(t)$ és $w(t)$ függvények konvolúciójaként, akkor $y(t)$ Fourier-transzformáltja előáll az $x(t)$ és $w(t)$ Fourier-transzformáltjainak szorzataként.

ω ismeretében négyféle szűrőt különböztetünk meg.

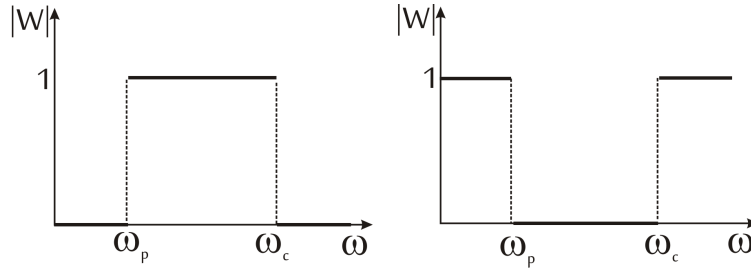
- Aluláteresztő szűrő
- Feluláteresztő szűrő
- Sáváteresztő szűrő
- Sávkizáró szűrő



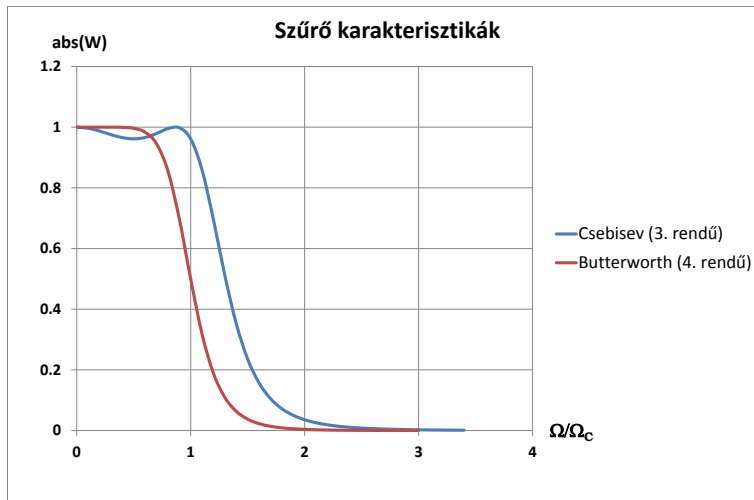
23. ábra. Bal oldalon az aluláteresztő szűrő, jobb oldalon a feluláteresztő szűrő jelleggörbéje látható.

Ezek elméleti jellegörbét az 23-24. ábrák mutatják. A megvalósításhoz tekintsük pl. az aluláteresztő szűrőt. A 0 és ω_p közötti frekvenciatartományt átereszt, majd megjelenik egy átmeneti tartomány, amíg el nem érünk a ω_c frekvenciához melyen túl már a vágási tartomány van.

Megjegyezzük, hogy szűrés csak akkor alkalmazható, ha a determinisztikus és zajos jel frekvenciakomponensei különválnak. Ha nem így van, akkor a vágás során nem lehetünk biztosak abban,



24. ábra. Bal oldalon az sáváteresztő szűrő, jobb oldalon a sávki záró szűrő jelleggörbéje látható.



25. ábra. Az átmeneti tartomány bemutatása a Csebisev (kék), és a Butterworth (piros) karakterisztikák esetén.

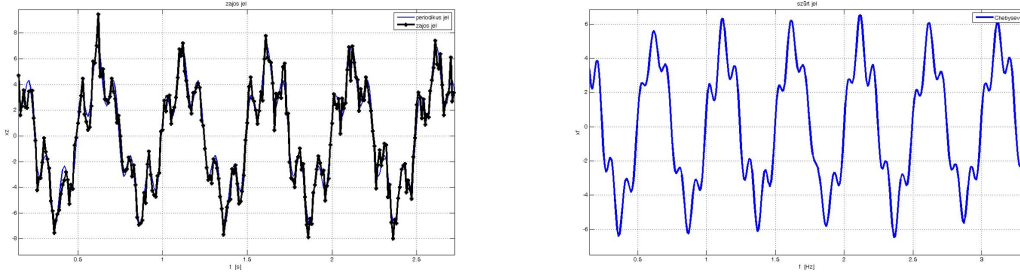
hogyan valóban a számunkra lényeges információt tartjuk meg és a lényegtelenet vágjuk le. A szűrés akkor jó, ha alakra ugyanolyan a válasz jel, mint a bemenő jel. A szűrés jóságának ellenőrzéséhez az alábbi példa javasol módszert.

Példa: Tekintsük a következő $x(t)$ jelet:

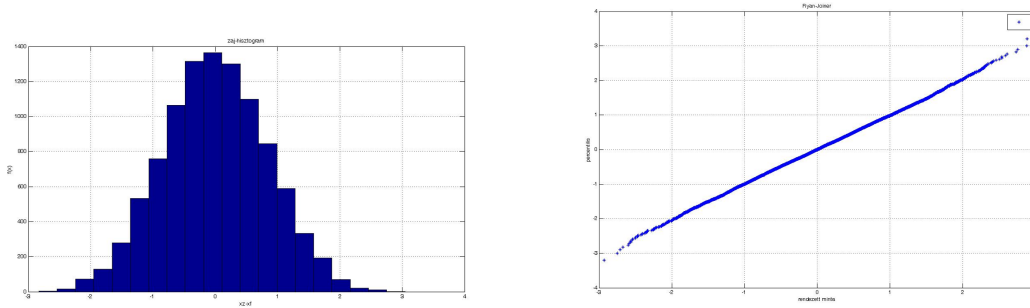
$$x(t) = 5 \sin(4\pi t) + 2 \sin\left(5 * 4\pi t + \frac{\pi}{5}\right),$$

melyet egy véletlen $\varepsilon(t)$ zaj terhel (26. ábra bal oldala). A Csebisev szűrővel megmaradt $y(t)$ jel a 26. ábra jobb oldalán látható.

A szűrés akkor jó, ha a $x(t) - y(t)$ jel normális eloszlást követ, ennek hisztogramja a 27. ábra bal oldalán látható. Jól látszik, hogy $x(t) - y(t)$ normális eloszlást követ, vagyis a szűrés jónak mondható, melyet a Ryan-Joiner teszttel ellenőriztünk [8].



26. ábra. A zajjal terhelt $x(t)$ függvény, és a Csebisev szűrő által meghagyott jel.



27. ábra. Az $x(t) - y(t)$ jel sűrűségfüggvénye.

5. Átlagolási eljárások

Az átlagolási eljárás állandó zajos jelek illetve nem túl nagy frekvenciájú jelek simítására használható. Legyen az n elemű mérési sorozatunk x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , ezek átlagával becsülhető x_n :

$$\hat{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k, \quad (51)$$

ahol \hat{x}_n jelöli az x_n becslését. Ezzel a módszerrel minden következő becsléshez szükség van az előző összes mérési eredményre, amely igen nagy tárhelyet igényel. Szükség van tehát egy rekurzív formulára, amelyhez nem kell az egyre nagyobb n elemű jelet tárolni.

$$\hat{x}_{n+1} \simeq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k = \frac{1}{n+1} x_n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{1}{n+1} x_n + \frac{n}{n+1} \hat{x}_n, \quad (52)$$

az utolsó egyenlőségénél felhasználtuk az (51)-es egyenletet. Tehát azt kaptuk, hogy \hat{x}_{n+1} előáll a legutóbb mért és a korábban becsült értékek lineáris kombinációjából. Az egyenletet tovább alakítva:

$$\hat{x}_{n+1} \simeq \frac{1}{n+1} x_n + \frac{n}{n+1} \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} \hat{x}_n - \frac{1}{n+1} \hat{x}_n = \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} (x_n - \hat{x}_n), \quad (53)$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{1}{n+1}(x_n - \hat{x}_n), \quad (54)$$

ahol a jobb oldalon álló összeg első tagja a *predikció*, második tagja pedig a *korrekció*, a képletet pedig **predikciós-korrekciós formulának** nevezik.

Megjegyzés: Az (54)-es formula egy lépéses módszer, hiszen $k = 1$ lépés becslésére alkalmas. A formula kiterjeszthető $k > 1$ többlépéses esetre is. $k < 1$ lépés esetén visszafelé simítunk úgy, hogy figyelembe vesszük az előre becsült értékeket is, ezt hívják ablakos simításnak (lásd alább).

Az (52)-es becslést más súlyokkal is el lehet végezni, ekkor **exponenciális átlagolásról** beszélünk. Legyen $Q > 1$, ezzel az (52)-es formula:

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{1}{Q}x_n + \frac{Q-1}{Q}\hat{x}_n, \quad (55)$$

hasonló becslés írható fel \hat{x}_n -re is, amit beírva az előző képletbe:

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{1}{Q}x_n + \frac{Q-1}{Q}\left(\frac{1}{Q}x_{n-1} + \frac{Q-1}{Q}\hat{x}_{n-1}\right) = \frac{1}{Q}x_n + \frac{1}{Q}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)x_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2\hat{x}_{n-1}. \quad (56)$$

Tovább folytatva a sort kapjuk:

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{1}{Q}x_n + \frac{1}{Q}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)x_{n-1} + \frac{1}{Q}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2x_{n-2} + \frac{1}{Q}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)^3x_{n-3} \dots \quad (57)$$

Ezt a becslést "felejtős" becslésnek is szokás nevezni, mert az egyre kisebb indexű tagoknak egyre kisebb együtthatói vannak.

Becslés ablakokkal is végezhető, amikor az átlagolást nem az egész adatsorra végezzük el, hanem csak azokra a tagokra melyek beleesnek az ablakba. Ekkor például egy N hosszú ablak esetén

$$\hat{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} x_k \quad (58)$$

Ha az ablak olyan, hogy mindig az éppen középső pontot becsüljük, a körülötte levő elemek átlagával, akkor belső pontos simításról van szó. Ekkor egy N hosszú ablak esetén

$$\hat{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=j-\frac{N-1}{2}}^{j+\frac{N-1}{2}} x_k \quad (59)$$

A fenti 58 és 59 képletekben minden x_k -nak azonos $1/N$ súlya van. Megjegyezzük, hogy olyan ablakok is léteznek, melyek nem szögletesek, például a (Fourier-transzformációnál) már látott Hann vagy Hamming ablakok, ahol a "becsülendő" j -edik elemtől távolodva egyre kisebb a súly:

$$\hat{x}_j = \sum_{k=j-\frac{N-1}{2}}^{j+\frac{N-1}{2}} w_k x_k \quad (60)$$

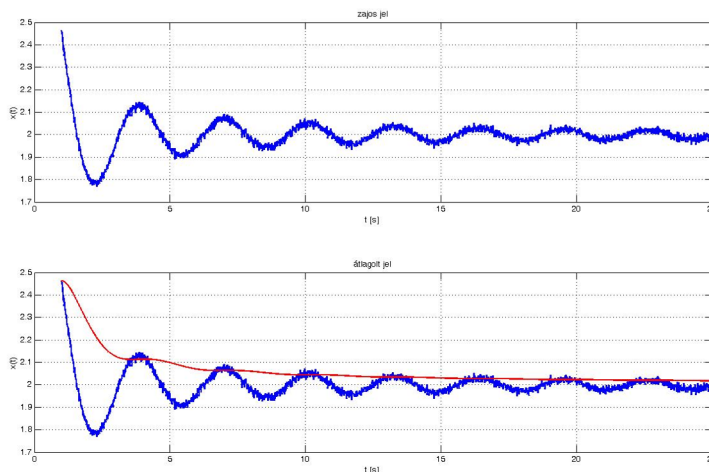
A simítás jóságának megítéléshez hasonlóan járhatunk el, mit szűrésnél tettük. Ha az eredeti és a simított jel különbsége normális eloszlást mutat, akkor feltehetjük, hogy csak a zajt simítottuk

le. A normalitás ellenőrzésére alkalmas lehet pl. a Ryan-Joiner tesz (lásd [8]). Általában elmondható, hogy a felsorolt módszerek mind numerikus módszerek, ezért míg egyes esetekben igen jónak bizonyulhatnak, más esetekben nem érdemes őket használni. Mindig a probléma sajátossága az, hogy milyen numerikus módszert érdemes használni.

Példa: Tekintsük a következő zajjal terhelt csillapított lengést:

$$x(t) = B(1 - e^{-t/C}) + A \sin(2\pi ft) \frac{1}{t + \Delta t} + \varepsilon(t) \quad (61)$$

$x(t)$ és az átlagolással simított közelítése a 28. ábrán látható. Jól látszik, hogy ezzel a simítással a lengés egyáltalán nem kapható vissza.



28. ábra. Az $x(t)$ zajos jel, és az átlagolással kapott jel (alsó ábra, piros vonal).

Az $x(t)$ jel exponenciális simítással vett közelítése $Q = 5$ és $Q = 50$ esetén a 29. ábrán közepén illetve lent látható. $Q = 50$ esetén a simítás kezdetben nem igazán jó.

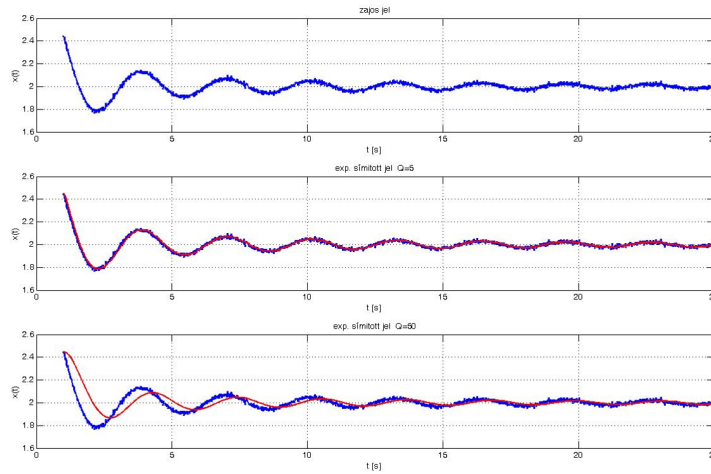
A 30. ábra derékszögű (felső sor második kép), Hamming (alsó sor első kép) illetve Hann (alsó sor második kép) ablakokkal vett simításokat mutatja.

5.1. Savitzky-Golay simítás (1964)

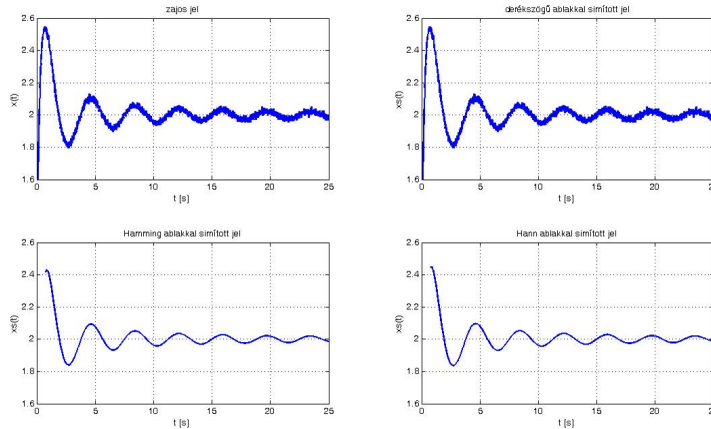
Egy másik simítási módszer, amely egyben egy szűrési eljárásnak is nevezhető, az Savitzky-Golay simítás, amely a következő ötleten alapszik. Legyen $x(t)$ egy zajos folyamat, amelynek Δt egyenközü megfigyelései az x_1, x_2, \dots, x_n értékek. Célunk a megfigyeléseket terhelő zaj csökkentése. Ezt a következő módon valósítjuk meg. A j . megfigyelés előtt és után levő két-két megfigyelésre, vagyis öt pontra másodfokú polinomot illesztünk legkisebb négyzetek módszerével. Ezzel a j . mérési pont simítása legyen az abba a pontba illesztett másodfokú polinom helyettesítési értéke.

A fentieket matematikailag is megfogalmazzuk. Először határozzuk meg a j . pont köré illesztett másodfokú polinomot. Vezessük be a t változó helyett a z változót:

$$z_k = \frac{t_k - t_j}{\Delta t}, \quad \text{ahol} \quad k = j - 2, j - 1, j, j + 1, j + 2. \quad (62)$$



29. ábra. Az $x(t)$ zajos jel, és az exponenciális átlagolással simított jel. A felső ábrán az eredeti jel látható. A középső ábrán $Q = 5$, az a alsó ábrán pedig $Q = 50$ értékekkel számolt simítás van.

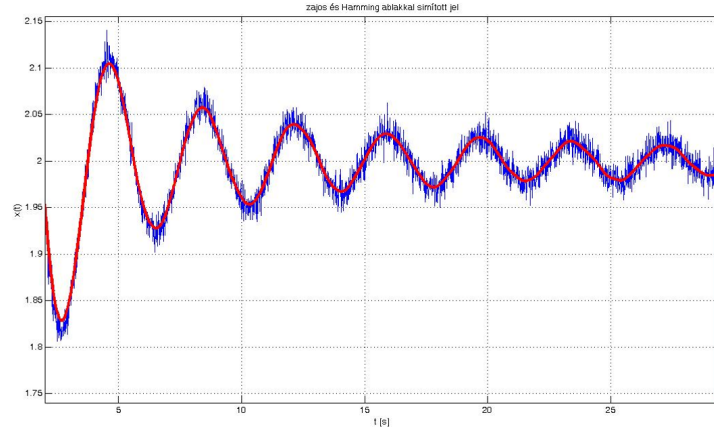


30. ábra. Simítás ablakkokkal.

Az egyszerűség kedvéért legyen most $z_1 = -2$, $z_2 = -1$, $z_3 = -0$, $z_4 = 1$, $z_5 = 2$. Az illetett másodfokú polinom pedig

$$Y(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2, \quad (63)$$

melynek α_0 , α_1 és α_2 együtthatói legkisebb négyzetek módszerével meghatározható. A módszer lényege, hogy az illetett görbe és a mérési pontok közötti eltérések négyzetösszegét minimalizálja.



31. ábra. Zajos jel Hamming ablakkal vett simítása.

Tehát írjuk fel a minimalizálandó F hibafüggvényt:

$$F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=-2}^2 (x_k - Y_k)^2 = \sum_{k=-2}^2 (x_k - \alpha_0 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2)^2 \quad (64)$$

F minimumhelyét az α_i -k szerinti parciális deriváltakból tudjuk megállapítani. A deriválások és némi átrendezés után a következő három egyenletből álló egyenletrendszert kapjuk:

$$5\alpha_0 + 0\alpha_1 + 10\alpha_2 = \sum_{k=-2}^2 x_k, \quad (65)$$

$$0\alpha_0 + 10\alpha_1 + 0\alpha_2 = \sum_{k=-2}^2 x_k z_k, \quad (66)$$

$$10\alpha_0 + 0\alpha_1 + 34\alpha_2 = \sum_{k=-2}^2 x_k z_k^2. \quad (67)$$

Ez egy lineáris algebrai egyenletrendszer, melynek megoldásai könnyen kiszámíthatók:

$$\alpha_0 = \frac{1}{35} (-3x_{j-2} + 12x_{j-1} + 17x_j + 12x_{j+1} - 3x_{j+2}), \quad (68)$$

$$\alpha_1 = \dots \quad (69)$$

$$\alpha_2 = \dots \quad (70)$$

Az illesztett polinommal csak a középső, j . értéket simítjuk. Feltevésünk szerint $z_j = z_3 = 0$, ezért $Y_j = \alpha_0$.

Ezt általánosítva felírható általában a középső j . pont helyén a simított érték:

$$Y_j = \sum_{k=-2}^2 C_k x_k \quad (71)$$

A C_k együtthatók pedig $C_{-2} = C_2 = -\frac{3}{35}$, $C_{-1} = C_1 = \frac{12}{35}$, $C_0 = \frac{17}{35}$.

A $j < 3$ vagy $j > n - 2$ kritikus szélső pontok, amelyekben a fenti módszer nem működik. Ezekre a pontokra több megoldás közül választhatunk.

- Az x_j sorozatot önkényesen szimmetrikusan folytatjuk. Például a mérési sorozat elejét és végét kibővítjük két taggal úgy, hogy az az x_0 és x_n pontok körül legyenek szimmetrikusak.
- Az első és az utolsó simító parabolából nem csak a középső értéket simítjuk, hanem az első, illetve az utolsó két értéket is.

További általánosításokkal is élhetünk:

- A simított pontokban deriváltak is számíthatók.
- A legkisebb négyzetek módszerében lehet súlyozni a pontokat.
- Nem csak 5 pontra, hanem 7, 9, stb. pontra is lehet simító polinomot illeszteni. Az illesztett polinom lehet magasabb fokú is.

Hivatkozások

- [1] BME MIT Tanszéki Munkaközösség: Digitális jelfeldolgozás. Segédlet a Digitális jelfeldolgozás (BMEVIMM4084) tárgyhoz. Kézirat, kizárólag a BME hallgatóinak használatára, 2008. szeptember.
- [2] Schnell László: Jelek és rendszerek mérés technikája, I., II., III. Műegyetemi Kiadó 1994.
- [3] N. Hesselmann: Digitális jelfeldolgozás. Műszaki Könyvkiadó. 1985.
- [4] Szathmáry Zoltán: Mérések kiértékelése. Egyetemi jegyzet. Budapest, 2010.
- [5] Kemény Sándor: Kísérletek tervezése és értékelése. BME Továbbképző Intézet 1983.
- [6] John G. Webster: Electrical Measurement, Signal Processing, and Displays. Publisher: CRC. 2003-07-15. ISBN: 0849317339
- [7] J.S. Bendat, A.G. Piersol: Random Data. Analysis and Measurement Procedures. John Wiley and Sons. 2000.
- [8] Varga Roxána: Műszaki és gazdasági adatok elemzése előadásjegyzet.
[http : //www.hds.bme.hu/letoltesek/targyak/BMEGEVGAG14/mugaz_ea_jegyzet.pdf](http://www.hds.bme.hu/letoltesek/targyak/BMEGEVGAG14/mugaz_ea_jegyzet.pdf)